91
15
56598
Church
83

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

Smithsonian Institution
FEB 1926
276643
National Museum

TOMO XIV.—NÚMEROS 1, 2 Y 3.
JULIO, AGOSTO Y SEPTIEMBRE DE 1915

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1915

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ART. 117 DE LOS ESTATUTOS DE LA ACADEMIA

«La Academia no adopta ni rehusa las opiniones de sus individuos; cada autor es responsable de lo que contengan sus escritos.»

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XIV

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1915

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES DE MADRID

ACADÉMICOS DE NUMERO

Excmo. Sr. D. José Echegaray, *Presidente.*
Zurbano, 56.

Sr. D. Joaquín González Hidalgo, *Vicepresidente.*
Carmen, 6 y 8.

Excmo. Sr. D. Daniel de Cortázar.
Velázquez, 16.

Excmo. Sr. D. José Rodríguez Carracido, *Bibliotecario.*
Augusto Figueroa, 41, cuad.º

Excmo. Sr. D. Francisco de P. Arrillaga, *Secretario.*
Valverde, 26.

Ilmo. Sr. D. Eduardo Torroja y Caballé, *Contador.*
Requena, 9.

Excmo. Sr. D. Amós Salvador y Rodrigáñez.
Carrera de San Jerónimo, 53.

Excmo. Sr. D. Juan Navarro-Reverter.
Barquillo, 15.

Excmo. Sr. D. Lucas Mallada.
Marqués de Urquijo, 2.

Excmo. Sr. D. Santiago Ramón y Cajal.
Alfonso XII, 72.

Ilmo. Sr. D. Pedro Palacios, *Tesorero.*
Monte Esquinza, 9.

Sr. D. Blas Lázaro é Ibiza.
Palafox, 19.

Excmo. Sr. D. José Muñoz del Castillo.
Quintana, 38.

Excmo. Sr. D. Leonardo de Torres y Quevedo.
Válgame Dios, 3.

Sr. D. José María de Madariaga, *Vicesecretario.*
Zurbano, 18.

Ilmo. Sr. D. José Rodríguez Mourelo.
Piamonte, 14.
Excmo. Sr. D. José Marvá y Mayer.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 3.
Ilmo. Sr. D. Rafael Sánchez Lozano.
Génova, 21.
Excmo. Sr. D. José Gómez Ocaña.
San Agustín, 7.
Sr. D. Vicente Ventosa y Martínez de Velasco.
Amnistía, 10.
Ilmo. Sr. D. Nicolás de Ugarte y Gutiérrez.
Antigua, 1. — Guadalajara.
Excmo. Sr. D. Gustavo Fernández Bastos.
Claudio Coello, 30 y 32.
Ilmo. Sr. D. Vicente de Garcini.
Alarcón, 5.
Sr. D. Miguel Vegas.
Pez, 1 y 3.
Sr. D. Blas Cabrera.
Paseo de Martínez Campos, 1.
Sr. D. Enrique Hauser.
Zorrilla, 33.
Ilmo. Sr. D. Eduardo Mier y Miura.
Serrano, 29.
Excmo. Sr. D. José Casares.
Plaza de Santa Catalina de los Donados, 2.
Sr. D. Luis Octavio de Toledo.
Velázquez, 28.
Sr. D. Ignacio González Martí.
Hernán Cortés, 7.
Excmo. Sr. D. Joaquín María de Castellarnáu.
Velázquez, 11.
Sr. D. Augusto Krahe.
Moreto, 7.
Ilmo. Sr. D. Pedro de Avila y Zumarán.
Travesía de la Ballesta, 8.
Ilmo. Sr. D. Ignacio Bolívar.
Paseo de Martínez Campos, 17.

ACADÉMICOS ELECTOS

Excmo. Sr. D. Bernardo Mateo Sagasta.
San Marcos, 39.
Sr. D. José Ruiz Castizo y Ariza.
Alberto Aguilera, 46.

La Academia está constituída en tres Secciones:

1.ª CIENCIAS EXACTAS.—Sres. Navarro-Reverter, *Presidente;* Vegas, *Secretario;* Arrillaga, Torroja, Torres Quevedo, Ventosa, Ugarte, Fernández y Rodríguez, Garcini, Octavio de Toledo y Krahe.

2.ª CIENCIAS FÍSICAS.— Sres. Rodríguez Carracido, *Presidente;* Rodríguez Mourelo, *Secretario;* Echegaray, Salvador, Muñoz del Castillo, Madariaga, Marvá, Cabrera, Hauser, Mier, Casares y González Martí.

3.ª CIENCIAS NATURALES.—Sres. González Hidalgo, *Presidente;* Castellarnáu, *Secretario;* Cortázar, Mallada, Ramón y Cajal, Palacios, Lázaro, Sánchez Lozano, Gómez Ocaña, Avila y Bolivar.

ACADÉMICOS CORRESPONSALES NACIONALES

Sr. D. Andrés Poey. *París.*
Sr. D. Eduardo Boscá y Casanoves. *Valencia.*
Ilmo. Sr. D. Luis Mariano Vidal. *Barcelona.*
Excmo. Sr. D. Leopoldo Martínez Reguera. *Madrid.*
Excmo. Sr. D. Rogelio de Inchaurrandieta. *Madrid.*
Sr. D. Ramón de Manjarrés y de Bofarull. *Sevilla.*
Sr. D. Zoel García de Galdeano. *Zaragoza.*
Sr. D. Eduardo J. Navarro. *Málaga.*
Ilmo. Sr. D. José María Escribano y Pérez. *Murcia.*
Sr. D. Lauro Clariana y Ricart. *Barcelona.*
Excmo. Sr. D. Rafael Breñosa y Tejada. *Segovia.*
Excmo. Sr. D. Juan Bautista Viniegra y Mendoza, Conde de Villamar. *Madrid.*
Sr. D. Juan Vilaró Díaz. *Habana.*
Excmo. Sr. D. Joaquín de Vargas y Aguirre. *Salamanca.*
Excmo. Sr. D. José J. Landerer. *Valencia.*
Sr. D. José Eugenio Ribera. *Madrid.*
Sr. D. Eugenio Mascareñas. *Barcelona.*

Sr. D. Tomás Escriche y Mieg. *Barcelona.*
Sr. D. Bernabé Dorronsoro. *Granada.*
Sr. D. Esteban Terradas. *Barcelona.*
Sr. D. Ventura Reyes Prosper. *Toledo.*
Excmo. Sr. D. Andrés A. Comerma. *Ferrol.*
R. P. Longinos Navás, S. J., *Zaragoza.*
Sr. D. José M.ª Plans y Freire. *Zaragoza.*
Sr. D. Domingo de Orueta. *Gijón.*

ACADÉMICOS CORRESPONSALES EXTRANJEROS

Anguiano (A.). *Méjico.*
Lemoine (V.). *Reims* (?).
Barrois (Ch.). *Lille.*
Hoonholtz, Barón de Teffé (A. L. de). *Río de Janeiro* (?).
Gomes Teixeira (F.). *Porto.*
Príncipe de Mónaco (S. A. el). *Mónaco.*
Choffat (P.). *Lisboa.*
Arata (P. N.). *Buenos Aires.*
Carvallo (M.). *París.*
Eneström (G.). *Estocolmo.*
Ferreira da Silva (A. J.). *Porto.*
Pina Vidal (A. A. de). *Lisboa.*
Brocard (H.). *Bar-le-Duc.*
Ocagne (M. d'). *París.*
Romiti (G.). *Pisa.*
Wettstein Ritter von Westersheim (R.). *Viena.*
Engler (A.). *Berlín.*
Guedes de Queiróz, Conde de Foz (G.). *Lisboa.*
Rayleigh (Lord). *Salisbury.*
Arrhenius. (S.). *Estocolmo.*
Ramsay (G.). *Londres.*
Castanheira das Neves (J.). *Lisboa.*
Pilsbry (E.). *Filadelfia.*

Porter (C. E.). *Santiago de Chile.*
Herrero Ducloux (E.). *La Plata (República Argentina)*
Chervin (A.). *París.*
Urbain (G.). *París.*
Moureu (C.). *París.*
Sarasin (E.). *Ginebra.*
Guye (F. A.). *Ginebra.*
Guimarâes (R.). *Lisboa.*
Capellini (J.). *Bolonia.*
Sabatier (P.). *Toulouse.*

I. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia primera.

SEÑORES:

Empiezo con esta conferencia el décimo curso de los que vengo explicando sobre Física Matemática en la Universidad Central; cuando estas conferencias se impriman constituirán el tomo décimo de los que sobre Física Matemática habré publicado, y por décima vez cuando menos, repito cuál es mi objeto en esta larga labor.

Y el objeto que me propongo no es otro que el de propagar en nuestro país la alta ciencia Matemática en sus aplicaciones á la Física, ó dicho de otro modo, el de formar una doble enciclopedia sobre Física Matemática. Y digo doble enciclopedia porque estas conferencias han de abarcar no sólo la ciencia clásica, la que puede decirse que, poco más ó menos, termina con el siglo XIX, sino la ciencia moderna y aun modernísima, la que se viene elaborando por gran número de matemáticos y físicos desde fines del siglo precedente y puede afirmarse que hoy se encuentra en pleno período de ebullición.

Esta división de la Física Matemática en clásica, moderna y modernísima, división que vengo consignando en estas conferencias desde hace muchos años, casi pudiera decir que desde que comenzaron, la he visto confirmada recientemente por un físico ilustre, el doctor Max Planck, rector de la Universidad de Berlín, en el discurso inaugural pronunciado

el 15 de octubre de 1913 en aquella Universidad, de la cual fué nombrado rector por dicha época.

Ciencia clásica es el nombre que da á la Física Matemática del siglo XIX; y los caracteres de aquel inmenso movimiento del saber humano los he señalado en estas series de conferencias muchas veces.

Y más de una y más de dos, para templar lo temerario y aun lo vanidoso de mi empresa, he explicado ante mis alumnos y ante mis lectores, los límites en que la encierro y el carácter de pura enseñanza que pretendo darle.

No es que en ambas enciclopedias pretenda yo encerrar la inmensa labor de los sabios de los siglos XVIII y XIX en lo que á la Física Matemática pueda referirse.

No es tampoco, que pretenda seguir en su marcha, prodigiosa por lo rápida y prodigiosa por su extensión, á la Física moderna y modernísima; no es esto lo que me propongo, que fuera empresa rayana en la locura.

Es un trabajo de preparación, de iniciación, pudiéramos decir, en los grandes problemas de la interpretación matemática del Universo, que viene ocupando más de dos centurias al pensamiento humano.

Tiene un objeto mi labor, que aun así es extensísima: preparar y facilitar el estudio de las grandes creaciones de los maestros y hacer accesibles sus memorias, sus libros, sus teorías á la juventud que en España pueda interesarse en tales estudios.

No son elementales mis lecciones; pero de lo elemental arrancan para elevarse á las altas esferas científicas; entiéndase bien: no para pretender recorrerlas y dominarlas, sino para llegar á ellas, que luego cada uno de mis alumnos, ó cada lector, podrá recorrerlas por su cuenta, si por recorrerlas siente verdaderas ansias.

Si se me permite reproducir una imagen, que alguna vez he presentado en mis conferencias, y que concreta y que, por decirlo así, da forma plástica á mi pensamiento y á mis

propósitos como profesor, diré que al sentarme en esta cátedra un año y otro año, me figuro que con mis alumnos, y más tarde con mis lectores, estoy encerrado en un inmenso y obscuro edificio, el de la ignorancia universal, y que yo, como guía, aunque tropezando, puedo andar por él, por venirlo recorriendo hace ochenta y tres años, y me acerco á una de sus ventanas y de par en par la abro, para que los que me acompañan se asomen á ella y vean el inmenso panorama de cielos y tierra que ante su vista se dilata.

Y sus ojos se sacian de luz, aunque á él no lleguen todavía.

Y les conduzco á otra fachada, y abro como puedo otra ventana, y les muestro otro horizonte más luminoso, más ancho, aun más hermoso que el primero.

Y por todas las fachadas del antes obscuro monumento voy haciendo lo mismo, mostrando nuevos y nuevos horizontes, cada vez más luminosos y más espléndidos. Todos alrededor del antro de las sombras en que antes vivíamos.

Y luego, á la luz de las ventanas abiertas, trepamos por las escaleras interiores, muchas de ellas envueltas en la penumbra y algunas á obscuras, hasta un piso más alto de nuestra primitiva cárcel. Y en él repito mi eterna tarea de abrir ventanales y señalar hacia horizontes cada vez más extensos.

Yo no puedo hacer más en mi enseñanza. Luego, el que quiera y el que pueda que salga del edificio de las sombras y penetre en los horizontes de la luz, y por su cuenta los recorra, como yo alguna vez he intentado recorrerlos.

No me propongo otra cosa, y aun es empresa que sólo parcialmente puedo ir realizando tras uno y otro curso.

Muchas ventanas he abierto: este curso procuraré abrir alguna más; pero ¡cuántas hay todavía herméticamente cerradas!

Mas dejemos imágenes: designemos las cosas por su nombre y vengamos al programa de este curso de 1914 á 1915.

***

La mayor parte de las teorías de la Física Matemática clásica se fundan en la hipótesis mecánica, como hemos explicado tantas y tantas veces.

Algunas de estas teorías, muchas de ellas pudiéramos decir, las hemos explicado con la posible extensión en las nueve series de conferencias precedentes.

Pero es claro, que aun dentro de la ciencia clásica, y sin abordar de lleno todavía ninguna de las teorías modernas ó modernísimas, aunque de pasada las hayamos señalado á veces, es claro, repito, que no hemos agotado la materia.

Y en el presente curso vamos á exponer los principios ufndamentales de una de aquellas teorías clásicas.

Problema pudiéramos decir de Mecánica racional, problema que fué en su tiempo importantísimo y que en la gran evolución de la Ciencia ha tenido mejor suerte que el problema de los torbellinos, que estudiamos en años anteriores.

Este empezó con gran empuje y despertando grandes esperanzas; hoy las esperanzas, en cierto modo, se desvanecieron y en gran parte se apagaron los entusiasmos.

Queda como un gran esfuerzo del genio de Helmholtz, de Thomson y de otros matemáticos ilustres.

En la historia de la Ciencia ocupa puesto honrosísimo; pero no es, si se me permite esta manera de expresarme, de los problemas que están hoy á la moda: todavía no ha rejuvenecido.

En cambio, el segundo de ambos problemas, el que ha de ocupar todas las conferencias de este curso, empezó inspirando ciertos recelos y ciertas críticas.

Sus métodos matemáticos ni tenían, ni tienen aun hoy

mismo, aquella fuerza lógica de los razonamientos matemáticos, que por fuerza inquebrantable se imponen á la inteligencia, provocando á cada paso la contradicción si no se aceptan, y en que parece que el sér humano dice: si esto no fuera cierto tendría que renunciar á mi razón.

Después fueron perfeccionándose las demostraciones, fueron dibujándose con más y más claridad y, cosa extraña, entre todas las grandes teorías de la ciencia clásica es la que más se acomoda á las hipótesis modernas.

En el gran naufragio crítico este problema á que nos referimos ha podido salvarse.

La razón la explicaremos en breve, que el hecho no es ciertamente obra de la casualidad.

***

La materia que vamos á estudiar puede titularse de este modo: *Teoría de los gases.*

Pero los gases pueden estudiarse de dos modos.

1.° Como si fueran flúidos continuos, como el flúido continuo y perfecto en que nos fundábamos al desarrollar las fórmulas de la Hidrodinámica.

2.° Pero también pueden considerarse los gases como conjunto de átomos, moléculas, partículas, en suma, partes pequeñísimas de materia, que se agitan en todos sentidos en un espacio dado. En el espacio á que el gas se extiende.

Ni más ni menos, y perdóneseme la imagen, que en el interior de una habitación cerrada pudieran volar miles y miles de pequeñas moscas con desordenados y agitadísimos movimientos.

Chocando unas con otras á cada instante y á cada instante chocando contra las paredes, y determinando por este conjunto de choques la presión del enjambre sobre las paredes del recinto en que estuviera encerrado.

De estas dos hipótesis la primera se funda, como hemos dicho, en el *principio de continuidad.*

La segunda hipótesis, franca y resueltamente también, se funda en el principio opuesto: en el de la *discontinuidad.*

Y ahora se comprende por qué los modernistas de la Ciencia miran casi con cariño, por lo menos con simpatía ó con tolerancia, esta teoría especialísima de los gases; por qué, hasta hoy, puede decirse que es el mayor de los triunfos que el principio de discontinuidad ha obtenido en la ciencia experimental y en la teórica muy principalmente.

Digamos, siquiera sea de paso, que, á pesar de la desconfianza que ciertos innovadores muestran contra la aplicación á la Física Matemática de las ecuaciones diferenciales, y á pesar de que esta teoría de los gases arranca de la hipótesis de la discontinuidad, no por eso han tenido escrúpulos sus fundadores en acudir al cálculo diferencial é integral para resolver la mayor parte de los problemas, que en la teoría de que se trata se presenta.

Esta teoría de los gases, la de la segunda hipótesis, la de la discontinuidad, tiene un nombre clásico.

Se llama: *Teoría cinemática de los gases.*

Y antes de seguir adelante, permítaseme que abra aquí un pequeño paréntesis.

***

Sabido es que la ciencia cinemática es la que trata del movimiento. Este nombre *cinemática* viene, en efecto, de la palabra griega *cinema*, que en aquel idioma clásico significa movimiento.

La Cinemática es, pues, la ciencia que trata del movimiento en sí, independientemente de sus causas.

Natural es que una hipótesis, la hipótesis de los gases de que estamos tratando, que parte del movimiento de un

conjunto ó enjambre de partículas, reciba el nombre que hemos indicado: Teoría cinemática de los gases.

En todos los idiomas existe, pues, esta palabra, tomada siempre del griego.

Pero sin duda empieza á cambiar al pasar del substantivo cinemática al adjetivo correspondiente, como si dijéramos de la cinemática, como ciencia, á la teoría cinemática.

Porque en francés, por ejemplo, para el substantivo existe la palabra *cinématique,* equivalente á nuestra cinemática.

Pero en el adjetivo se abrevia el radical y se dice Teoría *cinétique,* ni más ni menos que el público, hoy, simplifica la palabra cinematógrafo y dice únicamente el *cine.*

Pues bien: ¿deberemos decir teoría cinemática ó, buscando la economía de esfuerzo, como en tantos otros problemas de la lingüística, deberemos decir teoría cinética?

Mientras otra cosa se resuelva por quien pueda, me atendré á la primera solución y seguiré diciendo: *Teoría cinemática de los gases.*

Y cerrando este paréntesis continuemos discutiendo el problema fundamental.

***

Expusimos hace algunos años que todos los problemas de la Física Matemática clásica, dejando aparte el de la conductividad del calórico y alguna otra cuestión especial, en suma, todos aquellos á que se aplica la hipótesis mecánica, pueden dividirse para el estudio en tres grandes grupos.

Y esta misma idea ó esta misma clasificación vamos á reproducirla ahora, porque ella nos conduce, lógicamente, á la teoría cinemática de los gases.

Estos tres grupos son los siguientes:

1.° Problemas de Mecánica en que el número de puntos materiales es finito, ó en que se trata de un número, finito

también, de cuerpos sólidos, ó de un sistema de cuerpos sólidos con enlaces bien definidos.

Claro es que hacer la clasificación de todos los problemas comprendidos en este grupo me llevaría muy lejos, y sólo para fijar las ideas presentaré algunos ejemplos.

Sea un número finito n de puntos de masa determinada, sometidos á fuerzas recíprocas y á fuerzas exteriores.

A cada punto se le podrán aplicar las tres ecuaciones fundamentales de la Mecánica, y distinguiendo por subíndices las coordenadas, las fuerzas y las masas, tendremos, para resolver el problema, este sistema de ecuaciones:

$$m_1 \frac{\partial^2 x_1}{\partial t^2} = X_1, \quad m_1 \frac{\partial^2 y_1}{\partial t^2} = Y_1, \quad m_1 \frac{\partial^2 z_1}{\partial t^2} = Z_1$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$m_n \frac{\partial^2 x_n}{\partial t^2} = X_n, \quad m_n \frac{\partial^2 y_n}{\partial t^2} = Y_n, \quad m_n \frac{\partial^2 z_n}{\partial t^2} = Z_n.$$

Las ecuaciones son en número de $3n$, y las incógnitas son x_n, y_n, z_n... en número $3n$ también, ó sean tantas como ecuaciones.

Las m son constantes conocidas, y las X, Y, Z serán, en general, funciones de x, y, z, aunque aquí cabe mayor complicación, porque pueden ser funciones del tiempo y hasta funciones de las velocidades y aun de otras derivadas; pero ateniéndonos al primer caso tendremos $3n$ ecuaciones diferenciales de segundo orden, del tipo de las ecuaciones diferenciales más sencillas.

El problema de Mecánica aquí concluye; el problema de cálculo aquí empieza, y todo estará reducido á integrar estas $3n$ ecuaciones diferenciales; y si esto se consigue, tendremos x, y, z en función del tiempo y de las constantes del instante inicial, es decir, de las coordenadas iniciales de cada punto, y de las componentes de las velocidades también, para $t = 0$.

Si los astros se redujesen á centros en que la masa quedara reconcentrada, en rigor este sería el problema general de la Astronomía, porque nunca se considera á la vez más que las influencias de astros en número limitado, y aun así resultan problemas formidables.

A este mismo grupo pertenece, como segundo ejemplo, el movimiento de un cuerpo sólido; claro es que el sólido contiene infinitos puntos, pero constituyendo un sistema rígido, y para resolverlo bastan seis ecuaciones:

Tres relativas al movimiento del centro de gravedad, que son análogas á las anteriores, y otras tres para los movimientos de rotación.

Otro tercer ejemplo, que comprenden los de este grupo, es el que da lugar á las llamadas ecuaciones para sistemas de diversos enlaces.

En él se estudian las ecuaciones de Lagrange y las ecuaciones canónicas de Hamilton, que hemos dado á conocer á nuestros alumnos en uno de los cursos anteriores, y allí dijimos, que á estas ecuaciones de Lagrange, se procuraba hacerlas extensivas á los problemas de la ciencia moderna, es decir, á los problemas de la electricidad y el magnetismo.

Dicho primer grupo comprende casi todos los problemas que antes se estudiaban bajo el título general de *Mecánica racional*, y la mayor parte de ellos daban lugar á ecuaciones diferenciales ordinarias, porque el número de puntos ó sistemas era en número finito, y por lo regular no entraban más que las derivadas de las coordenadas con relación al tiempo.

Dicho sea esto, hablando en términos generales.

2.° El segundo grupo, hablando también en términos generales, diremos que es el que da lugar á ecuaciones en diferenciales parciales.

Comprendía dicho segundo grupo la mayor parte de los problemas, no ya de Mecánica racional, sino de Física Matemática.

Por ejemplo, el problema de la elasticidad.

El del sonido.

El de la luz.

Y casi pudiéramos agregar los problemas generales de Hidrostática y de Hidrodinámica.

En el primer grupo considerábamos un *número finito* de puntos ó sistemas.

En los problemas de este segundo conjunto tenemos que considerar un *número infinito* de puntos.

Y la razón es que al aplicar la hipótesis mecánica á esta categoría de problemas, al pretender explicar todos los fenómenos naturales por las leyes de la Mecánica racional, tenemos que imaginar, y ésta es la hipótesis, un flúido continuo que en cierto modo sea el *substratum* de todos estos fenómenos.

La substancia en la cual y por la cual tales fenómenos se desarrollan.

Para el problema de la elasticidad tenemos que imaginar la materia ponderable, y á la verdad, no la suponemos continua en sí, sino dividida en átomos, pero tan pequeños y tantos que, dada la pobreza de nuestros medios intelectuales, vienen á confundirse estos elementos con las diferenciales del cálculo diferencial é integral; ó bien buscamos artificios para substituir á la discontinuidad real, que reconocemos desde luego, una continuidad que nos permita aplicar á los problemas que abordemos las ecuaciones diferenciales.

Otro tanto podemos decir del sonido. El sistema material en que el sonido se propaga será el aire ó un líquido ó un cuerpo sólido. Siempre un sistema material compuesto de un número enorme, que nosotros podemos llamar infinito, de elementos materiales.

Y una cosa análoga podemos decir para la luz en la teoría clásica de Fresnel.

Para explicar los fenómenos luminosos, hubo que imaginar un flúido, al cual se dió el nombre de éter, compuesto

de infinitos elementos cuyas vibraciones constituían las ondas luminosas, como las vibraciones del aire constituían las ondas sonoras.

Había, pues, que aplicar las ecuaciones de la Mecánica á cada uno de estos elementos, lo mismo que en los ejemplos anteriores.

Y en suma, en todos los casos comprendidos en este segundo grupo, si para cada punto aplicábamos las tres ecuaciones clásicas de la Dinámica,

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X,$$

$$m \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y,$$

$$m \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z,$$

claro es que tendríamos un número inmenso de ecuaciones diferenciales que integrar, porque inmenso será el número de coordenadas x, y, z. Habrá tantos grupos de á tres coordenadas como puntos contiene el sistema.

Teóricamente el problema está ya resuelto, si la inteligencia humana, aun siendo de la misma clase que es hoy, pudiera manejar millones y billones y trillones de ecuaciones diferenciales.

En la realidad esto equivale á decir que no podríamos resolver el problema.

Mas hay una circunstancia característica de este segundo grupo, que resuelve la dificultad inmediatamente y con extrema sencillez.

En el primer grupo, en el de los problemas ordinarios de la Mecánica racional, cada punto describe una curva de dimensiones finitas, en la que el punto se puede alejar tanto como se quiera de su posición inicial.

En el segundo grupo, que constituye la gran masa de los

problemas de la Física Matemática clásica, aunque el número de puntos es enorme, infinito podemos decir, *cada uno de ellos se separa muy poco de la posición que ocupa en un momento dado.* Las trayectorias son infinitamente pequeñas.

Los puntos vibran alrededor de una posición media en los problemas de la elasticidad y en los problemas de la luz y en los problemas del sonido, de donde resulta que podemos introducir, como incógnitas, no las coordenadas del punto referidas á un origen cualquiera, sino referidas á su posición primitiva como origen.

Si, por ejemplo, las representamos por u, v, w, estas tres incógnitas variarán con el tiempo y serán distintas según la posición inicial del móvil, de donde resulta que serán funciones de cuatro variables, á saber: x, y, z, t, y las ecuaciones generales de la Mecánica no serán ecuaciones diferenciales ordinarias, sino que serán *ecuaciones en diferenciales parciales.*

No serán en número $3n$, sino que serán tres ecuaciones no más, que determinarán, una vez integradas, u, v, w, en función de x, y, z, t; al paso que, en el primer grupo, obteníamos x, y, z, en función de t tan sólo y de las constantes de la integración.

Los problemas de Hidrostática y de Hidrodinámica merecerían capítulo aparte, porque en cierto modo participan de los caracteres del primero y del segundo grupo.

Pero como todas estas cuestiones las hemos tratado ampliamente en diferentes cursos de nuestra asignatura, no hemos de insistir sobre dichas ideas.

En rigor, voy haciendo un resumen de todos los cursos que preceden.

3.° Este tercer grupo difiere esencialmente de los dos anteriores y es el que ha de constituir la materia propia del curso actual.

Está incluído dicho grupo, como aquéllos en la hipótesis mecánica.

Pero los procedimientos difieren, en gran parte, de los que hasta aquí hemos seguido.

La teoría cinemática de los gases, más que á la Mecánica ordinaria, pertenece á lo que hoy se llama *Mecánica estadística*, de la que tan brillantes muestras ha dado el ilustre americano Gibbs.

Vislumbró esta rama de la Ciencia Bernoulli, la han cultivado otros muchos sabios y matemáticos; pero yo me limitaré á citar tres nombres: Clausius, Maxwell y Boltzmann.

Sucede en la Ciencia lo que sucede al contemplar desde lejos una ciudad: que los monumentos que más se destacan en ella son las torres muy elevadas.

Difiere de los grupos anteriores la teoría de los gases, en esta circunstancia. En ella no se sigue, por decirlo de este modo, á cada elemento material en su trayectoria como en el primer grupo. Tampoco su trayectoria es infinitamente pequeña como en el segundo grupo, sino extensísima, inacabable, caprichosa, compuesta de partes continuas y de repetidas discontinuidades.

Y todo esto se comprende sin dificultad, porque en la teoría cinemática de los gases, como hemos explicado ya otras veces, desde el primer curso de esta asignatura, pudiéramos decir, se supone que el gas se compone de un número enorme de partículas ó elementos, átomos ó moléculas; de suerte que, como el número n de puntos es grandísimo, estos problemas no pueden estar comprendidos en el primero de los grupos antes señalados.

Pero estas partículas del gas se mueven en agitación constante, como en el ejemplo tantas veces citado de muchos moscardones que bullen bajo una campana de cristal y á cada momento chocan y á cada momento cambian de dirección, y entre choque y choque describen una pequeñísima trayectoria rectilínea, para chocar de nuevo y caminar de nuevo á lo largo de una recta de dimensión infinitamente pequeña.

Y así, en zigzags interminables, como dijimos antes.

De suerte que no sólo difiere este caso del primer grupo por lo inmenso del número de los puntos en movimiento, sino por la naturaleza discontinua de sus trayectorias.

¿En qué se parece una de estas trayectorias, quebradas de continuo, á una de las magníficas elipses planetarias, las cuales elipses realizan uno de los ideales de la Geometría analítica?

Claro es, que á este problema de los gases, en la hipótesis que consideramos, parece que es imposible, que es un absurdo, pretender aplicar las fórmulas de la Mecánica celeste, ni aun de la Mecánica racional ordinaria.

Y si este problema difiere, como acabamos de ver, de los comprendidos en el primer grupo, no difiere menos de los comprendidos en el segundo.

El número de puntos en ambas clases de problemas es infinito, al menos para nuestros sentidos y nuestra inteligencia.

Pero éste es el único carácter común entre ambas familias de problemas.

Porque si las trayectorias caprichosas, compuestas de pequeñísimos trozos rectilíneos, en diferentes direcciones y formando verdaderas marañas, difieren esencialmente de las curvas astronómicas en que, para nosotros al menos, la continuidad domina, no difieren menos de las curvas de vibración de un cuerpo elástico ó de las elipses infinitamente pequeñas de la luz polarizada en la teoría de Fresnel, ni se ve manera de aplicar á este caso las ecuaciones en diferenciales parciales del segundo grupo.

En suma, en la teoría cinemática de los gases no vamos á seguir la trayectoria de cada uno de los puntos.

Cada punto pierde, por decirlo así, su individualidad en el conjunto inmenso de puntos que le rodean, como pierden los individuos la suya en los grandes problemas de la estadística, es decir, en la estadística de los grandes números.

Si se me permite una comparación, acaso atrevida, diré

que la Mecánica aplicada á los cuerpos celestes es la mecánica de alto y armónico individualismo, y que la Mecánica estadística del presente curso es una mecánica de marcado carácter socialista.

Ante el número se desprecia al individuo, aunque de individuos esté compuesto el número total.

***

Y resumiendo estas ideas, que aun tendremos ocasión de desarrollar en las conferencias inmediatas, y que, en rigor, constituyen toda la materia del presente curso, diremos que, si bien subsisten en los nuevos problemas los principios de la Mecánica clásica, en vez de aplicarlos individualmente á cada elemento material, los aplicaremos al conjunto.

O expresando la misma idea aun con más exactitud, los aplicaremos á los *términos medios.*

La teoría cinemática de los gases es teoría de *promedios* y de *cálculo de probabilidades.*

No diremos: esta molécula, que en tal instante ocupa tal posición, con tal velocidad, ¿á qué punto del espacio habrá llegado y con qué velocidad llegará en otro instante cualquiera *t?* sino que diremos, por ejemplo, sin determinar la velocidad propia de cada molécula en cada instante: en ese instante, ¿cuál será la velocidad media de todas ellas?

Y así formularemos las cuestiones para las magnitudes que con el movimiento tienen relación.

En tal instante, ¿cuál será el valor medio del cuadrado de las velocidades?

En tal otro instante, ¿cuál será la energía media de cada átomo?

Y aun prescindiremos del tiempo y buscaremos un *estado normal de agitación,* si podemos expresarnos de este modo: el estado de agitación, repetimos, á que tenderá todo el sistema, constituyendo dicho estado una distribución perma-

nente de toda la agitación interna, en velocidades, cuadrados de las velocidades, fuerzas vivas ó energías, y si se quiere, presiones internas del gas.

Y á todos estos problemas se enlazarán, como acabamos de decir, problemas de probabilidades, que tendrá este enunciado general:

¿Cuál es la distribución más probable de tales ó cuales magnitudes del sistema en movimiento?

Porque á dicho sistema más probable es al que tenderá la masa gaseosa en su agitación permanente. Desordenada al principio y tendiendo al fin, asintóticamente, á cierto estado de *equilibrio y agitación*, si vale la contradicción que la frase encierra en sí.

Estas cuestiones, ú otras análogas á ellas, surgen á cada paso en la ciencia modernísima, y ésta es precisamente la circunstancia que salva del olvido á la teoría cinética de los gases en la célebre teoría de los *quanta* y aun en algunas cuestiones de la teoría electrónica de los metales.

Las ideas que preceden podrán parecer un tanto vagas á mis alumnos, pero ya las iremos precisando en las conferencias sucesivas.

Digamos para concluir ésta, que la exposición de la teoría de los gases según la hipótesis cinemática, puede hacerse de muchas maneras, y en una de ellas dominan, como acabamos de decir, *los problemas del cálculo de probabilidades.*

Nosotros acudiremos á él cuando sea absolutamente preciso, y todavía no sé cuando será.

Pero como es materia que no hemos estudiado especialmente, esta de las probabilidades, procuraremos eludirla si encontramos otro medio de exposición.

En la conferencia próxima procuraremos entrar ya en materia, ampliando antes algunas de las consideraciones que preceden.

II.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia segunda.

SEÑORES:

De los tres grandes grupos en que pueden dividirse los problemas de la Física Matemática clásica, y en que domina por lo tanto la hipótesis Mecánica, dijimos en la conferencia precedente, que íbamos á tratar durante este curso del tercero de ellos, que es aquel en que el sistema que se considera está constituído por tantos puntos materiales, que es imposible seguir individualmente la trayectoria de cada uno de ellos, por la multiplicidad enorme de éstos, multiplicidad tal que en cada centímetro cúbico pueden contarse por millones; y además por lo irregular de las trayectorias, que cambian á cada choque y que se componen, por lo tanto, de un número inmenso de pequeñísimas líneas rectas.

Claro es que, *en teoría,* aislando uno de estos puntos y suponiendo, para fijar las ideas, que cada uno de ellos es una pequeñísima esfera, por las reglas del choque, conociendo la dirección en que viene y la velocidad que le anima, puede saberse también cuál será la nueva dirección después del choque y cuál la velocidad de la esferilla.

Y de choque en choque se la podría seguir en su enmarañada trayectoria.

Este sería el verdadero método cinemático; pero como hemos dicho y como fácilmente se comprende, es de todo punto ilusorio.

A dicho método hay que substituir el método de los términos medios, el del cálculo de probabilidades, el que prescinde de cada esferilla individual y de cada velocidad particular, para tomar en cuenta, por decirlo de este modo, los conjuntos y los promedios de esos conjuntos.

Es decir, el método *estadístico*.

Por esta razón no debiéramos haber titulado estas conferencias diciendo «Teoría cinemática de los gases», sino «Teoría estadística de los gases», como se dice «Mecánica estadística de Gibbs».

La palabra *cinemática* no se refiere, pues, al método que vamos á seguir, sino á la hipótesis de que partimos respecto á la constitución de las masas gaseosas.

Es decir, que no las consideramos como flúidos continuos, sino como un conjunto de partículas animadas de perpetua agitación.

*
* *

Cuando un inmenso conjunto de átomos, moléculas, ó en general partículas, constituyendo un gas, se mueven en un espacio, chocando á cada instante unas con otros, se comprende que puede haber dos clases de movimientos:

1.° Un movimiento variado que cambia en cada instante y que es distinto de una región á otra; de modo que la distribución del movimiento es diversa para las diversas regiones del gas y de un momento á otro momento.

2.° Pero si esa agitación irregular ha llegado á regularizarse en cierto modo, entonces tendremos una distribución permanente y homogénea.

Esto quiere decir que el movimiento medio en cada región es el mismo y en diferentes períodos es idéntico.

Y al hablar de movimiento medio, no queremos decir que el movimiento en cada región sea una reproducción geomé-

trica y cinemática del movimiento en otra región, de modo que pudieran superponerse y confundirse, sino que esta identidad y esta superposición se refiere á los términos medios.

Dichas ideas, que son un tanto vagas, y toda expresión vaga corre el peligro de ser incorrecta, se irán comprendiendo mejor á medida que avancemos en nuestro trabajo.

Por ahora presentemos un ejemplo material.

Consideremos un centímetro cúbico del gas para un instante dado, y supongamos que existen en ese centímetro cúbico y en ese instante un número n de partículas.

Repitamos esta misma operación para diez instantes de un segundo de tiempo, y supongamos que se obtienen para el número de partículas comprendidas en el centímetro cúbico los números $n_1, n_2 \ldots n_{10}$.

Si tomamos el término medio de todos estos números $n_1, n_2 \ldots$ que suponemos que son distintos, y suponemos que este término medio es $1.000.000 = 10^6$, tendremos

$$\frac{n_1 + n_2 + n_3 \ldots + n_{10}}{10} = 10^6;$$

supongamos ahora que repitiendo esta operacion para cualquier instante y para todos los centímetros cúbicos del gas, obtenemos siempre el mismo resultado.

Pues diremos, que la distribución de las partículas es homogénea y permanente. Y sin embargo, la distribución geométrica en cada momento de los puntos del centímetro cúbico puede representar una figura completamente distinta.

Y habrá momentos en que en un centímetro cúbico difiera mucho de 1.000.000, y hasta se comprende que pueda haber un momento en que el centímetro cúbico esté vacío.

El cálculo de probabilidades nos dirá la probabilidad de que esto suceda.

Los promedios no son números exactos, son números más ó menos probables y dependen de causas fijas y determinadas, pero que nosotros no podemos ni conocer ni abarcar.

Otro ejemplo aún.

Se dice que en una población la mortalidad durante un mes ha sido de noventa personas.

Si el mes tiene treinta días la mortalidad media habrá sido

$$\frac{90}{30} = 3,$$

es decir, de tres personas por día.

Y sin embargo, puede haber algún día en que no haya muerto ninguna. Es casilla desierta de la mortalidad, como antes teníamos un centímetro cúbico desierto de partículas.

Lo que hay en este último ejemplo es, que otros días habrán muerto más de tres personas, y la compensación de unos días con otros da el promedio de tres personas cada veinticuatro horas.

Consideración análoga pudiéramos hacer respecto á la distribución de velocidades, energías, etc.

Volvemos á repetirlo: mientras otra cosa no digamos, se entenderá que estudiamos tan sólo *distribuciones permanentes,* y de *promedios constantes.*

***

Mr. Bauer cita un ejemplo muy sugestivo, y que vamos á reproducir en breves líneas, para dar una idea de la teoría estadística y de las probabilidades que en esta teoría entran en juego.

Supongamos una substancia pulverulenta compuesta de granillos blancos y negros y contenida en un frasco.

Supongamos además, que en el primer momento están separados los de una y otra clase, los unos encima y los otros debajo.

Tendremos dos capas, al parecer continuas, una completamente negra y otra blanca del todo.

Admitamos ahora que se comunican al frasco movimientos repetidos. Claro es que los granillos de uno y otro color se mezclarán íntimamente, y que al cabo de algún tiempo la materia contenida en el frasco presentará un tinte gris uniforme, como si no hubiera más que una sola substancia de este color.

Aunque los movimientos continúen, la apariencia obtenida no se modificará.

Esto consiste en que los granos blancos y negros pueden mezclarse de muchísimas maneras, determinando un número inmenso de configuraciones, por decirlo de este modo; pero que entre todas ellas hay una colocación ó distribución de granillos, ó sea una configuración, más probable que todas las demás, y á esta configuración tiende el sistema cuando la agitación del frasco se prolonga.

La distribución inicial en que todos los granos negros están agrupados en una capa y todos los granos blancos en otra, tiene una probabilidad mucho menor que la configuracion, ó las configuraciones en que los granos están íntimamente mezclados; y por eso, cuando la agitación se prolonga algún tiempo los granillos de color se mezclan y continuan mezclados y la probabilidad de que estas desordenadas agitaciones los separen otra vez es infinitamente pequeña.

Mas esta conclusión á que acabamos de llegar exige ciertas condiciones previas: que entre los granos no existan acciones mutuas, que puedan contribuir á una configuración determinada y, sobre todo, que el número de granos sea muy grande.

Si el número de granos es pequeño, cuatro ó seis, por ejemplo, se observará que, si la agitación del frasco se pro-

longa, algunas veces los granos se separan en dos grupos; pero si el número de granos aumenta, la separación se presentará más de tarde en tarde.

Fijemos las ideas.

Supongamos que el número de granos negros es de 10 y de 10 el número de granos blancos.

El número total de granos será 20 y el número de permutaciones que con ellos pueden efectuarse será:

$$1.\ 2.\ 3 \ldots 20,$$

ó abreviadamente, según la notación ordinaria,

$$20\,!$$

Este será el número total de configuraciones que pueden afectar los 20 granos en una línea.

Los 10 granos blancos, considerados aparte, darán lugar á

$$1.\ 2.\ 3 \ldots 10 = 10\,!$$

configuraciones ó permutaciones.

Y asimismo los 10 granos negros aislados darán otras 10 ! configuraciones.

Combinando cada agrupación aislada de los granos blancos con cada agrupación, aislada también, de los granos negros, como si unos y otros fueran individuos distintos, tendremos $10\,! \times 10\,!$ configuraciones, en que los granos negros y los blancos están separados.

Estas son las únicas configuraciones ó distribuciones ó formas lineales favorables al caso de separación de unos y otros granos, y la probabilidad de que esto se verifique en una agitación cualquiera del frasco será la relación entre el número de casos favorables y el número de casos totales.

Es decir,

$$\frac{10! \times 10!}{20!}.$$

Y la probabilidad contraria, es decir, la de que aparezcan mezclados, será, evidentemente,

$$1 - \frac{10!\ 10!}{20!}.$$

Pero haciendo el cálculo se ve inmediatamente que el primer número es mucho menor que el segundo.

Para calcular todos estos números puede emplearse la conocida fórmula abreviada de Stirling, que da el valor de un producto de enteros sucesivos con bastante aproximación y sencillez.

Esta fórmula es:

$$1.\ 2.\ 3 \ldots x = \sqrt{2\pi}\, e^{-x}\, x^{x+\frac{1}{2}},$$

que se calcula inmediatamente por logaritmos.

Para dar al ejemplo precedente un carácter más sugestivo podemos decir: Si en cada segundo de tiempo se comunica una agitación al frasco ó se le somete á un choque, y á cada segundo corresponde una configuración distinta, el número

$$1.\ 2.\ 3 \ldots 20 = 20!\ \text{de segundos}$$

corresponderá al número de todas las configuraciones posibles; y el número

$$1.\ 2.\ 3 \ldots 10 \times 1.\ 2.\ 3 \ldots 10 = 10!\ 10! =$$

$$= \overline{10!}^{\,2}\ \text{de segundos}$$

al de las configuraciones, en que aparecen separados los granos blancos de los negros.

Si representamos por A el número de segundos, de configuraciones mezcladas, que corresponden á *una* configuración de granos separados, tendremos, evidentemente,

$$\frac{20\,!}{10\,!\;10\,!} = \frac{A}{1}.$$

Luego cada A segundos de tiempo en que los granos están mezclados corresponden á un segundo en que se separan los blancos de los negros.

Como el primer miembro calculado por la fórmula de Stirling es proximamente

$$\frac{20\,!}{10\,!\;10\,!} = 2.\ 10^{5} \text{ segundos,}$$

resulta, en definitiva, que cada $2.\ 10^{5}$ segundos, es decir, al cabo de dos días de estar golpeando el frasco cada segundo, aparecerán separados los granos de distinto color, ó sea los blancos de los negros, *una vez.*

O mejor dicho, en fórmula estadística, *una vez por cada dos días.*

Pero esto sucede cuando hay 10 granos negros y 10 granos blancos.

Si fueran 20 granos negros y 20 granos blancos, sólo al cabo de

$$\frac{40\,!}{20\,!\;20\,!} = 10^{11} \text{ segundos,}$$

ó sea al cabo de tres mil años de estar golpeando el frasco sin descanso, cada segundo una vez, aparecerían separados en dos grupos los granos de distinto color.

Y si se considerasen como granillos de dos colores las moléculas contenidas en un centímetro cúbico de gas, el número de siglos de siglos que habría que estar agitando el

frasco cada segundo para hacer la separación de siempre en dos colores sería verdaderamente inmenso.

Una verdadera eternidad.

Lo cual prueba que puede suponerse prácticamente nula la probabilidad de que esto se verifique.

Claro es, que en todo el cálculo precedente suponemos que todas las combinaciones aisladas tienen, por decirlo de este modo, igual valor, y suponemos también que no existen causas exteriores, que tiendan á producir determinadas configuraciones.

***

En los problemas que vamos á estudiar, es decir, en los gases ideales, supondremos siempre que el volumen total de las partículas, ó si se quiere, la suma de sus volúmenes, es muy pequeña en comparación del volumen total en que se agitan.

O de otro modo, que los huecos son mucho mayores que los pequeños espacios rellenos de materia en cada instante.

Y tanto más exactas serán las leyes que determinemos, y tanto más se aproximarán los gases reales al gas ideal á que hemos de aplicar nuestras teorías, cuanto más rarificados estén los gases.

***

Claro es que teóricamente se comprende una distribución permanente de velocidades distintas y que no esté sujeta á la ley estadística.

Presentemos un ejemplo:

Supongamos un espacio cerrado, para simplificar de forma cúbica y en que las paredes sean perfectamente elácticas.

Y para abreviar la explicación designemos las tres aristas

que concurren en un vértice, como los ejes ordinarios coordenados, por x, y, z.

Admitamos que se traza un número de líneas paralelas al eje de las x tan grande como se quiera. Todas serán paralelas entre sí y por lo tanto no se cortarán.

Para simplificar aún más, supongamos que se ha dividido la cara $y\ z$ en cuadrados, y que cada recta paralela al eje de las x corresponda á cada uno de los centros de estos cuadrados.

Si á lo largo de dichas rectas se mueven esferillas, que serán perfectamente elásticas, cada una con una velocidad determinada, y distintas estas velocidades unas de otras, dichas esferillas constituirán un movimiento permanente en que las velocidades serán siempre las mismas que en el instante inicial y distintas entre sí.

Cada esferilla al llegar á una de las caras del recinto se reflejará en ella y retrocederá con la misma velocidad que traía, hasta chocar con la cara opuesta en que se verificará lo mismo.

Y ya tenemos un sistema de tantas esferillas como se quiera, en que éstas se mueven siempre con la misma velocidad sobre la misma línea, sin que jamás choquen unas con otras y en que la distribución de velocidades es arbitraria.

Por una construcción análoga podemos imaginar otro sistema de rectas paralelas al eje de las y, que pasen por los intervalos de las anteriores sin cortarlas y que representen las trayectorias de otro sistema de esferillas elásticas de velocidades también arbitrarias y permanentes.

Y claro es que podemos repetir otro tanto con relación al eje de las z.

Este sistema total, compuesto de tres sistemas parciales, podrá componerse de un número inmenso de esferillas, que se reflejarán siempre sobre las paredes, volviendo sobre la misma recta normal á ellas y con la misma velocidad.

Las velocidades serán siempre las mismas, y todas ellas

serán arbitrarias. Las mismas serán las trayectorias: rectas, paralelas á los ejes, y jamás podrán chocar estas esferillas entre sí; de suerte que jamás se podrá perturbar el movimiento.

Pero éste es un caso ideal y artificioso. Que una de las paredes esté inclinada respecto á las otras ó sea curva, y una constante perturbación se introduce en el sistema.

*
* *

Cuando las partecillas están distribuídas de cualquier modo y sus velocidades son arbitrarias y sus direcciones también, los choques alteran constantemente las velocidades y sus direcciones.

Presentemos un ejemplo para fijar las ideas.

Imaginemos en un espacio cualquiera un gran número de esferillas elásticas agitándose desordenadamente, y supongamos que en un momento dado todas las velocidades son iguales á V. Pues vamos á demostrar, que esta igualdad de las velocidades no puede subsistir, y que al cabo de algún tiempo unas esferillas tendrán una velocidad superior á V y otras una velocidad inferior.

Dado el número inmenso de esferillas (que no son *puntos* materiales), y sus trayectorias en todos sentidos, lo probable es que pueda presentarse un caso como el que indica la figura 1.

Dos esferillas, A y A', han llegado á chocar. Chocan en ángulo recto en la disposición que se indica.

Supongamos que es m la masa de cada una de las esferillas y que sus velocidades son iguales á la velocidad común V.

¿Qué velocidades tendrán después del choque?

El problema es de todo punto elemental y en todos los tratados de Física se cita.

La velocidad de A en el sentido $B\ C$ no se alterará para dicha esferilla A, y la velocidad en el sentido $B'\ C'$ se puede calcular fácilmente por dos condiciones.

Por lo demás, la velocidad de A' en el sentido $B\ C$ será nula, por la simetría de las esferillas durante el choque, respecto al eje $B'\ C'$, y porque entre dichas esferillas no hay ni rozamiento ni adherencia.

Son ambas de pulimento ideal y además de elasticidad absoluta.

En estas condiciones las velocidades de las esferillas A

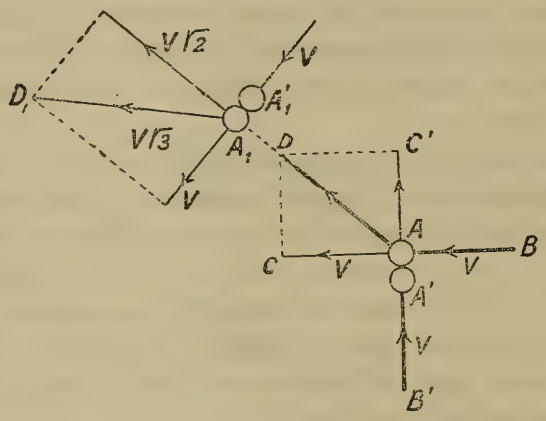


Figura 1.

y A', según la línea de los centros $B'\ C'$, se determina, como antes decíamos, por dos condiciones:

Primera. Que la suma de las fuerzas vivas sea la misma antes y después del choque.

Segunda. Que las proyecciones de las cantidades de movimiento según dicha línea sean las mismas antes de haberse verificado el choque y después.

Llamando V' la velocidad de A después del choque según $A\ C'$ y V'' la velocidad de A' en la misma dirección $A\ C'$, las dos condiciones indicadas se obtienen expre-

sando, según lo dicho, que la fuerza viva del sistema de las dos esferillas es constante y que la suma de las cantidades del movimiento también lo es.

Son dos teoremas generales de Mecánica.

La fuerza viva de cada esferilla antes del choque, puesto que la velocidad de ambas es la misma é igual á V, será:

$$m V^2 + m V^2 = 2 m V^2.$$

Después del choque la fuerza viva de la esferilla A será, evidentemente, puesto que las componentes de su velocidad son V y V',

$$m (V^2 + V'^2),$$

y análogamente la fuerza viva de la esferilla A' tendrá el valor

$$m V''^2.$$

Luego la fuerza viva total del sistema después del choque podrá expresarse de este modo:

$$m (V^2 + V'^2) + m V''^2 = m (V^2 + V'^2 + V''^2).$$

Así, la primera condición, es decir, la constancia de la fuerza viva, se escribirá de este modo:

$$2 m V^2 = m (V^2 + V'^2 + V''^2),$$

ó bien,

$$V^2 = V'^2 + V''^2. \qquad [1]$$

La segunda condición, ó sea la relativa á las cantidades de movimiento, se obtiene con la misma facilidad.

La cantidad de movimiento de la esferilla A antes del choque es nula, porque no tiene velocidad en el sentido de la línea de los centros; llega á esta línea caminando normalmente á ella.

No queda más que la cantidad de movimiento de la esferilla A', que es, evidentemente,

$$m\ V.$$

Después del choque suponemos que la esferilla A tiene, según la línea de los centros, la velocidad V', una de las incógnitas, y asimismo A' suponemos que tiene la velocidad V''.

Luego la suma de las cantidades de movimiento después del choque será:

$$m\ V' + m\ V''.$$

Y la invariabilidad de la proyección de las cantidades de movimiento sobre las líneas de los centros se expresará de este modo:

$$m\ V = m\ V' + m\ V'',$$

ó bien,

$$V = V' + V''. \qquad [2]$$

Las dos ecuaciones [1] y [2] determinan los valores de las incógnitas V' y V''.

Elevando la última al cuadrado, y restando de la primera, resulta:

$$0 = V'^2 + V''^2 - (V' + V'')^2,$$

ó bien,

$$V'\ V'' = 0:$$

una de las velocidades V' ó V'' tiene que ser igual á cero.

Pero V', es decir, la de la esferilla A, no puede ser cero, porque si lo fuese, A'' no podría seguir caminando.

Su velocidad V'' tendría que ser cero también, y es impo-

sible que á la vez V' y V'' sean cero, porque entonces la ecuación [2]

$$V = V' + V'',$$

daría $V = 0$, lo cual es contra la hipótesis.

Deberá, pues, verificarse $V'' = 0$, y en este caso tendremos en la misma ecuación [2]

$$V = V' + 0,$$

ó sea,

$$V' = V.$$

En resumen, la esferilla A' quedará inmóvil, y la esferilla A, habiendo tomado, por decirlo así, la velocidad de A', partirá con una velocidad $A\ C' = V$.

Pero en la línea $B\ C$ tenía la velocidad V, que no ha perdido; luego caminará con una velocidad

$$A\ D = \sqrt{A\ C'^2 + AC^2} = \sqrt{V^2 + V^2} = V\sqrt{2}.$$

Resulta de este análisis que el choque de las dos esferillas ha alterado sus velocidades.

La A', que tenía la velocidad V, queda inmóvil. Su velocidad ha pasado de V á cero.

La esferilla A, que no tenía más que la velocidad V, cambia de dirección y su velocidad pasa de V á $V\sqrt{2}$.

Supongamos que esto mismo se repite un momento después. Que A, al llegar á la posición A_1, recibe el choque de otra esferilla, A'_1, cuya velocidad sea también V. Es evidente, como se ve en la figura, que A'_1 quedará inmóvil y que A_1, es decir A, tendrá después del choque la velocidad

$$A_1\ D_1 = \sqrt{(V\sqrt{2})^2 + V^2} = V\sqrt{3}.$$

Todavía mayor que antes.

Y si esto se repitiera indefinidamente, indefinidamente iría aumentando la velocidad de A, pasando por

$$V\sqrt{2}, \quad V\sqrt{3} \ldots \quad V\sqrt{n}.$$

Hemos presentado este ejemplo, como hubiéramos presentado otros infinitos, en forma aun más variada, para demostrar que, aunque inicialmente todas las velocidades fueran iguales, por efecto de la agitación desordenada del flúido que constituyen estas esferillas y de la serie de choques que resultan, unas velocidades disminuyen y hasta pueden llegar á cero, y otras, en cambio, crecen y crecen; de modo que, si las esferillas son en número inmenso, tendremos toda una gradación de velocidades, desde las más grandes á las más pequeñas y en todas direcciones.

Advirtiendo que las esferillas podrán cambiar sus velocidades; de modo que la que llegó, por ejemplo, á cero, podrá pasar por grados superiores después de una sucesión de choques.

Precisamente lo que nos propondremos en las conferencias inmediatas es buscar *las leyes de orden en este desorden de una agitación desordenada.*

A la manera que en la estadística ordinaria, se buscan términos medios constantes entre variaciones de perpetua inconstancia.

Estas ideas ya las iremos precisando á medida que las conferencias avancen.

*
* *

Pero antes de seguir adelante, mejor dicho, antes de terminar esta conferencia, vamos á abrir, por decirlo así, dos paréntesis.

Los resultados que preceden nos sugieren ciertas ideas

que afectan á la ciencia modernísima y que de paso he de exponer á mis alumnos.

El primero de estos paréntesis es el siguiente:

Como se admite en Termodinámica, la temperatura de un gas está expresada por la fuerza viva de una de sus moléculas, ó mejor dicho, es proporcional á ella; así, en el ejemplo que hemos presentado, y antes de que se verifique ningún choque, el sistema tendrá una temperatura constante en toda su extensión, puesto que todas las esferillas tienen la misma fuerza viva,

$$m\,V^2,$$

y la temperatura será, representando por α un coeficiente invariable,

$$T = \alpha\, m\, V^2.$$

El gas está en equilibrio de temperatura, y según la Termodinámica, una vez establecido el equilibrio, y no actuando focos ó fuerzas exteriores, el equilibrio de temperatura debiera persistir.

Pues hemos visto que esto precisamente no sucede ni puede suceder.

El gas espontáneamente perturba las fuerzas vivas iguales, que es como decir las temperaturas, desequilibrando, en cierto modo, los valores de estas fuerzas vivas.

De aquí parece resultar que en el interior de los gases el equilibrio de temperatura más bien es un equilibrio estadístico, es decir, de términos medios, que un equilibrio absoluto.

El problema, la contradicción, la paradoja ó lo que fuere, llamó la atención de los sabios hace tiempo, y en muchas ocasiones he hablado *del diablillo travieso* de Maxwell.

Su hazaña era ésta:

Imaginemos un gas que llena un espacio cerrado.

Dividamos, ó imaginemos dividido este espacio por un tabique ideal lleno de ventanillas ideales con su compuerta de corredera cada una, manejadas todas ellas por el travieso diablillo, el cual se ejercita en la siguiente operación.

Y para fijar las ideas representemos las dos partes del espacio que el tabique divide por los números de orden 1.° y 2.°

Es decir, compartimiento 1.° y compartimiento 2.°.

Llega una esferilla del compartimiento 2.° con alta velocidad al tabique; pues el diablillo abre instantáneamente la compuerta que corresponde y la deja pasar.

Por el contrario, la esferilla que llega trae una velocidad relativamente pequeña; en este caso la compuerta permanece cerrada.

De tal modo va dando paso al compartimiento 1.° á todas las esferillas del compartimiento 2.° que tienen gran velocidad.

Análogamente cuando una esferilla del compartimiento 1.° trae pequeña velocidad, el diablillo abre la compuerta á que la esferilla se dirige y la deja pasar al compartimiento 2.°, cerrando inmediatamente la compuerta.

De esta suerte, sin consumir el diablillo trabajo alguno, irá reuniendo en un compartimiento todas las esferillas de gran fuerza viva, y en el otro compartimiento las de fuerza escasa, que es como decir que habrá creado sin consumo de fuerza ó de trabajo, y sólo con este cernido de esferillas, una caída de temperatura considerable. Pero toda caída de temperatura supone un trabajo motor disponible.

Esta es otra paradoja ú otro problema aun más curioso que el precedente.

Y me ocurre que, combinando el diablillo de Maxwell con la teoría del determinismo de Bousinescq, fundada en las integrales singulares, podría intentarse una nueva demostración de la libertad humana.

Mas éstas son lucubraciones semicientíficas, semifilosóficas que nos llevarían muy lejos.

Demos, pues, por cerrado este primer paréntesis de los dos que indiqué, y pasemos al segundo.

*
* *

Sólo con echar la vista á la figura 1.ª ocurre una serie de experiencias, que si no fueran puramente fantásticas, es decir, si pudieran realizarse, lograrían resolver experimentalmente una de las cuestiones que más se agitan en la ciencia modernísima.

Varios físicos, sobre todo el célebre Einstein en la teorí de la *relatividad,* afirma ó afirmaba (antes de publicar su teoría de la gravitación), que es imposible que en la Naturaleza exista una velocidad superior á la velocidad de la luz, que es próximamente de 300.000 kilómetros por segundo.

Pues bien, supongamos que en la figura 1.ª B' A' representa un surtidor, valga la palabra, de rayos β (ó sean rayos catódicos), desprendidos del rádium, y que A B representa otro surtidor, también de rayos β, normal al primero.

¿Qué sucederá en el punto de encuentro?

Si esta experiencia *puramente imaginaria,* que acaso sea de todo punto ilusoria, pudiera realizarse; si los electrones de los dos surtidores, en vez de cruzarse pasando unos rayos por el interior de los otros, llegaran, por el contrario, á chocar, y muchos de ellos chocaran en las condiciones que indican las esferillas A y A', tendríamos un surtidor resultante A D en que la velocidad sería mayor que la de los electrones de los surtidores A B, A' B' en la proporción de 1 á $\sqrt{2}$.

Y como esto puede repetirse indefinidamente haciendo chocar este surtidor *normalmente* por otro tercero, tendríamos un surtidor ó rayo resultante cuya velocidad habría aumentado, respecto á la velocidad primitiva, en la relación de 1 á $\sqrt{3}$.

Así, admitiendo la posibilidad de estas experiencias, suponiendo que pasan de la región de los sueños á la región de las realidades, podemos aumentar sin límites las velocidades de los electrones.

Pero la velocidad de los electrones del rayo β en el rádium es muy comparable á la velocidad de la luz de 300.000 kilómetros por segundo; luego á ser posible todo esto que como pura fantasía vamos consignando, bien pronto obtendríamos velocidades superiores á la velocidad de la luz.

O no las obtendríamos y tal vez variasen según otra ley distinta de la que la teoría clásica indica, lo cual sería una comprobación de la nueva cinemática, que el ilustre Einstein propone, distinta de la cinemática clásica y de la que ésta no es más que un caso particular para velocidades mucho menores que la velocidad de la luz.

Hemos dejado volar la imaginación en el final de esta conferencia.

Descendamos de aquellas peligrosas aunque atractivas regiones, tomemos tierra y continuemos en la conferencia próxima la teoría cinemática de los gases, que es el programa de este curso.

III.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte.)

Por José Echegaray.

Conferencia tercera.

Señores:

La hipótesis que supone, que todo gas está formado por un número enorme de átomos, moléculas ó partecillas en continua agitación, chocando á cada instante unas partículas con otras ó con las paredes del espacio en que están encerradas, resulta que fué debida á Bernouilli, y se formuló á mediados del siglo XVIII.

Aparece aquí, pues, la teoría de la discontinuidad substituyéndose á la teoría de la continuidad.

Los gases no están ya formados, como esta última hipótesis admite, por un flúido continuo, sino por partes discontinuas y separadas, tan separadas que los huecos, por decirlo de este modo, son mucho mayores que el volumen que constituyen las partículas mismas.

Varios físicos y matemáticos adoptaron esta idea, entre otros el eminente Clausius, que en ella imprimió el sello de su ingenio y de su talento.

Aun es justo citar á otros, como Koening, y figuran en primer término el admirable profesor Clerk Maxwuell en Inglaterra, y en Alemania el célebre doctor Ludwig Boltzmann.

La obra de este último, titulada *Lecciones sobre la teoría de los gases,* es una obra ya clásica, que constantemente se consulta y se cita, y á ella tendremos que referirnos muchas veces en las conferencias de este curso.

Pero es una obra de gran extensión, y con la amplitud que yo doy á mis explicaciones, procurando hacerlas accesibles á mis alumnos, necesitaría emplear en su exposición dos ó tres cursos; y esta clase y el programa que para ella he adoptado, ó mejor dicho, la serie de programas que voy siguiendo, ponen freno á mi voluntad y me sujetan á límites más modestos.

Por dicha razón voy á tomar por guía en las conferencias de este año la obra elemental de Watson en su segunda edición, que es del año 1893.

Dada la rapidez vertiginosa con que el mundo científico camina, no faltará quien diga que es ya dicha obra algo anticuada.

Pero yo no lo creo así.

Para mi objeto, y para los límites en que he de encerrar la teoría cinemática de los gases, el libro del profesor inglés tiene todas las cualidades que pudieran apetecerse.

Es muy breve; su extensión no pasa de 90 páginas; es claro y métodico, y si pudieran hacerse observaciones á varios puntos de este libro, no se olvide que toda la teoría que vamos á estudiar está sujeta á crítica, que puede ser más ó menos severa.

En todo caso, queda como primera autoridad y obra de consulta la del profesor Boltzmann, que antes hemos citado.

Y una vez más debo repetir lo que tantas veces he dicho.

Mi objeto en estas conferencias y en los diferentes tomos que las reproducen, no es presentar sobre ninguna de las ramas de la Física Matemática una exposición completa, sino facilitar, por medio de mis explicaciones, esta empresa, es decir, la de abarcar la ciencia en toda su extensión y en toda su profundidad, á aquellos de mis alumnos ó de mis lectores que tengan afición y ánimo para acometerla.

De cada teoría, de cada rama de la Física Matemática, tanto clásica como moderna, presento las bases fundamentales, y el conjunto de todos estos trabajos será así como una

enciclopedia elemental de esta ciencia, que hoy se extiende indefinidamente, rechazando ante sí todo límite.

Marco el punto de partida, acompaño en las primeras jornadas, y nada más.

Y á fe que me parece bastante. Después, que cada cual se detenga ó siga ó retroceda buscando pasto científico más de su agrado.

*
* *

Y entremos ya en materia.

Esta materia la vamos á dividir en *capítulos*, que por sus condiciones especiales recibirán el nombre de *ejemplos*.

Ya diré más adelante por qué, advirtiendo desde ahora que esta palabra *ejemplos* no afecta á la generalidad de la teoría; marca tan sólo una marcha gradual, que avanza de lo más sencillo á lo más complicado.

Ejemplo primero.—Imaginemos que en un espacio, que por el pronto no digo si es limitado ó indefinido, y si está ó no cerrado por límites fijos, aunque puede suponerse que está cerrado por paredes elásticas.

En este espacio se agita un número enorme, millones y millones si es preciso, de esferillas de una elasticidad perfecta.

Todas ellas iguales, es decir, de igual masa y de igual volumen.

Y el volumen que ocupan es muy pequeño en comparación del volumen en que se agitan; y por eso, para fijar más los términos del problema, podemos suponer, como acabamos de indicar, *que el espacio está limitado* por paredes elásticas.

Estas esferillas, de masa m cada una de ellas, se agitan

desordenadamente, con velocidades desiguales, en todos sentidos y chocando unas con otras.

No están sujetas en su movimiento á ninguna *fuerza exterior.*

De suerte que, entre choque y choque, su movimiento es rectilíneo y uniforme.

Al chocar cada dos, se modificarán, como en otra conferencia demostramos, sus velocidades y también la dirección de estas velocidades.

Suponemos además, que los choques son *instantáneos,* y que por lo tanto no existe probabilidad apreciable de que tres ó más esferas choquen á la vez unas con otras.

No admitimos, pues, más que *choques de dos esferas á la vez,* y esto simplifica los problemas: excluímos el choque de *tres esferas,* unas con otras, en un instante dado.

Por último, y esto es lo fundamental y constituye en cierto modo el problema á que se refiere este ejemplo, suponemos que el sistema de esferillas, que vamos á considerar, *ha llegado á un estado permanente.*

Expliquemos bien esta palabra *permanente.*

Supongamos que en un momento dado, cuando ya se ha establecido el régimen, las esferillas a_1, en número N_1, tienen todas ellas la velocidad V_1; las esferillas a_2 tienen la velocidad V_2, siendo su número N_2, y así sucesivamente.

Podremos, condensando esto, formar el siguiente cuadro:

Esferillas.	Número de esferillas.	Velocidad de cada una.
a_1	N_1	V_1
a_2	N_2	V_2
a_3	N_3	V_3
⋮	⋮	⋮

Pues diremos que se ha establecido un régimen permanente cuando en todos los instantes se pueden formar cuadros en que las dos últimas columnas sean idénticas á las del cuadro anterior, ó sea:

Esferillas.	Número de esferillas.	Velocidad de cada una.
a'_1.....	N_1	V_1
a'_2.....	N_2	V_2
a'_3.....	N_3	V_3
⋮	⋮	⋮

Es decir, que hay como antes N_1 esferillas con la velocidad V_1; N_2 con la velocidad V_2, y así sucesivamente, aunque las eferillas a'_1 sean individualmente distintas de las a_1, las a'_2 distintas también de las a_2, y así de las demás.

Es una permanencia ó una normalidad estadística; no es una normalidad, por decirlo de este modo, individual.

Y claro es que esta normalidad se debe suponer que es matemática para los razonamientos y las fórmulas, aunque en la realidad de los hechos pueda haber pequeñas desviaciones relativas á un lado y otro de los números rigorosos.

Para nuestras demostraciones prescindimos de estas irregularidades accidentales y suponemos sistemas y estados ideales.

Y el problema ahora se plantea en estos términos: ¿Cuál deberá ser la distribución de las velocidades para que los choques no alteren dicho estado normal y permanente?

Procuremos resolver el problema con todo el rigor y toda la claridad posibles, dada su naturaleza.

*
* *

Vamos á determinar, ante todo, una fórmula que determine el número de esferillas que tengan una velocidad tal, que las componentes de dicha velocidad, paralelas á tres ejes coordenados trirrectangulares, estén comprendidas entre

u y $u + \partial u$ paralelamente al eje de las x;
v y $v + \partial v$ paralelamente al eje de las y;
w y $w + \partial w$ paralelamente al eje de las z.

La naturaleza del problema exige que pongamos límites u, $u + \partial u$, etc., en vez de poner cantidades únicas u, v, w. Más adelante comprenderemos por qué.

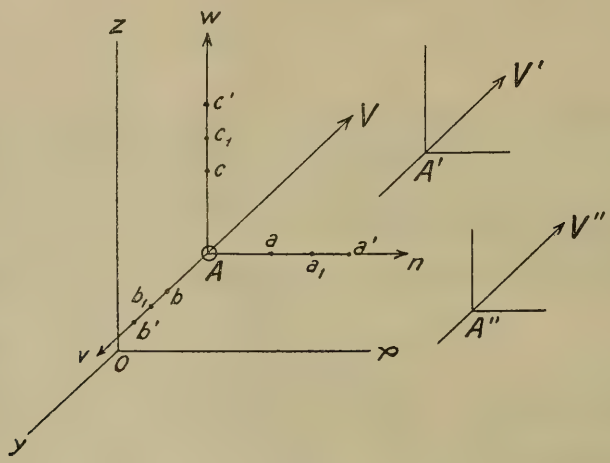


Figura 6

Representemos esto, para más claridad, en la figura 6.

O_x, O_y, O_z son los tres ejes del sistema; A, A', A''... tas esferillas que se agitan desordenadamente en el espacio á que están ligados los ejes coordenados.

Suponemos que las paredes de dicho espacio ó no existen ó están tan lejos que no perturban excepcionalmente la agitación de las esferillas A', A'', A'''... ó que por ser elásticas sustituyen á las esferillas indefinidas del espacio.

Consideremos la esferilla A y supongamos que su velocidad es V.

Sobre la recta $A\,a'$, paralela al eje de las x, consideremos una longitud $A\,a = u$, y á continuación una longitud $a\,a'$ sumamente pequeña, que, como si fuera una diferencial, la representamos por $\partial\,u$.

Es decir,

$$Aa = u;\ aa' = \partial u, \text{ y por lo tanto, } Aa' = u + \partial u.$$

Repitamos esto mismo para las rectas $A\,b'$, paralela al eje de las y, y para $A\,c$, paralela al eje de las z, y tendremos:

$$Ab = v, \quad bb' = \partial v, \quad Ab' = v + \partial v;$$
$$Ac = w, \quad cc' = \partial w, \quad Ac' = w + \partial w.$$

Admitamos ahora que las tres componentes de $A\,V$ son

$$Aa_1, \quad Ab_1, \quad Ac_1.$$

Es decir, que la proyección del extremo de V sobre x cae precisamente en a_1, que está entre a y a', esto respecto al eje paralelo á las x; en b, entre b y b', respecto al eje paralelo á las y; y en c_1, ó sea entre c y c', sobre el eje paralelo á las z.

Esto nos demuestra que el extremo de V, en el espacio de tres dimensiones, no podrá salir de ciertos límites.

Construyendo un paralelepípedo infinitamente pequeño que parta del punto cuyas coordenadas son a, b, c, y cuyas aristas paralelas á los ejes sean

$$aa' = \partial u, \quad bb' = \partial v, \quad cc' = \partial w,$$

evidentemente dentro de este paralelepípedo caerá la extremidad de la recta $A\,V$.

Si repetimos cuanto acabamos de decir para todas las esferillas respecto á las cuales se verifican estas condiciones, por ejemplo V', V''..., relativas á A', A'', tendremos el conjunto de todas las esferillas y de todas las velocidades, cuyas componentes caen entre los límites

$$u,\ u + \partial u;$$
$$v,\ v + \partial v;$$
$$w,\ w + \partial w.$$

Claro es que estas esferillas estarán situadas en diferentes puntos del espacio y para todos ellos tendríamos que repetir la misma figura que hemos construído para el punto A, repitiendo las magnitudes $Aa\ Aa'$, $Ab\ Ab'$, $Ac\ Ac'$, que en esto todas las figuras serían idénticas.

Lo que variaría de una figura á otra sería la posición de los puntos a_1, b_1, c_1, porque V, V', V''... ni tienen la misma magnitud rigorosa ni tienen la misma dirección, aunque las extremidades de estas velocidades caerán forzosamente dentro del paralelepípedo respectivo.

Y perdóneseme que insista en estas pequeñeces; porque luego hemos de llegar á razonamientos un tanto sútiles y quiero evitar dudas y confusiones á mis alumnos.

Para obtener una fórmula que nos de el número de las velocidades V', V''..., que cumplen con las condiciones establecidas, *vamos á reunir todas estas figuras en una sola*, haciendo que coincidan los vértices A, A', A''... de todos estos triedros trirrectangulares y de todos los paralelepípedos elementales que vayamos construyendo.

De este modo habremos formado un manojo de velocidades, arrancando de A, cuyas componentes estarán comprendidas entre $u + \partial u$, $v + \partial v$ y $w + \partial w$.

Antes, las velocidades estaban esparcidas como estaban esparcidas las esferillas; ahora las reunimos en un haz y vamos á formar lo que pudiéramos llamar un *diagrama* de

velocidades que cumplirán con las condiciones tantas veces repetidas.

Hemos representado este diagrama de velocidades en la figura 7.

O es un punto cualquiera del espacio.

O u v w es el triedro de las componentes de las velocida-

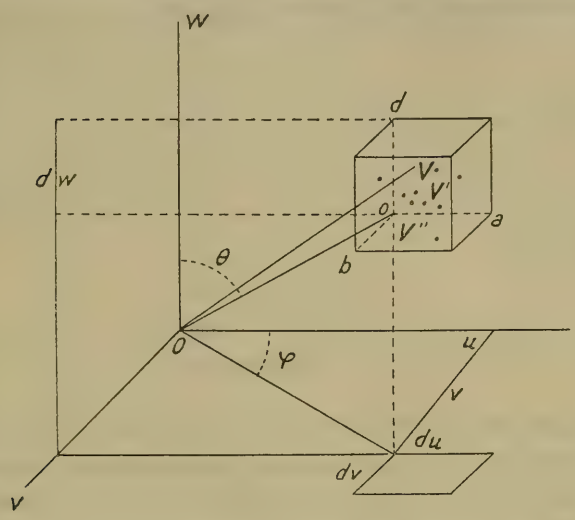


Figura 7

des. Por decirlo así, el triedro en que coinciden todos los triedros *A*, *A'*, *A''*... de la figura 6.

Del punto *O* partirán una serie de rectas *O V*, *O V'*, *O V''*..., que serán las de la figura 6 cuando coinciden los puntos *A*, *A'*, *A''*...

Construímos en la figura 7 un paralelepípedo sumamente pequeño, *o a b d*, que tiene por vértice principal *o*, cuyas coordenadas son *u*, *v*, *w*, y que tiene por aristas ∂u, ∂v, ∂w.

Es claro, según lo que antes hemos explicado, que todas las extremidades de las rectas *O V*, *O V'*, *O V''*, de las que para simplificar la figura no hemos trazado más que la primera, estarán comprendidas en el interior de dicho paralelepípedo.

Este se verá sembrado, por decirlo así, en su interior, de un número enorme de puntos V, V', V''...

Tantos puntos habrá en el interior del paralelepípedo como rectas $O\,V$, $O\,V'$, $O\,V''$... existen representando todas las velocidades de las diferentes esferillas A, A', A''..., que en la figura 6, es decir, en el gas que consideramos, tienen componentes comprendidas entre

$$u \text{ y } u + \partial u;$$
$$v \text{ y } v + \partial v;$$
$$w \text{ y } w + \partial w.$$

Si para abreviar representamos este número simbólicamente por

$$N_1 \left| \begin{matrix} u, & u + \partial u \\ v, & v + \partial v \\ w, & w + \partial w \end{matrix} \right|$$

ó aún con mayor brevedad, por N_1, podemos decir que N_1 es *el número* de rectas de la figura 6, que hemos representado por $A\,V$, $A'\,V'$, $A''\,V''$... en la figura 6, y por las rectas que van de o al interior del paralelepípedo, en la figura 7.

Nos proponemos obtener una fórmula que exprese el número N_1.

Dicho número N_1 será igual por lo tanto al número de puntos que hemos fijado en el interior del paralelepípedo al formar manojo de velocidades $o\,V$, $o\,V'$...

Así diremos abreviadamente:

$$N_1 = \text{número de puntos en el interior de } O\,a\,b\,d.$$

Si cada uno de estos puntos fuese una masa, cuyo valor podemos suponer que es 1, aunque de volumen muy pequeño, claro es que la masa total del paralelepípedo sería el número total N_1; porque sería, evidentemente,

$$N_1 = 1 + 1 + 1 \ldots$$

Claro es también, que todos estos puntos V, V', V''... de masa 1 no podemos saber á priori cómo están distribuídos en el interior del paralelepípedo. Unos podrán estar muy cerca, hasta podrán confundirse de modo que habrá puntos que representen no una masa 1, sino una masa 2 ó 3 ó más.

Pero esta masa la podemos representar como se hace en mecánica, suponiendo una densidad media que designaremos por la letra griega χ, y multiplicando dicha densidad media por el volumen.

Ahora bien; el volumen es el producto de las tres aristas del paralelepípedo; de suerte que tendremos, para el número N_1 de velocidades,

$$N_1 = \chi \, . \, \partial u \, \partial v \, \partial w.$$

Y ésta es una primera expresión del número de velocidades cuyas componentes están comprendidas en los límites indicados:

$$u, \; u + \partial u; \quad v, \; v + \partial v; \quad w, \; w + \partial w.$$

Mas esta densidad χ dependerá de la posición del punto o, ó sea del vértice del paralelepípedo $o\,a\,b\,c$. Otras velocidades que tuvieran otros limites para sus componentes darían otro paralelepípedo y otra distribución de puntos y otra densidad media de estos puntos.

De manera que podemos considerar á χ como una función de u, v, w, coordenadas de o, y podemos especificar más la fórmula precedente de este modo:

$$N_1 = \chi \, (u, \, v, \, w) \, \partial u \, \partial v \, \partial w.$$

Si hiciéramos lo mismo para todas las velocidades, y calculáramos para cada haz de éstas su paralelepípedo, se comprende desde luego, que todo el espacio de la figura 7 correspondiente al diagrama, quedaría dividido en paralele-

pípedos elementales, é integrando resultaría un número igual al de todas las velocidades ó al de todas las esferillas; si lo designáramos por N, hallaríamos:

$$N = \int \chi(u, v, w)\, \partial u\, \partial v\, \partial w.$$

Lo que hay es que todavía no conocemos la forma de la función χ ni al pronto adivinamos cómo podrá determinarse.

Esta determinación es uno de los esfuerzos más sutiles de esta parte de la Ciencia.

Se puede determinar acudiendo al cálculo de probabilidades, ó también procurando expresar la condición, por las leyes mecánicas, de que el *estado del sistema sea permanente.*

Este método es el que vamos á seguir, porque es el que nos parece más sugestivo y es el que sigue Watson en su pequeño, pero interesante folleto.

*
* *

Antes de seguir séanme permitidas algunas observaciones.

Estamos empleando paralelepípedos infinitamente pequeños, como el $o\,a\,b\,c$, ó al menos damos á entender que son infinitamente pequeños.

Estamos hablando de diferenciales de las componentes de la velocidad, y aun las representamos por las notaciones del método diferencial; así escribimos ∂u, ∂v, ∂w.

Acabamos de hablar de una integral, y por una integral hemos expresado el número total de esferillas comprendidas en la región que ocupan los paralelepípedos elementales.

Pero *nada de esto es exacto*, y en rigor, este lenguaje es incorrecto; todo ello será cuando más *aproximado.*

Si las esferillas son muy pequeñas y el espacio entre unas y otras muy grande en comparación con el volumen de dichas esferillas, los paralelepípedos elementales podrán ser muy pequeños, pero no infinitamente pequeños.

El sistema será evidentemente discontinuo y la aplicación del cálculo diferencial supone la continuidad absoluta; pero el lenguaje diferencial es cómodo, y nuestras expresiones, aunque no sean rigurosas, son aproximadas, á la manera que el área de una curva es rigurosamente igual en el límite á la suma de un gran número de rectángulos sumamente estrechos formados por las ordenadas.

De todas maneras, aproximadamente puede admitirse la fórmula que da el área, como fórmula que expresa la suma de los rectángulos.

Realmente pudiera intentarse el pasar de la discontinuidad á la continuidad disminuyendo el radio de las esferillas y los espacios intermedios á la vez según determinadas leyes; pero esto nos llevaría muy lejos, y debemos limitarnos á los métodos y á las expresiones comúnmente empleadas.

*
* *

Volvamos á la fórmula:

$$N_1 = \chi\,(u, v, w)\,\partial u\,\partial v\,\partial w.$$

Cambiemos de coordenada, substituyendo á u, v, w las coordenadas polares, que ya conocemos por haberlas empleado en otras muchas conferencias de años anteriores.

Definiremos un punto cualquiera m por su distancia al origen, que llamaremos c (fig. 8).

Por el ángulo polar $m\,O\,o$, que llamaremos θ, y por el ángulo φ, que forma, con el plano de las $u\,w$, el que pasa por $m\,O\,o$, y sabemos, que en esta transformación de coordenadas se tiene:

$$u = c \operatorname{sen} \theta \cos \varphi;$$
$$v = c \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi;$$
$$w = c \cos \theta.$$

En vez del paralelepípedo $a\,b\,d$ de la figura 7 consideraremos, como hacemos siempre, en coordenadas polares, el sólido $m\,n\,p\,q$, $m'\,n'\,p'\,q'$ (fig. 8), formado por una base $m\,n\,p\,q$, trazada sobre la esfera de radio c, cuyo centro está en O, y limitada dicha base por dos arcos de meridiano, $m\,n$, $p\,q$, y dos paralelos, $m\,q$, $n\,p$. La altura de este sólido, que próximamente es también un paralelepípedo,

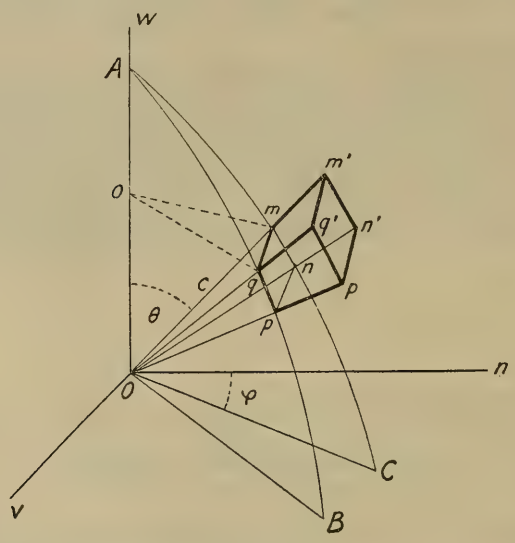


Figura 8

será $m\,m'$, y la cara exterior estará formada por una esfera de radio $c + \partial c$.

Al paralelepípedo primitivo substituiremos éste, según hemos dicho, y su volumen será:

$$mq \cdot qp \cdot mm' = c \operatorname{sen} \theta \cdot \partial\varphi \cdot c\partial\theta \cdot \partial c =$$
$$= c^2 \operatorname{sen} \theta\, \partial\varphi\, \partial\theta\, \partial c.$$

Por consideraciones análogas á las que ya hemos explicado antes, podremos substituir este sólido al paralelepípe-

do $\partial x . \partial y . \partial z$, y el valor del número N_1 podrá escribirse de este modo:

$$N_1 = \chi (u, v, w) c^2 \operatorname{sen} \theta \, \partial\varphi \, \partial\theta \, \partial c.$$

La expresión $\chi (u, v, w)$, á la cual hemos dado el nombre de *densidad de las velocidades*, á primera vista depende de u, v, w; pero como suponemos que las esferillas están distribuídas estadísticamente en forma uniforme, es claro que dicha función sólo dependerá de c y no de sus componentes u, v, w, porque en cualquier dirección que se elija, por esta uniformidad estadística del sistema, la densidad de las velocidades debe ser idéntica.

De suerte que podremos escribir $\chi (c)$ en vez de $\chi (u, v, w)$, y el valor de N_1 dependerá de una sola variable c.

Tendremos, pues,

$$N_1 = \chi (c) c^2 \operatorname{sen} \theta \, \partial\varphi \, \partial\theta \, \partial c.$$

En resumen; según los casos, y según más convenga, podremos escribir N_1 bajo estas tres formas:

$$N_1 = \chi (u, v, w) \, \partial u \, \partial v \, \partial w;$$
$$N_1 = \chi (c) \, \partial u \, \partial v \, \partial w;$$
$$N_1 = \chi (c) c^2 \operatorname{sen} \theta \, \partial\varphi \, \partial\theta \, \partial c.$$

La segunda es la que más emplearemos por ahora, porque es la que expresa con más claridad las condiciones del problema.

A saber: que N_1, ó sea el número de esferillas que tienen la velocidad c, y cuyas componentes están comprendidas entre

$$u \text{ y } u + \partial u,$$
$$v \text{ y } v + \partial v,$$
$$w \text{ y } w + \partial w,$$

se expresa por el producto del volumen del paralelepípe-

do $\partial u . \partial v . \partial w$ y de la densidad de velocidades, que sólo depende del valor de c.

Claro es, que si conociésemos la naturaleza de la función χ, integrando sobre toda la esfera en que insiste la base *mnpq*, con relación á θ entre o y π, y á φ entre o y 2π, tendríamos el número de todas las esferillas cuya velocidad está comprendida entre c y $c + \partial c$.

En el diagrama este número sería el de esferillas de la capa esférica comprendida entre las dos esferas de radio c y $c + \partial c$.

***

Procuremos ahora determinar la forma de la función $\chi(c)$.

Para ello vamos á aplicar el siguiente principio:

Que para conservar la permanencia estadística, todos los choques, que se verifican en cualquier instante, no deben alterar la distribución de las velocidades.

Siempre el número de velocidades de valor c debe estar expresado por el número N_1, ó sea por la fórmula que lo representa.

Es en el fondo algo parecido al problema de análisis que consiste en demostrar, que una función es invariante cuando se cambia el sistema de coordenadas.

O mejor dicho, es algo así como el problema inverso: Partir de la invariabilidad estadística del sistema para determinar la forma de la función $\chi(c)$.

Lo difícil en el problema es apreciar las circunstancias de los choques, porque aquí el problema aparece con una gran confusión.

Para ello, es decir, para vencer esta dificultad, vamos á considerar dos haces de velocidades análogos al que antes hemos considerado, es decir:

1.° Esferillas cuyas velocidades no son iguales, pero se

aproximan á serlo, como que todas ellas tienen sus componentes comprendidas:

las paralelas al eje de las x, entre ..... u y $u + \partial u$;
las paralelas al eje de las y, entre ..... v y $v + \partial v$;
las paralelas al eje de las z, entre ..... w y $w + \partial w$.

Estas velocidades en el diagrama que les correspondiese formarían un haz cónico, ó si se quiere, piramidad que, partiendo de o, vendría á concluir en el paralelepípedo $du\,dv\,dw$.

2.° Consideraremos asimismo otro conjunto de esferillas cuyas velocidades formen, en el mismo instante que las anteriores, otro haz en el diagrama que les correspondiese, análogo al anterior pero de distintos valores para las componentes, es decir,

que las componentes paralelas al eje
de las x están comprendidas entre. ..... u_1 y $u_1 + \partial u_1$;
las paralelas al eje de las y, entre.... ..... v_1 y $v_1 + \partial v_1$,
y las paralelas al eje de las z, entre... ..... w_1 y $w_1 + \partial w_1$.

Este segundo conjunto de esferillas sería tal, que sus velocidades en el diagrama que les es propio, partiendo del centro, terminarían en el paralelepípedo infinitamente pequeño cuyo volumen es $\partial u_1\, \partial v_1\, \partial w_1$.

3.° A los dos grupos de esferillas que hemos considerado, y que para claridad en la explicación designaremos con los nombres

Primer grupo de velocidad media V,

y

Segundo grupo de velocidad media V_1,

además de las condiciones indicadas la someteremos á otra nueva, á saber: que la distancia entre el centro de una esfe-

rilla del primer grupo y el centro de otra esferilla del segundo, ha de ser tal, que sus componentes paralelas á los ejes han de estar comprendidas entre

$$x \quad \text{y} \quad x + \partial x,$$
$$y \ldots\ldots y + \partial y,$$
$$z \ldots\ldots z + \partial z.$$

Con estas tres condiciones vamos á formar pares de velo-

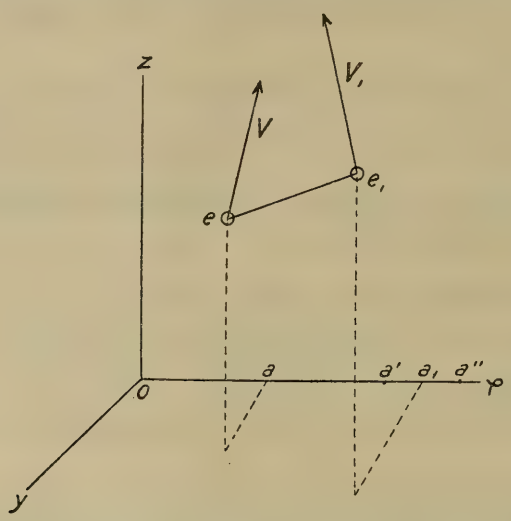


Figura 9

cidades, tomando una esferilla en el primer grupo, otra en el segundo, pero de modo que cumplan con la tercera condición.

Expliquemos esto mismo en la figura 9.

Sean dos esferillas e, e_1.

La primera, e, pertenece al *primer grupo*, al de velocidad media V; la segunda, e_1, pertenece al *segundo grupo*, al de velocidad media V_1, y además, si proyectamos $e\,e_1$ sobre el eje de las x, la proyección $a\,a_1$ estará comprendida entre $a\,a' = x$ y $a\,a'' = x + d\,x$.

Una cosa análoga podríamos repetir para las proyecciones de los centros e, e_1 sobre el eje de las y y sobre el eje de las z.

Y advertimos muy especialmente, para evitar confusiones, que la x no expresa una coordenada ni se cuenta por lo tanto desde el origen O, sino que representa la componente de $e\,e_1$ paralela al eje de las x.

Consideraciones análogas deberíamos hacer respecto á y y á z, que no son coordenadas ni se cuentan desde el origen O, sino que son las componentes, como acabamos de expresar, de la distancia $e\,e_1$ sobre los ejes de las y y de las z.

Comprendido esto, consideraremos *pares de esferillas*, ó pares de velocidades mejor dicho: una en el primer grupo, otra en el segundo, cumpliendo todos estos pares con la condición de la figura 9.

El número de velocidades del primer grupo, es decir, que cumplen con estas condiciones, á saber, que las tres componentes están entre

$$\begin{array}{ll} u & u + \partial u, \\ v & v + \partial v, \\ w \text{ y } & w + \partial w, \end{array}$$

hemos demostrado antes que está dado por la siguiente fórmula:

$$\chi\,(c)\,\partial u\,\partial v\,\partial w.$$

Asimismo el número de velocidades del segundo grupo estará expresado por

$$\chi\,(c_1)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1;$$

y como se toma una velocidad del primer grupo y otra del segundo para formar cada par, el número total de pares será evidentemente el producto de ambos números, ó sea

cada velocidad del uno con todas las velocidades del otro.

Y tendremos:

Número de pares de velocidades de los grupos (1) y (2)...

$$[\chi(c)\,\partial u\,\partial v\,\partial w]\,[\chi(c_1)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1] =$$
$$= \chi(c)\,\chi(c_1)\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1.$$

Este es, en efecto, el número total de pares; pero hay muchos de ellos que no tomaremos en consideración; sólo servirán aquellos que cumplan con la condición que expresa la figura 9, es decir, que las componentes de la distancia de los centros de las esferillas que corresponden á ambas velocidades estén comprendidas entre

$$x,\ x + \partial x,$$
$$y,\ y + \partial y,$$

y por fin,

$$z,\ z + \partial z.$$

Estos serán los pares útiles; los demás los desecharemos.

Y el problema que vamos á resolver es éste:

Determinar el número de *pares útiles*, que será una fracción del número total de pares.

El autor inglés que nos sirve de guía establece desde luego esta fórmula:

$$\chi(c)\,\chi(c_1)\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial x\,\partial y\,\partial z;$$

es decir, que multiplica el número anterior por $\partial x\,\partial y\,\partial z$, ó sea por el paralelepípedo que correspondería al diagrama de las líneas de los centros, que es una generalización de la figura 7.

Pero no dice que éste sea el número de pares útiles, sino que es una cantidad *proporcional* á este número.

Creemos que para los principiantes esto es un tanto vago, y vamos á fijar las ideas.

***

Mas el desarrollo y aun el complemento de la demostración quedan para la conferencia próxima, y terminaremos la de hoy con una observación que aclare el sentido de cuanto hemos dicho y de lo que nos queda por decir respecto á este punto.

En los grupos *primero* y *segundo* de esferillas, ó de velocidades, hemos considerado una esferilla del primer grupo y otra del segundo.

Sujetando este par á la condición de que las componentes de la línea de los centros han de estar comprendidas entre

$$x,\ x+\partial x,$$
$$y,\ y+\partial y,$$
$$z,\ z+\partial z.$$

Y nada hemos advertido respecto á la distancia entre los centros cuyas componentes en el límite inferior son x, y, z.

Más adelante supondremos que esta distancia va disminuyendo y llega á ser la suma de los radios, con lo cual se prevé, desde luego, que las esferillas chocarán en un tiempo infinitamente pequeño dt.

Así habremos obtenido en el interior del gas una serie de choques, y buscaremos después las condiciones analíticas necesarias para que tales choques no alteren el estado permanente del sistema.

Tal será, por decirlo de este modo, la idea directriz de lo que hemos de exponer en la conferencia inmediata.

IV.—Las relaciones modulares en los cráneos de España.

Nota presentada en Mayo de 1915

POR LUIS DE HOYOS SÁINZ.

El equivocado concepto de buscar métodos fáciles para la investigación, no ha tenido tanta aplicación en ninguna ciencia histórico-natural como en Antropología, por lo cual, ésta ha extendido sus trabajos de un modo que pudiéramos llamar periferíco, perdiendo en intensidad y vigor científico lo que aparentemente ganó en amplitud de sus conquistas. La fecundidad de los métodos difíciles, como afirma Cajal, no ha sido apenas utilizada en el estudio de las formas y magnitudes somáticas del hombre, y, sobre todo, pretendíase, aplicando sólo las relaciones directas más sencillas y elementales de la matemática, hallar la clave de las relaciones naturales más complejas.

Al terminar, con el Sr. Aranzadi, los largos estudios de laboratorio de los cráneos españoles de las colecciones de la Facultad de Medicina, formada por el catedrático que fué de la misma, el Dr. Olóriz (1), y la del Museo Antropológico Nacional—a cargo del profesor Sr. Antón—, nos hallamos que la aplicación de los índices y relaciones comúnmente empleados no resolvía muchos puntos oscuros que en la distribución racial de España se presentaban; así, el

(1) Después de la muerte del eximio maestro no nos ha sido posible disponer, para terminar el estudio de algunos detalles complementarios, de la valiosa colección que tan liberalmente estuvo a disposición nuestra en los varios años que duró el trabajo de laboratorio, merced a la generosidad y espíritu científico del profesor Olóriz y del decano de la Facultad, señor conde de Calleja. De esperar es que, vencidas las dificultades de instalación, vuelva a servir para la investigación de la Antropología española la insustituíble colección.

gran grupo dolicocéfalo no era homogéneo y las dos zonas braquicéfalas tampoco tenían iguales caracteres: Había, pues, mediante otras relaciones, que buscar en la métrica la confirmación y aclaración de lo que aparecía en la morfología.

Mediante el empleo de índices tenidos como secundarios, llegamos, por ejemplo, a poder dar, con el trabajo presentado en Granada (1), una primer separación de la dolico-hipsicefalia del E. y SE. y de la braquicefalia cantábrica y extremeña; así, en el mapa que acompaña al trabajo, obtuvimos ya por el índice vértico-transversal, una segunda aproximación, pero no solucionaba varios puntos de la arquitectura cefálica de los españoles, y hubimos de pensar en otro método que, relacionando las tres principales dimensiones de la calavera, nos permitiera *una comparación simultánea* de las mismas, independizando cada una de ellas de la acción aislada ó conjunta de las otras dos.

En el trabajo presentado (2) al Congreso de Ginebra, en 1912, apuntamos—página 465—la aplicación que habíamos entonces iniciado de las por nosotros llamadas relaciones modulares; es decir: la establecida entre un diámetro y el total de los diámetros craneales, para liberar, por ejemplo, el concepto de altura o desarrollo del diámetro vertical basio-bregmático, de la dolico o braquicefalia, siendo no una mera expresión alterada o atenuada del índice cefálico, sino estrictamente de las relaciones de altura del cráneo.

Puede hacerse esta comparación simultánea en un individuo o en un grupo provincial de ellos, siendo en todo caso la relación que se establece entre un diámetro craneal y el total de los tres a que hemos llamado, en su forma de pro-

---

(1) HOYOS SÁINZ Y ARANZADI: *Unidades y constantes de la Crânia hispánica.* Asociación Española para el progreso de las Ciencias. Tomo de *Ciencias Naturales* del Congreso de Granada.

(2) HOYOS SÁINZ: *Caractéres généraux de la «Crania Hispanica».* Compte Rendu de la XIVme session du Congrés International d'Anthropologie et d'Archeologie Prehistoriques.

medio, *módulo* craneal de cada ejemplar, utilizándole en primer término para el concepto global del tamaño, ya que es, según la simplicación de la conocida fórmula de Schmidt: $\frac{\text{Long.} + \text{lat.} + \text{alt.}}{3}$ o $\frac{D.\,\text{ant} - \text{post} + D.\,\text{trans} + D.\,\text{vertical}}{3}$.

Para obtener las relaciones modulares, como la del diámetro vertical $(\overline{D.\,V})$ al módulo (M), se emplea la fórmula

$$\frac{\overline{D.\,V}}{M},$$

y por ser $M = \frac{1}{3}\,(\overline{D.\,V} + \overline{D.\,AP} + \overline{D.\,T})$, es por abreviar $\frac{3\,\overline{D.\,V}}{\overline{D.\,AP} + \overline{D.\,T} + \overline{D.\,V}}$, y, análogamente, para las otras, que son la transversal modular y la longitudinal modular.

Si se trata de obtener la relación promedia de un grupo provincial, debería tomarse el promedio de las relaciones individuales obtenidas por el procedimiento anterior; pero la gran cantidad de tiempo que esto exige aconseja tomar como relación provincial, no el promedio de las individuales, sino el promedio de los diámetros homólogos y el promedio de los módulos. Así la relación vertical modular será en este caso:

$$\frac{\Sigma\,\overline{D.\,V}}{\Sigma\,M} = \frac{3\,\Sigma\,\overline{D.\,V}}{\Sigma\,\overline{D.\,V} + \Sigma\,\overline{D.\,T} + \Sigma\,\overline{D.\,AP}},$$

que es la que hemos utilizado nosotros en este ensayo de aplicación del método.

Este método es sobre todo útil para los diámetros vertical y transversal, pues para el antero-posterior es menos analítico, por ser el valor absoluto de éste, mayor que el tercio de la suma de los tres diámetros, o sea el módulo. Operan-

do así, se ve y anula la influencia de los otros dos diámetros sobre el que se obtiene la relación modular, dándonos, por ejemplo, la verdadera noción de su altura independientemente de su longitud y anchura.

Las tres relaciones nos dan los conceptos; por la longitud antero-posterior, de *largo* y *corto;* por el diámetro transverso máximo, de *ancho* o *estrecho,* y por el vertical basio-bregmático, de *alto* y *bajo.*

Por fin, combinando cada relación con las otras dos, aparecen los valores métricos condensadores de las expresiones morfológicas posibles, que son solamente las seis siguientes: bajos, estrechos y largos; bajos, anchos y cortos; bajos, anchos y largos; altos, estrechos y cortos; altos, estrechos y largos, y altos, anchos y cortos.

Las dos combinaciones ternarias que faltan para las ocho que matemáticamente son posibles, no dan relaciones morfológicas, sino meramente métricas ó de tamaño, pues la de altos, anchos y largos daría los megalocranios o macrocranios, y los bajos, estrechos y cortos, la nano o microcrania.

Valores absolutos — La primera consideración de los valores absolutos de los diámetros, permite ya establecer un boceto de la distribución geográfica de los caracteres métricos de las calaveras españolas, pero no da idea alguna de las relaciones morfológicas. En el cuadro I van colocadas las provincias por regiones, que pudiéramos llamar étnicas ó antropológicas, conservando en general sus relaciones geográfico-históricas y anotados los valores medios provinciales de los tres diámetros craneales y el módulo, ó sea, el tercio de la suma de los mismos diámetros que nos da una cifra representativa de su volumen; en las columnas de valores las cifras gruesas corresponden á los valores máximos, y las bastardillas, á los mínimos de las series provinciales.

I.—Valores en mm. de los diámetros craneales.

Hombres

	Antero posterior.	Transverso.	Vertical.	Módulo.
Coruña	184	142	130,5	152
Lugo	183	**145**	132	153
Orense	185,5	139,5	134,5	153
Pontevedra	183,5	139	*126*	151
Oviedo	183	**144**	133	153
Santander	182,5	141	131	151
León	**188,5**	*135,5*	*129,5*	153
Salamanca	184,5	138,5	*128*	151,5
Zamora	183	138	132	151
Toledo	182	139,5	132,5	152
Ciudad Real	*181,5*	140	135	153
Cáceres	*180*	139,5	133,5	152
Badajoz	183	*136*	**136**	153
Palencia	*181,5*	139,5	131	*150,5*
Valladolid	182	140	130	151
Segovia	184	139	131	151
Burgos	185	*136*	131	151
Avila	185,5	140,5	132,5	153
Soria	184	*136*	134	151,5
Logroño	182,5	138	*127,5*	*149*
Guadalajara	184,5	141	134,5	153,5
Cuenca	185	138	133	152,5
Madrid	184,5	139	130	151,5
Sevilla	**189**	137,5	135,5	**154**
Cádiz	187,5	139,5	**136,5**	**154,5**
Málaga	**192**	**147**	130	**156**
Córdoba	185	137	**139**	**154**
Granada	185	138,5	**136**	153
Jaén	185	138	134	152,5
Almería	*180*	*134*	134	*150*
Albacete	187	139	133,5	153
Murcia	185,5	138,5	**136**	153,5
Alicante	183	138	**137,5**	**154**
Valencia	183	141	**136**	**154**
Castellón	*179*	*134*	135	*149*
Tarragona	187,5	145,5	**138,5**	**155**
Huesca	**194**	140	**136**	**155**
Zaragoza	183	*136*	132	*150*
Teruel	**188**	139	134	**154**
Navarra	*181*	140	133	151
Guipúzcoa	185,5	**143**	131	153
Vizcaya	187	**143**	131	**154**
Alava	*180*	139	130	*148*

Valores absolutos de los diametros.

Hombres:

Antero-posterior _ Corto y Largo.
Transverso - Ancho y Estrecho.
Vertical - Alto T y Bajo.
Tamaño o modulo - Grande y pequeño.

Con dichas cifras separadas en los tres grupos de máximas medias y mínimas que corresponden a los tamaños de medidas grandes, medianas y pequeñas, se ha dibujado el mapa núm. 1, colocando en cada provincia las letras iniciales de cráneos *Cortos* o *Largos* para el diámetro antero-posterior; las de *Anchos* o *Estrechos* para el transverso máximo, y la *T* en representación de *Alto* y la de *Bajo* para el vertical, que ya se dijo corresponde al diámetro *basio-bregmático*. De igual modo, la *g* señala las calaveras de mayor tamaño o módulo, y la *p* las de pequeñas cifras en esta relación. No es preciso indicar que sólo se colocan las letras características en cada provincia, es decir, cuando ésta figura en el tercio máximo ó mínimo, para acusar las provincias típicas, que lo son realmente cuando llevan la indicación de los tres caracteres, y especialmente, cuando convergen hacia los dos tipos craneales, que son: los esferoides, cortos, anchos y bajos, y los elipsoides, largos, estrechos y altos, esquemáticamente representativos aquéllos de las razas del Norte, cantábricas, supuestas célticas ó europeas y éstos de las del S. y E. y mejor del nudo montañoso del centro Este, consideradas ibéricas ó africanas.

El *diámetro antero-posterior* (1) tiene una variación extensa de 15 mm. entre los 194 de Huesca y los 179 de Castellón; pero la división, a partir de dicha cifra, sólo incluye a Málaga con 192, que es, a su vez, el límite para fijar con el tercio de la variación las provincias realmente dolicoides, que sólo son Sevilla, León y Teruel; por lo cual, tomando a la primera de éstas, que lo es de la serie continua, como límite extremo y con las cuatro unidades del tercio superior, quedan con valores superiores á 186 mm. las cita-

---

(1) Las figuras 1 y 2, y las correspondientes á las fotografías 12 y 35, en los hombres, y 9 y 25, en las mujeres, dan exacta idea de las cifras absolutas de longitud craneal.

das, más Cádiz, Albacete, Alicante, Tarragona y Vizcaya.

Por el límite inferior aparece Castellón con 179, y á partir de ella, con valores hasta 182, inclusive, Almería, Toledo,

1.—Fot. 1.—[Fotografías de las otras normas 2, 3 y 4] [1].

♂ Lugo. San Adrián de Lorenzana.—41 años; n.º 1.637. Fac. Med.—D. AP. 173; D. V. 131; I. V. L. 75,8; R. ML. 114,5; R. MV. 86,7. *Cráneo corto.*

---

[1] En todas las figuras, los números entre paréntesis [ ] son los correspondientes a las otras normas o proyecciones de la misma calavera. Las abreviaturas de las medidas y relaciones son: D. AP., Diámetro antero-posterior; D. T., Diámetro transverso máximo; D. V., Diámetro vertical; I. C., Indice cefálico horizontal; I. VL., Indice vértico-longitudinal; I. VT., Indice vértico-transversal; R. ML., Relación modular longitudinal; R. MV., Relación modular vertical, y R MT., Relación modular transversal.

Ciudad Real y Cáceres, en el centro, y Alava, Navarra, Logroño y Palencia al N. (fig. 1 y 2).

Los cráneos femeninos, largos, aparecen en Guipúzcoa, Coruña y Lérida con 179 mm., más otras provincias, con

2.—Fot. 29.—[30 y 31].

♂ **Jaén.** Villanueva del Arzobispo. — 7. Mus. Ant.. — D. AP. 186; D. V. 136; I. VL. 73,1; R. ML. 124; R. MV. 90,7. *Cráneo largo.*

valores próximos, todas ellas situadas por el N., cosa extraña con el tipo craneal braquicéfalo, pero explicada por el tamaño que acusa una virilización y superioridad de medidas en la mujer septentrional.

Los cráneos cortos tienen en Cádiz el mínimo de 170 mm.,

á que se aproximan varias provincias de Levante y parte Sur de Castilla la Vieja.

El *diámetro transverso* varía de 134 en Castellón á 147 en Málaga, confirmando a las dos provincias como representación de la nano y megalocrania, pero dando la impresión de ser el valor de Málaga muy extremo y corresponder

3.—Fot. 3.—[1, 2 y 4].
♂ **Lugo.** San Adrián de Lorenzana.—41 años; n.º 1.637. D. V. 131; D. T. 149; I. V T. 87,9; R. M V. 86,7; R. M T. 98,8. *Cráneo ancho.*

a Lugo con 145 el máximo normal de la anchura, pues con el tercio de la variación, a partir de su cifra, se forma el grupo de Oviedo, Coruña, Santander, Guipúzcoa, Vizcaya, al Norte, y Guadalajara y Valencia, como aisladas en el centro y Este (1).

(1) Completan la representación gráfica de estas medidas las fo-

Los cráneos estrechos inician aquí su aparición con valores inferiores á 138 en el reino de León y en el de Murcia, con todas sus limítrofes, más Sevilla y Córdoba, en la cuenca del Guadalquivir, y Zaragoza, Logroño, Soria y Burgos, en la del Ebro.

4.—Fot. 24.

♂ **Alicante.** Elche.—53 años; n.º 1.491. Fac. Med.—D. V. 138; D. T. 134; I. VT. 103; R. MV. 89; R. MT. 86,8. *Cráneo estrecho.*

Las mujeres repiten también el carácter del anterior con la misma amplitud de la variación que los hombres y las mismas provincias extremas de Castellón y Lugo, acusán-

---

tografías 14 y 33, de cráneos altos, y 11 y 19, como bajos. Son típicos, como estrechos, y anchos, respectivamente, los de las fotografías 35 y 22 y dan verdadera idea de los cráneos anchos las figuras 7 y 8 en las normas anterior é inferior.

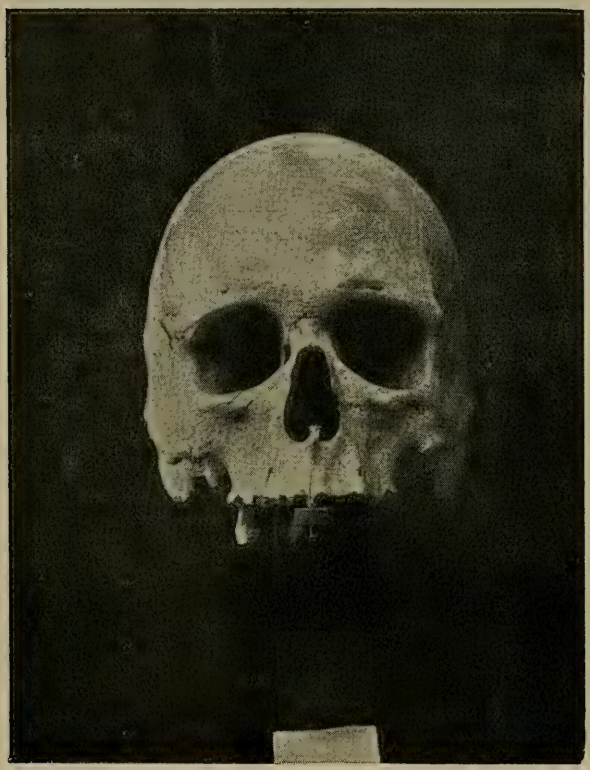
dose más la anchura femenina del N. que los caracteres de otras regiones.

La *altura del cráneo*, medida por el diámetro vertical, tiene la misma oscilación de 13 mm. en los hombres, que su

5.—Fot. 30.—[29 y 31].
♂ **Jaén.** Villanueva del Arzobispo.—Mus. Ant.—D. T. 128; D. V. 136; I. VT. 106,3; R. MV. 90,7; R. MT. 85,3. *Cráneo alto.*

anchura; y como el valor total es menor, su aplicación diferencial es mayor y más útil. La homogeneidad de su distribución hace que con el tercio de la variación aparezcan como de cráneo alto 12 provincias, todas del litoral levanti-

no y de la cuenca del Guadiana, en oposición absoluta á los cráneos bajos que, desde los 126 mm. de Pontevedra, suben hasta 131, incluyendo 15 provincias, todas las del litoral cantábrico y varias de Castilla la Vieja; fuera de cuya región sólo hay la excepción de Málaga y Madrid.



6.—Fot. 31 [29 y 30].
♂ **Jaén.** Villanueva del Arzobispo. — Mus. Ant. — D. T. 128; D. V. 136; I. V T. 106,3; R. M V. 90,7; R. M T. 85,3. *Cráneo alto.*

El cráneo femenino reduce algo su variación en altura, quedando entre los 132 de Murcia y los 123 de Logroño, Vizcaya y Alava, más Lugo y Cádiz, acusando la hipsicefa-

lia de la cordillera ibérica y sus terminaciones al SE. y SO., pero atenuando la platicefalia de N. y O., como si estos caracteres hubiéranse internado desde los litorales con la mujer, persistiendo en ellos con los hombres.

El *módulo* que expresa el tamaño sustituye, según se dijo,

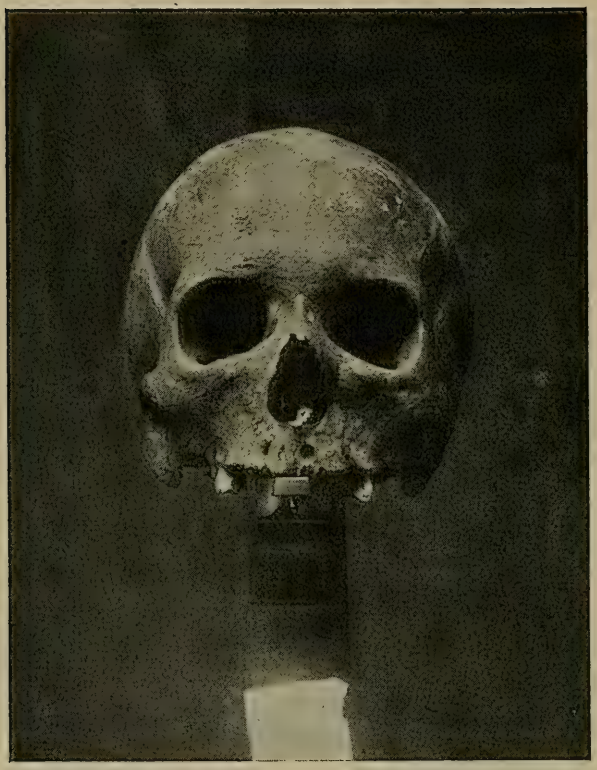
7.—Fot. 4.—[1, 2 y 3].

♂ **Lugo.** San Adrián de Lorenzana.—41 años; n.º 1.637. Fac. Med.—D. T. 149; R. MT. 98,8.
Cráneo ancho.

a los dos modos de relación que no representan forma ni proporciones, y que son; las de los cráneos altos, anchos y largos que forman la macro ó megalocrania, y bajos, estrechos y cortos, la micro ó nanocrania.

Aparentemente su variación es pequeña, pues no pasa de las ocho unidades que en los hombres da la diferencia

de 149 en Castellón y Logroño, á 156 en Málaga, y sólo da margen para separar como grandes con valores de 155 y 154 a Tarragona, Valencia y Alicante, de un lado; y Cádiz, Sevilla y Córdoba que se unen a Málaga de otro, y Vizcaya,



8.—Fot. 8.—[5, 6 y 7].

♀ **Santander.** Cabuérniga, Sopeña. — B. Mus. Ant.—D. T. 137; D. V. 120; I. V T. 89,3; R. M T. 96,4. *Cráneo bajo y ancho.*

al N.; pues utilizando la cifra inferior suben ya a 20 las provincias, destacando una zona cantábrica y ampliando la andaluza.

El tercio de los cráneos pequeños se agrupa en los valo-

res de 149, 150 y 151, cuyos focos son: Castilla la Vieja y la zona riojano-navarra-aragonesa.

Es típica la gráfica obtenida colocando los valores masculinos por encima y los femeninos por debajo del eje de las *X*, pues se distribuyen formando un rectángulo alargado cuya diagonal es el citado eje, y que dividida en tercios, tienen común los valores mínimos masculinos y máximos femeninos en las cifras de 147 a 150.

Los máximos femeninos que corresponden a la zona vasco-cántabra, son de 148, y los mínimos que bajan a 141 en Cádiz, son menos continuos y se dan en Levante y Andalucía, confirmando la mayor exageración de lo femenino al S. y SE., y la inversa, que se citó al Norte.

Indices cefálicos.—La segunda aproximación para clasificar y repartir geográficamente los cráneos españoles la tenemos en la consideración de los índices o relaciones centesimales de sus tres diámetros, tomados dos a dos, y que representados principalmente por la relación del diámetro transverso al antero-posterior máximo da el *índice cefálico;* dato casi el único hasta hace años para caracterizar y separar razas y tipos, pero que las mayores exigencias del análisis antropológico ha reducido a su justo valor de mero croquis y orientación para las distinciones, pero no de carácter exclusivo para las mismas, que exigen la utilización de muchas relaciones y caracteres para que, conjuntamente tomadas en consideración, nos acerquen al método natural que sustituya a todos y a cada uno de los sistemas unitarios de diagnóstico etnogénico.

Prescindiendo, como en todos los datos de la presente nota, de las variaciones individuales, y limitándonos a los valores medios provinciales, vemos que la amplitud de oscilación de este índice, que era de 6,7 unidades con la sola colección de la Facultad de Medicina de Madrid, formada por el Dr. Olóriz, sube al agregar la del Museo Antropológico Nacional a 7,1, que es poco más de la mitad de la ha-

llada por el citado profesor en 1894 con su *Distribución geográfica del Indice cefalométrico en España,* y algo más reducida que la determinada por nosotros en 1892 en el *Avance a la Antropología de España,* pues al sumar los valores de las dos series redúcese lo particular de cada

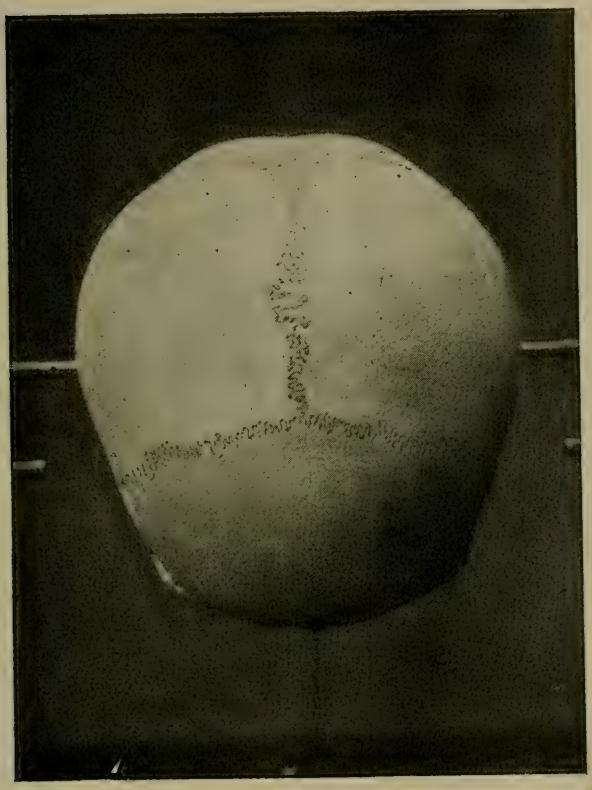
9.—Fot. 2.—[1, 3 y 4].

♂ **Lugo.** San Adrián de Lorenzana.—41 años; número 1.637. Fac. Med.—D. A P. 173; D. T. 149; I. C. 86,1; R. M L. 114,5; R. M T. 98,8. *Braquicéfalo.*

una y resultan términos medios más limitados y concretos.

En los hombres, como puede verse en el cuadro II y en el mapa de la distribución de los índices, que señalan con L y C la dolico y braquicefalia, la cifra máxima, correspondiente a la braquicefalia extrema en la península, se da con 79,2 en Lugo, siguiendo con 78,8 Oviedo y 77,5 Cáce-

res, representando precisamente los focos de las dos regiones cantábrica y extremeña de este tipo craneal. Como típicos damos los cráneos masculino de Lugo y femenino de



10,—Fot. 10.—[9 y 11].

♀ **Oviedo.** Belmonte.—42 años; núm. 230. Fac. Med.—D. AP. 164; D. T. 150; I. C. 91,9; R. ML. 112,8: R. MT. 103,2. *Braquicéfalo.*

Oviedo (figuras 9 y 10), á los que por su braquicefalia pueden añadirse el de Talavera (fot. 10) y los de Santander.

El opuesto extremo de la dolicocefalia la representan igualmente con 72,1 Huesca, con 72,5 Sevilla y con 73,3

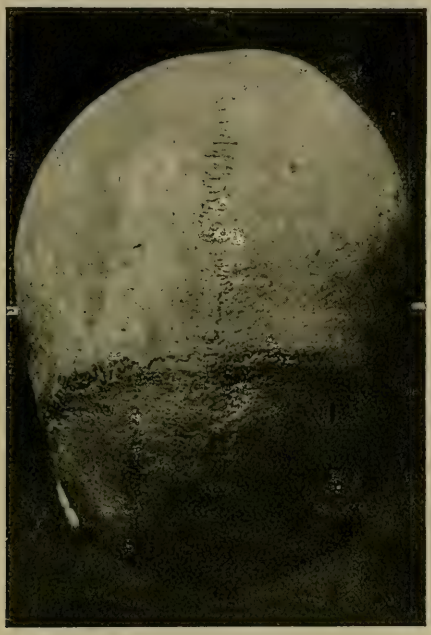
II.—Valores medios provinciales de los índices craneales.

Hombres

	Cefálico.	Vértico Longitudinal.	Vértico Transversal.
Coruña	*77,4*	70,9	*91,6*
Lugo	**79,2**	71,9	*90,8*
Orense	75,3	72,4	96,3
Pontevedra	75,8	*70,2*	92,6
Oviedo	**78,8**	72,8	92,4
Santander	77,2	71,7	*92,5*
León	75,3	*69,2*	*91,7*
Salamanca	75	*70*	93,3
Zamora	75,4	72,5	96,1
Toledo	76,6	72,7	**95,2**
Ciudad Real	77,1	74,3	96,3
Cáceres	**77,5**	74,1	95,6
Badajoz	76,6	74,3	97
Palencia	77	72,4	94
Valladolid	76,6	71	92,7
Segovia	75,8	71,5	94,4
Burgos	*73,7*	70,8	96,1
Avila	75,8	71,3	94
Soria	74,3	72	**98,5**
Logroño	75,6	*69,6*	92,3
Guadalajara	76,2	73,1	95,9
Cuenca	74,6	72,5	96,7
Madrid	76,5	70,4	93,2
Sevilla	*72,5*	71,7	**98,8**
Cádiz	74,5	72,8	97,6
Málaga	76,8	*67,9*	*88,4*
Córdoba	74,1	**75,1**	**101,5**
Granada	75	73,6	97,6
Jaén	74,5	73,2	97,3
Almería	74,9	**75,4**	**100,9**
Albacete	**73,9**	71,5	96,6
Murcia	74,8	73,4	**98,2**
Alicante	*73,7*	73,4	**99,5**
Valencia	76,9	**74,5**	96,9
Castellón	75,2	**75,4**	**100,2**
Tarragona	74,7	74,3	**98,6**
Huesca	*72,1*	**70**	97,4
Zaragoza	74,5	**74,5**	97,3
Teruel	74,2	71,4	96,2
Navarra	77,3	73,2	94,7
Guipúzcoa	77	70,5	*91,6*
Vizcaya	76,3	**70,3**	92,2
Alava	75	72,2	96,3

Alicante y Burgos, que son también núcleos de los tipos dolicoides o largos de Andalucía, Levante y Aragón, que sube por el Ebro hasta Burgos: Representan estos cráneos, además de las figuras 11 y 12, los de Elche femenino y Jaén masculino.

El valor medio provincial total es de 75,6, que correspon-



11.—Fot. 28.
♂ **Soria.** Osma. — 36 años; n.º 582. Fac. Med.— D. AP. 186; D. T. 139; I. C. 74,7; R. ML. 122, 9; R. MT. 91, 8. *Dolicocéfalo.*

de objetivamente a Madrid y Logroño, y por cima del cual hay 18, y por bajo 21 de las 41 provincias computadas, afirmando la mayor tendencia dolicocéfala de los cráneos de España.

Las mujeres acusan más su braquicefalia sexual en el Norte, pero siguen bien acentuados los caracteres étnicos doli-

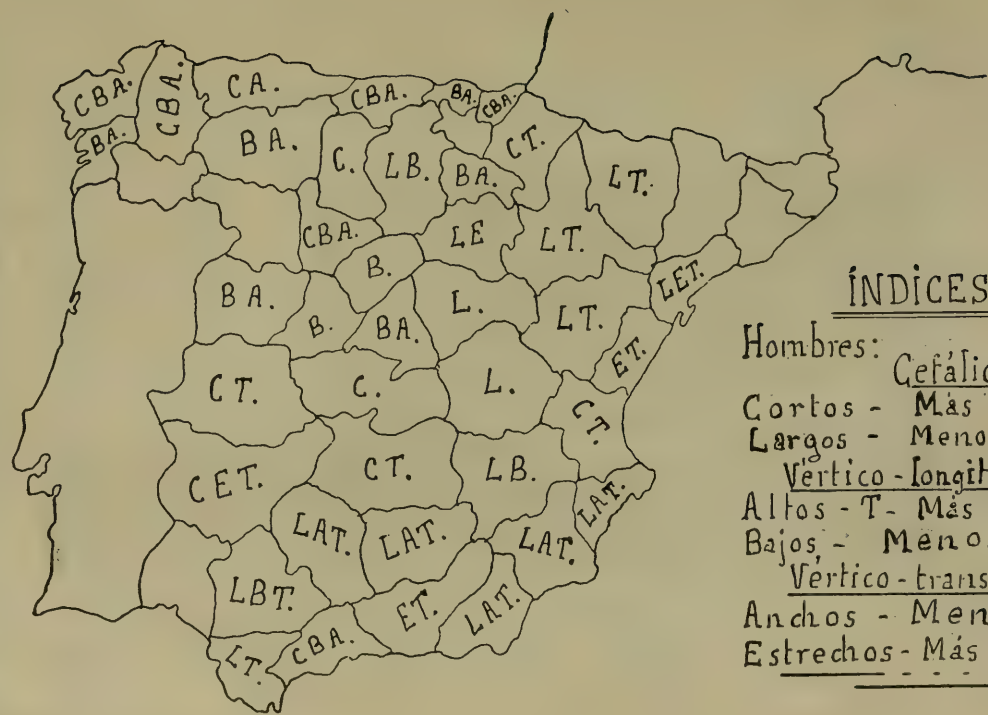
cocéfalos en la región aragonesa y levantina, especialmente del SE., siendo únicamente de notar la inclusión de Zamora en este tipo.

En la segunda columna del cuadro que comprende los valores del *índice vértico-longitudinal* se ve que, desde 67,9 en Málaga a 75,4 en Almería y Castellón, las provincias se re-

12.—Fot. 36.—[35 y 37].

♂ **Toledo.** Miguel Esteban. — 65 años; número 1.140. Fac. Med.—D. AP. 199; D. T. 133; I. C. 66,3; R. ML. 128; R. MT. 85,6. *Dolicocéfalo.*

parten con una oscilación de 75 décimas, permitiendo establecer bien los grupos extremos y medio, constituído el de los valores y por tanto calaveras altas, por las valencianas y aragonesas, más Tarragona alrededor de Castellón; y las de Córdoba y Extremadura, subiendo por las cuencas del Guadiana y Tajo. Las fotografías 20 y 35 dan idea de los valores mínimos de este índice, así como la 12 de los máximos.



ÍNDICES.

Hombres:

Cefálicos.

Cortos - Más de 76'6.
Largos - Menos de 75.

Vértico-longitudinal.

Altos - T - Más de 72.
Bajos - Menos de 72.

Vértico-transversal.

Anchos - Menos de 94.
Estrechos - Más de 96.

Confirmando lo hallado con lo sola colección Olóriz y escrito en la página 19 del trabajo publicado con el Sr. Aranzadi en el tomo del Congreso de Granada de la *Asociación Española para el progreso de las Ciencias,* UNIDADES y CONSTANTES DE LA CRANIA HISPANICA, la distribución de este carácter en los cráneos femeninos es aún más característica y fija, acentuando la mayor altura craneal en Aragón y provincias de las serranías centrales, Levante y Andalucía, bajando, por el contrario, en las zonas del Norte litoral y vascongadas.

Más típico y utilizable es aún el *índice vértico-transversal* (1), por lo que en el citado trabajo de 1911 en el Congreso de Granada publicamos el mapa de su distribución, que hoy se aclara y confirma al añadir los datos de los 800 cráneos del Museo Antropológico. Así vemos que puede utilizarse una gran amplitud de variación, que llega á 131 décimas si tomamos los 88,4 de Málaga, como límite inferior, pero que aun desechado este valor como esporádico, quedan todavía 107, fijando el mínimo en los 90,8 de Lugo y el máximo en los 101,5 de Córdoba; que la división se hace en tres zonas bien marcadas, pues la diagonal que separaba los cráneos por sus valores absolutos se desdobla y convierte en faja, que va de NE. á SO., limitada al NO, por la línea Navarra Cáceres, y al SE., por la de Lérida á Huelva, como puede verse en el mapa por las provincias señaladas con las letras A. y E.

A Córdoba sigue Almería y Castellón, con cifras superiores á 100, es decir, con cráneos más altos que anchos, á lo que casi llegan Alicante, Murcia, Sevilla y Tarragona, persistiendo, atenuada, esta enorme hipsicefalia, ó más bien leptocefalia, en las otras provincias litorales y del Sur, y

(1) Los índices extremos de los cráneos aquí reproducidos son máximos, el de Miguel Esteban con 101,5, el hombre de Elche con 103 y el de Osma con 100; y mínimos el femenino de Oviedo con 81,3 y el masculino de Lugo con 87,9.

repitiéndose en la región aragonesa, sobre todo en Soria.

La anchura máxima, que baja a un índice de 90,8 en los hombres de Lugo, irradia de allí por ambos lados del litoral, sin exceptuar una provincia, e incluye en este carácter a León, Valladolid y Salamanca, de donde no baja por ese

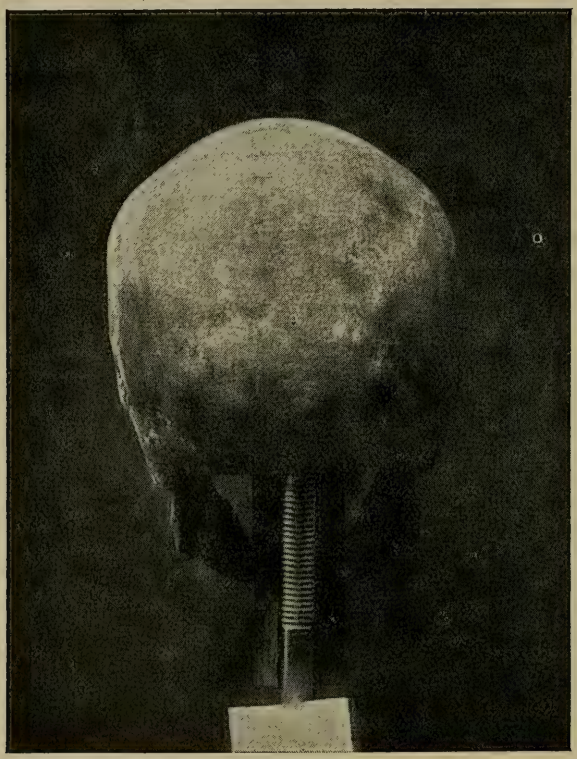
13.—Fot. 22.—[20, 21 y 23].

♀ **Navarra.** Roncal.—D. T. 137; D. V. 122; I. VT. 89; R. MT. 93,4; R. MV. 83,1. *Platicefalia.*

lado, así como de Logroño por la cuenca del Ebro, estableciendo una brusca transición a los leptocéfalos de Soria y Aragón.

El examen de las gráficas, formadas con los índices vértico-transversales, refuerza categóricamente lo que venimos diciendo, y prueba de su valor analítico se tiene en la región

gallega, donde se hace patente la intrusión de un elemento de cabeza estrecha, que aparece como esporádico, con un valor máximo completamente independiente de la marcha general de la curva; así aparece también el grupo provincial



14.—Fot. 33.—[32 y 34].
♂ **Tarragona.** Vilarrodona.—2. Mus. Ant.—D. T. 141; D. V. 136; I. VT. 96,5; R. MT.; 91,6 R. MV. 88,3. *Hipsicefalia.*

de Madrid, Cuenca y Guadalajara, como una región de transición de elementos fundidos en las mujeres con una cúspide en el índice de 95, que es precisamente un mínimo en la de los hombres, que disocian los máximos en los valores de 92 y 98.

Comparando los cuadros I y II, y mejor aún los mapas, que como boceto representan la distribución de los tres diámetros y de los tres índices, se ve la mejora y fijeza del reparto hecho con los índices o relaciones sobre el realizado con los valores absolutos, que tiene la irregularidad y anarquía del dato como valor absoluto, más probatorio de tamaño que de la forma y relación.

No la mera confirmación, sino la ampliación al tercero de los índices que completan la característica del cráneo en sus tres dimensiones, se ve, por ejemplo, en las provincias gallegas y asturo-cántabras, que aparecen sólo con una relación común y otra variable, pero que al utilizar los índices cierran con la tercera el carácter de cráneos cortos, anchos y bajos que las une á todas, segregando de ellas precisamente a Orense, que no da ese tipo cefálico, y haciendo notar el carácter mixto de Pontevedra.

La oposición de largos en Vizcaya y cortos en Guipúzcoa que dan los diámetros, desaparece en los índices, y en esta zona rectifícase la primera característica de Navarra y Logroño, indudablemente inexacta.

En León se acusa su verdadero aspecto de cráneos anchos, que por el valor absoluto da lo contrario, de igual modo que en Salamanca: En Extremadura se confirma la limitación de una región braqui-hipsicéfala, y en Castilla se destaca la parte Norte, o mejor llana, que en Valladolid principalmente repite atenuado el tipo cefálico de Cantabria, y en Burgos y Soria acusa parentesco con Aragón y el litoral levantino.

Por fin, Toledo y Ciudad Real aclaran su braquicefalia de tipo extremeño, y las provincias valencianas confirman su altura, pero no su carácter de cráneos cortos, debido sólo a los valores reducidos del cráneo en total, sino su verdadero carácter alargado y dolicocéfalo.

Relaciones modulares.

De las tres indicadas relaciones modulares, aparece la primera la que se establece con el diámetro antero-posterior máximo o longitud del cráneo; por lo cual, puede llamarse RELACIÓN LONGITUDINAL-MODULAR.

Es de todas la que *a priori* puede considerarse como menos interesante, por ser el valor del diámetro, de 179 a 192 milímetros en los hombres, mayor que el tercio del módulo desde 149 a 156 y, por tanto, muy limitada la variación y bastante homógenea. Pero en este ensayo de investigación analítica, no debe prescindirse de su empleo, para en todo caso comprobar la hipótesis de su menor utilidad diferencial.

De los cuadros III y IV, correspondientes a esta relación en hombres y mujeres, obtenemos las características sintéticas, que son las siguientes:

♂ Máx. 123,8, Huesca, a mín. 119 , Oviedo.
♀ » 122,6, León, a » 117,8, Córdoba.

Oscilación total en décimas, 60.. { Masculina... 48.
Femenina.... 48.

Valor común a los dos sexos: de 119 a 122,6 = 36.
Exceso: del máximo masculino, 12; del mínimo femenino, 12.

Marcadas en el cuadro la cifra medida que corresponde a Zamora con 121,4, y los límetes de los tercios inferior 120,6 y superior, 122,2, se ve que los cráneos que son por esta relación largos llegan a presentarse en sólo ocho provincias, y preciso es completar el grupo con las otras siete, aunque bajen al mismo valor que el grupo medio, indudablemente por la gran separación y aislamiento del valor de Huesca, que pasa 11 unidades de la serie continua. Análogamente, sumando al mínimo el tercio de la diferencia, se obtiene el límite de los cráneos cortos, en serie continua.

III.—Relación longitudinal modular.

Hombres

Cráneos largos: dolicocéfalos....	123.8	Huesca.
	.	
	.	
	122.7	Burgos.
	.6	Málaga.
	.5	
	4	León, Salamanca.
	.3	Albacete, Logroño.
	.2	Teruel.
	.1	
	122.0	
	121.9	Alicante, Sevilla.
	.8	
	.7	Vizcaya.
	.6	Soria.
	.5	Zaragoza.
	.4	*Guipúzcoa,* Valladolid.
	.3	Pontevedra, Segovia.
	.2	Orense.
	.1	Avila, Guadalajara.
	121.4	*Zamora.*
	120.9	Palencia.
	.8	Murcia, Santander.
	.7	Coruña.
	.6	Tarragona.
	.5	Madrid.
Cráneos cortos: braquicéfalos.....	.4	Alava, *Cuenca,* Toledo, Córdoba, Cádiz.
	.3	
	.2	
	.1	
	120.0	Badajoz, Ciudad Real.
	119.9	Granada.
	.8	Almería.
	.7	Castellón.
	.6	Navarra.
	.5	Lugo.
	.4	Valencia.
	.3	
	.2	Cáceres.
	.1	
	119.0	Oviedo.

IV.—Relación longitudinal modular.

Mujeres

Cráneos largos: dolicocéfalos.....	122.6	Lérida.
	.5	
	4	
	.3	
	.2	Zamora.
	.1	Alava.
	122.0	Vizcaya.
	121.9	Logroño.
	.8	
	.7	Avila, Segovia, Valencia.
	6	Alicante.
	.5	Albacete.
	.4	
	3	Granada
	.2	Guipúzcoa, Castellón.
	.1	Orense, *Pontevedra.*
	121 0	Madrid, Navarra.
	120.9	Burgos, Almería.
	.8	
	.7	Palencia.
	.6	Coruña.
	.5	Cádiz, *Murcia*, Zaragoza.
	.4	Málaga, Valladolid.
	.3	
	.*2*	Ciudad Real, Guadalajara.
	.1	
	120.0	Cáceres, León, *Salamanca*, Soria.
Cráneos cortos: braquicéfalos.....	119.9	Huelva, Huesca, Lugo.
	.8	Sevilla.
	.7	Jaén, Badajoz, Toledo.
	.6	
	.5	Cuenca, Santander.
	.*4*	Tarragona, Teruel.
	.3	
	.2	
	.1	
	119.0	
	118.9	
	.8	
	.7	Oviedo.
	.	
	.	
	117.8	Córdoba.

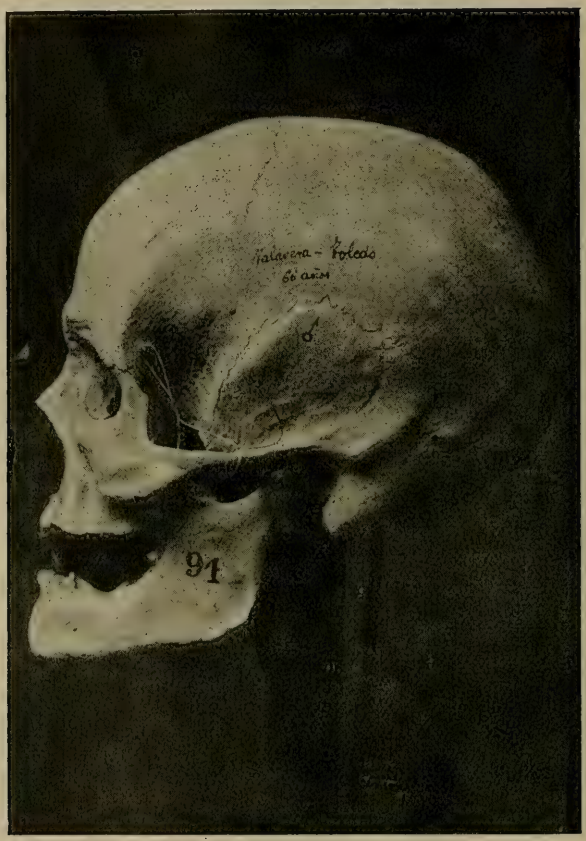
Con tales separaciones puede construirse el mapa, según uno de los dos métodos de la estadística antropológica; pero se ve que el grupo de cráneos cortos abarca 17 pro-

15.—Fot. 9.—[10 y 11]
♀ **Oviedo.** Belmonte.—42 años; n.º 230. Fac. Med.—D. A P. 164; Módulo 145,3; R. M L. 112,8. *Tipo corto.*

vincias frente a las ocho de largos ya indicados, quedando un gran número de provincias en la caracterización intermedia, y, por tanto, menos útil y diferenciada.

Igualmente, subrayando las provincias — Guipúzcoa y

Cuenca—a que corresponde la situación media y el principio de los tercios superior é inferior, según el otro método, o sea el geográfico, en vez del númerico, queda el grupo



16.—Fot. 12.—[13, 14 y 25].

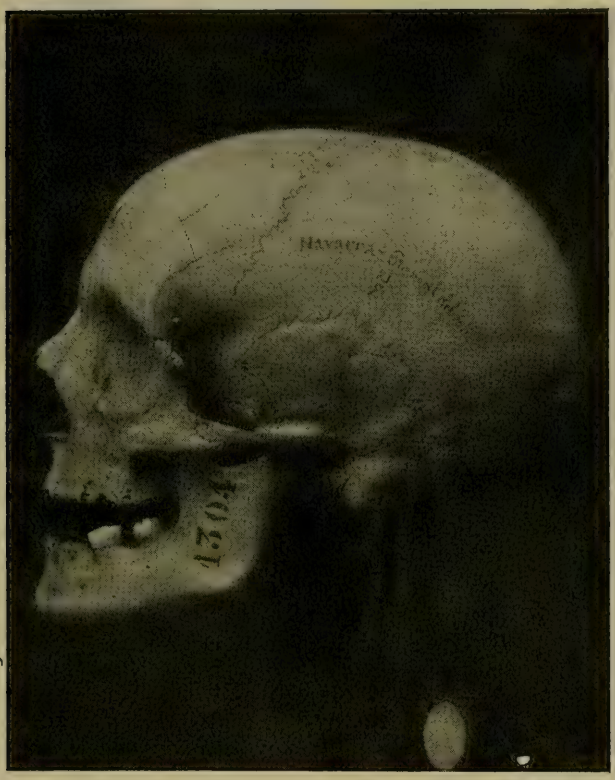
♂ **Toledo.** Talavera de la Reina.—66 años; núm. 91. Fac. Med.—D. AP. 187; Módulo 162; R. ML. 115,4. *Tipo corto.*

de cráneos cortos en el valor 120,4 con (1) 15 provin-

(1) Además de las figuras 15 y 16, 17 y 18 representan los cráneos de menor valor, el masculino de Lugo y el femenino de Santander, y de mayor el de Osma con 122,9, y el de Miguel Esteban con 128, que es verdaderamente extremo por esta relación módulo longitudinal.

cias; aunque siguiendo el detalle práctico del método se incluye en el grupo la de Alava, que tiene igual cifra que las otras cinco qne completan el tercio de ellas.

No hacemos el análisis de la serie femenina por la menor

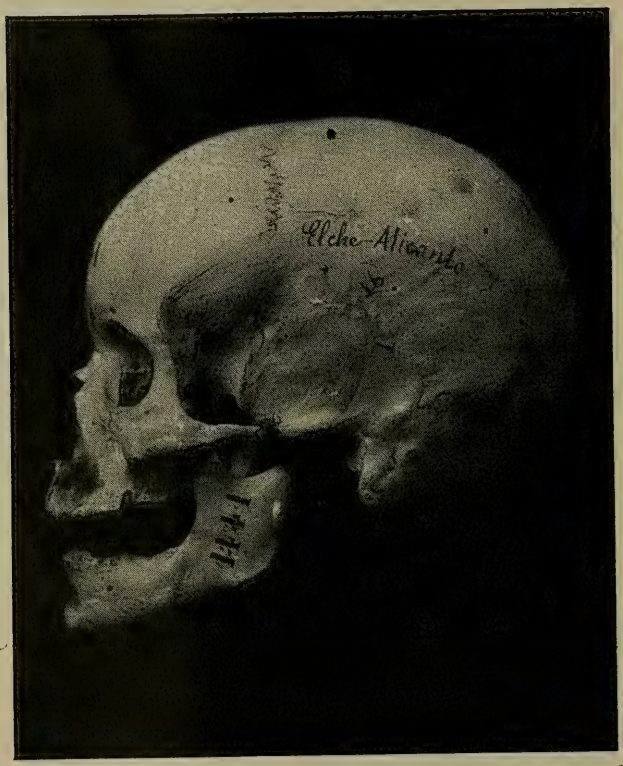


17.—Fot. 20.—[21, 22 y 23].

♀ **Navarra.** Roncal.—23 años. n.º 1.304 Fac. Med.—D. AP. 181; Módulo 146,7; R. ML. 12³,4. *Tipo largo.*

utilidad que esta relación presenta comparada con las siguientes, limitándonos a consignar que son covergentes tes en los cráneos braquicéfalos las provincias de Oviedo y Lugo y las extremeñas con Toledo; en tanto que aparecen de sexos opuestos, por este carácter, Castellón, Teruel y

Huesca, y León con Salamanca, siendo muy escasas las provincias que en los cráneos largos coinciden los sexos en igual grupo; por lo cual, además de lo dicho, se ve el menor valor taxonómico de esta relación.



18.—Fot. 25.—[26 y 27].

♀ **Alicante.** Elche.—N.º 1.441. Fac. Med.—D. AP. 180: Módulo 148,7: R. ML. 121. *Tipo largo.*

Reunidos los valores de los dos sexos en una sola serie, aparecen como de cráneos cortos la regiones ya señaladas en Galicia y Extremadura; como cabezas largas se destacan sólo Albacete y Alicante, y Logroño y Vizcaya.

* * *

La RELACIÓN VÉRTICO-MODULAR da como características generales:

Hombres: máx. 90,5, Almería y Córdoba, a mín. 83,2, Málaga.
Mujeres: » 90,7, Teruel, a » 84 , Lugo.

Oscilación total en décimas, 75.. { Masculina... 73. Femenina... 67.

Valor comúu a los dos sexos, 65 décimas; de 84 a 90,5.
Exceso: del máximo femenino, 2; del mínimo masculino, 8.

Los valores medios, que en los dos sexos abarcan 10 puestos, de 87 a 88 en los hombres, con 10 provincias, y de 86,6 a 87,6 en las mujeres, con 14, indican ya una buena aplicación como carácter distintivo y ordenatorio provincial, que, además, como puede verse en los cuadros V y VI y en el mapa III, confirman la hipsicéfalia ó platicéfalia provincial por la convergencia de los valores, que es constante, salvo las excepciones de Huesca, Valladolid, Cáceres y Granada.

Los cráneos altos por el valor de la relación y la colocación provincial, siendo, por tanto, tipícos en el carácter, son todos los del litoral Mediterráneo y cuencas media e inferior del Tajo y el Guadiana, sin más excepción que Málaga, cuyos cráneos masculinos ya hemos señalado como una solución, que probablemente rectificarán mayores datos.

Por el valor excesivamente bajo y aislado de Málaga, aparecen en una primera separación, como cráneos bajos, Vizcaya, Guipúzcoa y Logroño de un lado, León y Salamanca y Valladolid de otro, y Coruña, Lugo y Pontevedra al NO.; pero omitiendo para la seriación las 21 unidades que separan Málaga, de las 85,3 que tiene Logroño en el principio de la serie continua, se limita el grupo platicéfalo en 87 y se destacan toda Galicia, Asturias, Santander y zona vasconavarra y riojana en perfecta continuidad, de la que sólo está fuera la provincia de Segovia en los dos sexos y la de Lérica, aunque ya en el límite extremo de los valores, por las mujeres, trayendo además a este grupo Burgos y León, que también

por otros caracteres se unen a las provincias del Norte (1).

Las mujeres se agrupan en diversos núcleos, de los que el más característico es el platicéfalo cantábrico, de modo dife-

19.—Fot. 11.—[9 y 10].

♀ **Oviedo.** Belmonte.—42 años; n.º 230. Fac. Med.—D. V. 122; Módulo 145,3; R. M V. 83,9. *Tipo bajo.*

rente a los hombres, como se ve claramente por el diverso rayado del mapa: La hipsicefalia femenina tiene continua la zona aragonesa, ampliada con Soria al interior, y Tarragona

(1) Véanse además de estas figuras, por ser muy típicas por esta relación, las mujeres de Cabuérniga y Roncal por ser mínima, y los hombres de Levante y Serranías ibéricas en que es máxima.

y Castellón hacia el litoral; la de Murcia y Almería y las cuatro provincias manchegas, pero con valores bastantes separados y que atenúan el carácter en la última región, lo que confirma nuestra hipótesis de los dos tipos dolico-hipsicéfalos de España, el que es alto, por sus propios valores ver-

20.—Fot. 14.—[12, 13 y 15].
♂ **Toledo.** Talavera de la Reina.—Núm. 91. Fac. Med.—D. V. 148; Módulo 162; R. M V. 91,3. *Tipo alto.*

ticales y el que lo parece por ser estrecho o corto en las relaciones horizontales.

Las rectificaciones que esta relación hace de los datos del índice vértico-transversal son: las de atenuar la platicefalia de los varones de Asturias y Lugo y de las hembras de Asturias, Santander y León, exagerándola, por el contrario, en los hombres de León y Salamanca; por el lado de la hipsi-

V.—Relación vertical modular.

Hombres

Cráneos altos: hipsicéfalos.....	90.5	Almería, Córdoba.
	.4	
	.3	
	.2	Castellón.
	.1	
	90.0	
	89.9	
	.8	
	.7	
	.6	
	.5	
	.4	
	.3	
	.2	
	.1	
	89.0	Tarragona.
	88.9	Valencia.
	.8	Cádiz, Murcia.
	.7	Granada.
	.6	Alicante, Ciudad Real.
	.5	
	.4	Cáceres, Sevilla.
	.3	
	.2	Badajoz, Toledo, *Cuenca,* Madrid.
	.1	
	88.0	Zaragoza, Jaén.
	87.9	
	.8	Zamora.
	.7	Navarra, *Orense.*
	.6	
	.5	Soria, Guadalajara, Albacete.
	.4	
	.3	
	.2	Teruel.
	.1	Oviedo.
	87.0	Avila, Palencia.
	86.9	
	.8	*Alava,* Burgos, Segovia, Huesca.
Cráneos bajos: platicéfalos.....	.7	
	.6	
	.5	
	4	
	.3	
	.2	
	.1	Santander.
	86.0	
	85.9	Lugo, Pontevedra.
	.8	Valladolid.
	.7	Guipúzcoa, Coruña, Salamanca.
	.6	
	.5	Vizcaya.
	.4	León.
	.3	Logroño.
	.2	
	.	
	.	
	83.2	Málaga.

VI.—Relación vertical modular.

Mujeres

Cráneos altos: hipsicéfalos.....	90.7	Teruel.
	.6	
	.5	Murcia.
	.4	
	.3	
	2	
	.1	
	90.0	
	89.9	
	.8	
	.7	
	.6	
	.5	
	.4	Huesca, Tarragona.
	.3	
	.2	Castellón, Córdoba.
	.1	
	89.0	
	88.9	
	.8	
	.7	Almería.
	.6	
	.5	Soria.
	.4	
	.3	Cuenca, Zaragoza.
	.2	Ciudad Real.
	.1	
	88.0	Toledo.
	87.9	Jaén.
	.8	Valladolid.
	.7	*Albacete*, Huelva.
	.6	
	.5	Alicante, Zamora.
	.4	Cádiz.
	.3	
	.2	Burgos, Guadalajara, Palencia, Salamanca, Sevilla.
	.1	
	87.0	
	86.9	Badajoz.
	.8	Valencia.
	.7	Avila, León, Madrid.
	.6	Málaga.
	.5	
	.4	
Cráneos bajos: platicéfalos.....	.3	*Lérida*, Navarra, Santander.
	.2	Cáceres.
	.1	Orense, Oviedo, Pontevedra.
	86.0	Granada.
	85.9	
	.8	
	.7	
	.6	
	.5	
	.4	
	.3	Alava, Logroño, Segovia.
	.2	
	.1	
	85.0	
	84.9	
	.8	
	.7	
	.6	Guipúzcoa.
	5	Coruña.
	.4	
	.3	
	.2	
	.1	Vizcaya.
	84.0	Lugo.

III
Relación vértico modular.
Masculinos y femeninos bajos.
Masculinos de menos de 87.
Femeninos de menos de 86'6.
Masculinos y femeninos altos.
Masculinos de más de 88.
Femeninos de más de 87'6.
Masculinos bajos, femeninos altos.
Masculinos altos, femeninos bajos.
Diferencia de más de 10 puntos de orden.

cefalia atenúa este carácter en los cráneos masculinos de Zaragoza, Albacete y Jaén, y en los femeninos de Albacete y Alicante, de modo opuesto a lo que ocurre en los de Cuenca y Toledo y a los hombres de Granada, Cáceres y Madrid, que tienen realmente cráneos más altos que lo que parecían en las primeras determinaciones.

En este mismo concepto de la relación vertical aparecen las rectificaciones de los datos presentados por el *índice vértico-longitudinal;* así los cráneos de tipo cántabro y extremeño se caracterizaban igualmente como bajos, anchos y cortos, teniendo que acudir para separarlos al tamaño o módulo de la órbita, que es grande en los primeros y realmente pequeña y de tipo micrósemo en los últimos, cuando realmente el extremeño es de calavera alta decididamente en los varones.

Análogamente, y comprobando lo dicho para las rectificaciones al índice vértico-transversal, se deshace la síntesis de la hipsicefalia, que es debida a la estrechez en las provincias de Levante y a la cortedad del cráneo en las de la Mancha, separándose también en el aragonés, que realmente no es alto, aunque lo parece por ser largo y estrecho.

*
* *

Es la RELACIÓN TRANSVERSO-MODULAR que se resume en sus valores medios provinciales en los cuadros VII y VIII, y se representa gráficamente en el mapa IV, la más útil y característica por su regular distribución y la correspondencia de los valores numéricos y la ordenación de las provincias: Así se ve, que en los hombres, el valor medio de 91,6 separa dos grupos iguales de provincias, y los iniciales de los extremos tienen igual carácter; sus elementos característicos son los siguientes:

Hombres:	máx. de 94,1, Málaga,	a mín....	89,2.	Córdoba.
Mujeres:	» » 95,9, Lugo,	a » ...	89,	Murcia.

Oscilación total en décimas, 69.	Masculina.....	49.
	Femenina.....	69.

Valor común a los dos sexos, de 89,2 a 94,1 = 49.
Exceso: del máximo femenino, 18; de mínimo femenino, 2.

Lo primero que se hace notar, es la mayor amplitud de la variación en las mujeres, pues los excesos de los valores comunes a los dos sexos están a favor de ellas, que tienen, por tanto, 20 unidades más de separación que en los hombres, que se distribuyen ampliando bastante regularmente la serie hacia los dos extremos, lo que confirma que en los cráneos femeninos se exagera étnicamente la leptocefalia o estrechez y la anchura.

En la serie masculina, el valor medio 91,6 no es objetivo en ninguna provincia, pero en cambio, la coincidencia de los límites numéricos con la ordenación geográfica da estabilidad a la formación de grupos y regiones, pues, especialmente en los valores mínimos que corresponden a los cráneos estrechos, la coincidencia es completa y permite fijar la leptocefalia en dos focos: el aragonés, Ebro arriba, con Soria y Burgos, y hacia abajo con Tarragona y Castellón, y el de la cuenca del Guadalquivir y región levantina inferior de Murcia con Alicante y Almería, sin que exista una sola provincia fuera de estas dos zonas. Las figuras 21 y 22 dan perfecta idea de la deptocefalia.

La anchura craneal, característica esencial de la braquicefalia, tal vez más que el diámetro antero-posterior corto, confirma definitivamente la existencia de una zona nórdica típica en todo el litoral cantábrico, con valores superiores a 92,4, internándose su influencia por León y Palencia hasta Valladolid y por toda la región riojano-navarra, en evidentes contrastes con la intrusión aragonesa-soriana, que sube a Burgos y separa las dos zonas anteriores.

VII.—Relación transversal modular.

Hombres

Cráneos anchos.. . .	94 1	Málaga.
	94.0	
	93.9	Oviedo.
	.8	
	.7	
	.6	Coruña, Lugo, Santander.
	.5	
	.4	
	.3	
	.2	
	.1	
	93.0	
	92.9	Guipúzcoa.
	.8	Pontevedra, Valladolid, Vizcaya.
	.7	Navarra.
	.6	Alava.
	.5	
	.4	Cáceres, Logroño.
	.3	
	.2	León.
	.1	*Palencia.*
	92.0	
	91 9	Avila, Segovia.
	.8	Badajoz, Salamanca.
	.7	Valencia.
	.6	
	.5	
	.4	Ciudad Real, Cuenca, Granada, Guadalajara, Toledo.
	3	Madrid, Zamora.
	.2	Orense.
	.1	
	91.0	
	90.9	*Soria.*
	.8	Cádiz.
	.7	
Cráneos estrechos. .	.6	Teruel.
	.5	Jaén, Murcia, Zaragoza.
	.4	Burgos.
	.3	Albacete, Tarragona.
	.2	
	.1	Castellón.
	90.0	
	89.9	
	.8	
	.7	Almería, Sevilla.
	.6	
	.5	Alicante.
	.4	Huesca.
	.3	
	89.2	Córdoba.

VIII.—Relación transversal modular.

Mujeres

Cráneos anchos.. . .	95.9	Lugo.
	.8	
	.7	
	.6	
	.5	
	.4	
	.3	
	.2	Oviedo.
	.1	
	95.0	
	94.9	Coruña.
	.8	
	.7	
	.6	
	.5	
	.4	
	.3	
	.2	Guipúzcoa.
	.1	Santander.
	94 0	Vizcaya.
	93.9	
	.8	
	.7	Cáceres.
	.6	
	.5	
	.4	Badajoz.
	.3	León.
	.2	
	.1	
	93.0	Córdoba, Segovia, Sevilla.
	92.9	Málaga, Orense.
	.8	*Logroño,* Pontevedra.
	.7	Alava, Granada, Navarra, Salamanca.
	.6	Guadalajara.
	.5	Huelva.
	.4	Jaén.
	.3	Madrid, Toledo.
	.2	Cuenca.
	.1	Cádiz, Palencia.
	92.0	
	91.9	Burgos.
	.8	Ciudad Real, *Val adolid.*
	.7	
	.6	
	.5	Avila, Valencia.
	.4	
	.3	
	.2	Tarragona, Zaragoza.
	.1	Lérida.
Cráneos estrechos. .	91.0	
	90.9	Alicante.
	.8	
	.7	Albacete.
	.6	
	.5	
	.4	Almería, Huesca.
	.3	Soria, Zamora.
	.2	
	.1	
	90.0	Teruel.
	89.9	
	.8	
	.7	
	.6	Castellón.
	.5	
	.4	
	.3	
	.2	
	.1	
	89.0	Murcia.

IV.
Relación transverso modular.
Masculinos y femeninos anchos.
Masculinos de más de 92'5.
Femeninos " " " 92'8.
Masculinos y femeninos estrechos.
Masculinos de menos de 90'9.
Femeninos de menos de 91'9.
Masculinos anchos, femeninos estrechos.
Masculinos estrechos, femeninos anchos.
Diferencia de más de 14 puntos de órden.

La excepción de Málaga sigue como un problema; y la de Cáceres con cráneos cortos, que se extienden por la provincia de Toledo en el curso del Tajo y la zona de los Montes, como se ve en la fotografía del cráneo de Talavera de la

21.—Fotg. 26—[25 y 26].

♀ **Alicante.** Elche· — 1.441. Fac. Med. — D. T. 134; Módulo 148,7; R. M T. 90,1. *Tipo estrecho.*

Reina, confirma la influencia que más acusada por otros caracteres tiene el tipo céltico, alpino, braquicéfalo, o como, en definitiva, sea llamado, el por nosotros, para simplificar, denominado cántabro, en esta región extremeña del Tajo y

Guadiana, que ya hicimos notar en 1891 (1), adelantando la idea de que confirmaba nuestro hallazgo la colocación dada por Estrabon de un grupo de celtas del Anas en esa región.

22.—Fotg. 2.1—[20, 22 y 23].

♀ Navarra.—Roncal núm. 1.304. Fac. Med.—D. T. 137; Módulo 146,7; R. M T. 93,4

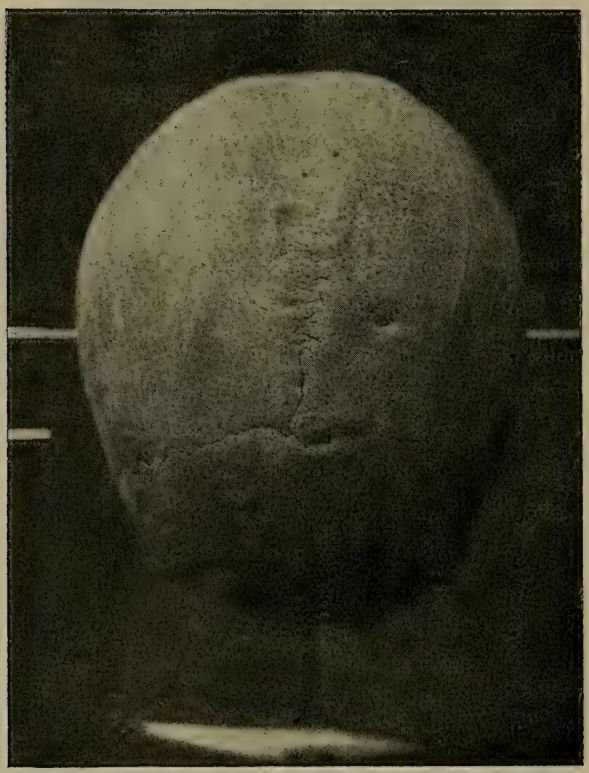
Completan la representación de este tipo de mínima relación vértico-modular las fotografías 24, hombre de Elche, con solo 86,8, y 36 de Miguel Esteban con 85,6 (2).

---

(1) Hoyos Sainz y Aranzadi: *Un avance a la Antropología de España.* (Pág. 18 y 30).—1892, Madrid.

(2) Además de estas figuras de valores bajos, están la 9 ♂ de Lugo con 98,8 y la 10 ♀ de Oviedo con el valor realmente extraordinario de 103,2.

Es de señalar que la diagonal marcada por otros más sencillos caracteres y relaciones se transforma en una gran zona intermedia que separa la España del NO. y N. de la del SE. y S., marcando los dos tipos extremos craneales por esta



23.—Fotg. 13.—[12, 14 y 15].
♂ **Toledo.** Talavera de la Reina. — D. T. 151; Módulo 162; R. M L. 93,2. *Tipo ancho.*

relación del diámetro transverso máximo al módulo craneal, y planteando ya la división que por el total de las relaciones modulares se hace, de los dos grupos de cabezas, anchas bajas y cortas, y estrechas altas y largas.

La distribución de esta relación en las mujeres confirma todos los caracteres de la zona cántabro-vasca, que por la única consideración del índice cefálico se había disgregado y hasta caracterizado en dos tipos diferentes, y que vuelven

24.—Fotg. 7.—[5, 6 y 8].
♀ **Santander.** Cabuérniga, Sopeña.— B. Mus. Ant.—D. T. 137; Módulo 142; R. M T. 96,4 *Tipo ancho.*

a unirse en un fondo común, ampliando sus límites con León y la Rioja y acentuando su separación del tipo aragonés y del serrano-castellano.

Lo relativamente nuevo es el grupo extremeño-bético, que en esta relación forman los cráneos femeninos, como se ve

en el mapa IV bajando de Cáceres y Badajoz, por Córdoba y Sevilla, hasta Málaga, y permitiendo tal vez romper el aislamiento, de esta provincia paradójica, con sus limítrofes por otros caracteres, y que merece para resolverle un detenido estudio, especialmente en los pueblos de la serranía de Ronda.

Los elevados valores de Lugo, Oviedo y La Coruña confirman la hipótesis de ser la primera de estas provincias el foco y cuna de la braquicefalia presunta céltica, y los muy bajos de Teruel, el de la dolico-leptocefalia ibérica, siendo de necesidad absoluta, para continuar las investigaciones de antropología etnogénica de España, el estudio monográfico de esas dos provincias y el del nudo montañoso ibero-pirenaico en el confín de León, Oviedo y Santander, donde se da la convergencia de los tres tipos antropológicos peninsulares.

Las variaciones que por esta relación se hacen de los datos del índice vértico-transversal y del valor absoluto del diámetro vertical o basio-bregmático, consisten, aparte las dadas como resultados fijos, en que hay provincias dolicocéfalas que aquí aparecen atenuadas respecto al dato del índice cefálico, por no ser de cráneo estrecho, como ocurre en los hombres, con Burgos, Soria, León y Salamanca, y en las mujeres con Logroño, Avila y Segovia, lo que rebaja el exagerado valor que se dió primero en los cráneos por nosotros, y luego en las cabezas, por Olóriz, a la dolicocefalia de Castilla la Vieja, y señala su mayor relación con los tipos del N. y NO., que con los restantes del E., a los que se une Soria, por su gran estrechez.

De modo análogo los braquicéfalos se atraen por su anchura a los dos sexos en Vizcaya; a los hombres, en Guipúzcoa y Valladolid; y a las mujeres, en La Coruña: datos todos confirmativos de la homogeneidad de las razas del Norte, enmascarada por la sola consideración del índice cefálico.

*
* *

La *síntesis de las tres relaciones modulares* en los dos sexos, aunque indudablemente artificiosa, obteniéndola por la suma de los valores y no por la relación de convergencia ó divergencia de los caracteres de los dos sexos, nos da una final indicación, que confirma los datos obtenidos por la consideración separada de ambos. El método de las convergencias o divergencias le empleamos en las comparaciones sexuales en la comunicación hecha el 10 de Enero de 1913 á la *Société d'Anthropologie de Paris,* y publicada en los *Bulletins et Mémoires* de dicho año, páginas 81-94, y nos dió la consideración de cráneos homotípicos en las provincias del litoral cantábrico, Extremadura y región valenciano-aragonesa; y la de cráneos heterotípicos, o de caracteres divergentes en los dos sexos, en Murcia y Jaén, Granada y Málaga, así como en las provincias de las serranías castellanas, lo que nos permite conjeturar la persistencia y pureza de raza en las regiones de sexos convergentes y de intrusión o sustitución de un elemento en las contrarias.

La realidad de la igualdad o desigualdad de los sexos la vemos aquí confirmada por este procedimiento analítico de las relaciones modulares; pues comparando los cuadros de distribución de la vertical y la transversa en los dos sexos, o mirando simplemente la que aparece gráficamente en los mapas, vemos que la convergencia se da por los valores verticales en los tipos platicéfalos de toda la zona cantábrica y vasco-riojana y los transversos en los cráneos anchos de igual región y de Cáceres y Málaga, así como en los cráneos altos y en los estrechos de Tarragona y Castellón, continuación del Aragón étnico, que por el segundo carácter aparece también como región uniforme. Igualmente resalta en los dos conceptos de altos y estrechos por Murcia y Almería, y en la región amplia de la Mancha por la altura craneal.

Las zonas mixtas o divergentes sexualmente, no son tan coincidentes, pero no dejan de serlo las serranías castella-

nas o Carpeto-vetónicas, con la adición más clara de Valladolid, que lo debe á la intrusión de un tipo femenino alto y estrecho de cráneo, que en Zamora aisla realmente la provincia por los dos sexos de todas las limítrofes. Confírmase en Granada la divergencia por mujeres de cráneo bajo, que pasa a ser ancho en las de Córdoba y Sevilla, también divergentes; por fin, Huesca se separa de Aragón por la intrusión, bien explicable, de hombres de cráneo aplastado.

El mapa V sintetiza la distribución de los valores sumados de los dos sexos, cuyas cifras son:

VERTICAL

Mínima : 84,8, Vizcaya.
Media : 87,5, Cáceres, Madrid, Orense.
Máxima: 89,8, Castellón.

LONGITUDINAL

Mínima : 118,5, Córdoba.
Media : 120,8, Valladolid, Palencia, Jaén, Valencia.
Máxima: 122,6, Lérida.

TRANSVERSAL

Mínima : 89,9, Castellón.
Media : 91,8, Avila, Madrid, Granada.
Máxima: 94,4, Oviedo:

Lo artificioso del sistema de obtener la medida de los valores sexuales, se ve, en que sólo el valor mínimo de los hombres de Córdoba coincide con un valor medio, y la necesidad de hallar los factores comunes a los sexos sólo puede intentarse estableciendo la constante de variación sexual que habría de aplicarse a las cifras de un sexo para hacerlas comparables con el del otro, para lo cual, hemos dado las diferencias que por exceso o defecto tienen y el valor medio y extremos de cada uno.

Con las anteriores aclaraciones, y repitiendo que este trabajo es más un ensayo de método que una exposición de resultados finales, damos la distinción y característica de los grupos craneales que en España resultan por la consideración de las relaciones modulares.

V
Las tres relaciones modulares.
Cráneos. Anchos, Cortos, Bajos.
" Anchos, Cortos, Altos.
" Altos, Estrechos, Cortos.
" Altos, Estrechos, Largos.
" Bajos, Anchos, Largos.
" Bajos, Estrechos, Largos.
Suma de las diferencias entre limitrofes mayor de 30.

De las seis relaciones posibles sólo hay en realidad cinco como características de la *crania* española, ya que la de los cráneos *bajos, estrechos* y *largos*, que muy bien pudiera ser la característica de Cataluña, sólo se presenta en Lérida con valores de 86,3, de 91,1 y de 122,9, que es un máximo extremo característico. Pero esta provincia aparece ahora en oposición a la característica hallada por el Sr. Olóriz en el vivo, en la que influyó un islote braquicéfalo de índices superiores a 80, que apareció en el partido de Balaguer y que influyó también con los otros del llano como Cervera y la capital que pasan de 78, mientras todo el resto queda en los dolicocéfalos, aunque no sean fijos estos datos por haber contradicción entre las cifras y las indicaciones del mapa distribuído por partidos.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

	PÁGS.
Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1915 ...	5
I.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte), por *José Echegaray*. Conferencia primera	11
II.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte), por *José Echegaray*. Conferencia segunda.....	27
III.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte), por *José Echegaray*. Conferencia tercera	47
IV.—Las relaciones modulares en los cráneos de España. Nota presentada en Mayo de 1915, por *Luis de Hoyos Sáinz*	68

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

FEB 1926

TOMO XIV.—NÚMERO 4.
OCTUBRE DE 1915

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1915

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

V.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia cuarta.

SEÑORES:

Hemos planteado este problema en nuestra última conferencia:

Dado un sistema de esferillas suficientemente pequeñas con relación al espacio en que se mueven, esferillas lisas en absoluto y en absoluto elásticas, considerábamos dos grupos de estas esferillas, y por lo tanto, de sus velocidades.

El *primer grupo* satisfacía á la condición de que las componentes de las velocidades habían de estar comprendidas entre los límites que marca el siguiente cuadro, conforme se ha explicado tantas veces:

$$\begin{vmatrix} u & u + \partial u \\ v & v + \partial v \\ w & w + \partial w \end{vmatrix}$$

El *segundo grupo* había de ser tal, que las componentes de las velocidades de sus diferentes esferillas tuvieran por límites los que marca el siguiente cuadro, análogo al anterior:

$$\begin{vmatrix} u_1 & u_1 + \partial u_1 \\ v_1 & v_1 + \partial v_1 \\ w_1 & w_1 + \partial w_1 \end{vmatrix}$$

Y por último, en cada par de esferillas, correspondientes una al primer grupo y otra al segundo, las componentes de las líneas de los centros, es decir, las proyecciones de estas distancias sobre paralelas á los ejes, habían asimismo de tener por límites los que indica este tercer cuadro:

$$\begin{vmatrix} x & x+\partial x \\ y & y+\partial y \\ z & z+\partial z \end{vmatrix}$$

Recordando á mis alumnos, para evitar confusiones, que x, y, z no son coordenadas, sino componentes de la distancia entre los centros de cada dos esferillas, ó sean proyecciones de esta distancia sobre paralelas á los ejes.

Y agregábamos en la última conferencia que, puesto que se toma una esferilla con su velocidad en el primer grupo y otra en el segundo, el número de pares formados de este modo serán, evidentemente, el producto del *número* de esferillas ó velocidades resultantes del primer grupo, por el *número* de esferillas ó velocidades resultantes del segundo, ó sea:

$$[\chi(c)\,\partial u\,\partial v\,\partial w]\,[\chi(c_1)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1]$$

ó bien,

$$\chi(c)\,\chi(c_1)\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1.$$

Pero no hemos de considerar todos estos pares, sino aquellos que cumplen con las condiciones que indica el tercer cuadro de los anteriores, es decir, aquellos pares en que la distancia de los centros tiene componentes comprendidas en los límites que marca el expresado tercer cuadro.

Estos son los únicos pares de esferillas ó velocidades que vamos á tener en cuenta, y por eso, para abreviar la expresión, les llamamos *pares útiles ó eficaces.*

De los demás prescindimos en absoluto.

Y el problema que vamos á resolver es éste:

Determinar el número de pares útiles para nuestro objeto; y lo designaremos por N_2, para distinguirlo de otro número determinado en las conferencias precedentes y á que dábamos el nombre de N_1.

***

Imaginemos (fig. 10) en un instante dado, y para un punto A_1, una esferilla e_1 del *primer grupo,* de modo que su velocidad será de las que hemos designado por c_1.

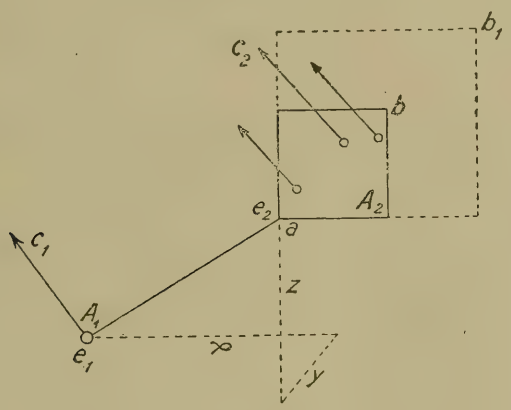


Figura 10

Tracemos $A_1\,a$ como distancia del centro de e_1 al centro de otra esferilla e_2, que, con la primera, ha de constituir uno de los pares de esferillas que estamos considerando.

Y lo mismo da decir pares de esferillas, que pares de velocidades de ambos grupos.

Las componentes de $A_1 a$ serán: x, y, z.

Tomando a como vértice, tracemos asimismo un paralelepípedo infinitamente pequeño, cuyas aristas sean: dx, dy, dz.

A fin de no complicar la figura, no representamos este paralelepípedo en perspectiva, sino que lo representamos esquemáticamente, ó simbólicamente como quiera decirse, por el rectángulo ab.

Todas las esferillas, que con la e_1 del punto A_1 han de formar pares útiles, ó eficaces pudiéramos decir también, han de estar en el interior de este paralelepípedo ab.

Y en efecto; las esferillas que estén fuera serán tales que las distancias de sus centros á A_1 tendrán componentes que estarán fuera de los límites

$$\begin{array}{ll} x & x+\partial x \\ y & y+\partial y \\ z & z+\partial z. \end{array}$$

Y recíprocamente, todas las esferillas que estén dentro del paralelepípedo podrán constituir con e_1 pares eficaces de los que necesitamos tener en cuenta.

Luego combinando e_1 del punto A_1 con todas las esferillas del interior del paralelepípedo, tendremos todos los pares eficaces ó útiles de esferillas ó velocidades que corresponden al punto A_1.

Si consideramos un paralelepípedo de lado 1, que simbólicamente representamos por ab_1, por la homogeneidad estadística del sistema, podremos decir que el número de esferillas del segundo grupo contenidas en el paralelepípedo ab está, con el número de esferillas de dicho segundo grupo, contenido en ab_1 en la relación de los volúmenes. Es decir,

$$\frac{\text{Número esferillas } e_2 \text{ contenidas en } (ab)}{\text{Número esferillas } e_2 \text{ contenidas en } (ab_1)} = \frac{\partial x\,\partial y\,\partial z}{1}.$$

A las esferillas e_2 corresponden las velocidades del se-

gundo grupo, tales que sus componentes están comprendidas entre

$$\begin{array}{ll} u_2 & u_2 + \partial u_2 \\ v_2 & v_2 + \partial v_2 \\ w_2 & w_2 + \partial w_2. \end{array}$$

El número de éstas hemos demostrado que es

$$\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2,$$

y es claro que, por la uniformidad estadística del sistema, este número de esferillas ó velocidades del segundo grupo, comprendidas en el paralelepípedo de volumen 1, será una fracción, que designaremos por C, del número total.

Luego

Número de esferillas (ó velocidades) del 2.° grupo contenidas en $(ab_1) = C\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2$,

y por lo tanto,

$$\frac{\text{Número de esferillas } e_2 \text{ (ó velocidades del 2.° grupo) contenidas en } (ab)}{C\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2} = \partial x\,\partial y\,\partial z;$$

de donde

Número de esferillas e_2 (ó velocidades del 2.° grupo contenidas en $(ab) = C\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial x\,\partial y\,\partial z$;

O esto mismo con más sencillez:
el número total de esferillas e_2 es $\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2$, y como se reparte por igual en todo el volumen V del gas, por unidad de volumen será:

$$\frac{\chi\,(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2}{V},$$

y al volumen $\partial x\, \partial y\, \partial z$ le corresponderá:

$$\frac{\chi(c_2)\, \partial u_2\, \partial v_2\, \partial w_2}{V}\, \partial x\, \partial y\, \partial z;$$

llamando C á la cantidad constante $\frac{1}{V}$ tendremos la fórmula precedente:

$$C\chi(c_2)\, \partial u_2\, \partial v_2\, \partial w_2\, \partial x\, \partial y\, \partial z.$$

Pero como cada una de estas esferillas y la e_1, ó cada una de sus velocidades, con la velocidad correspondiente al punto A_1, constituyen un *par eficaz*, podremos escribir:

Número de pares ó velocidades eficaces correspondientes al punto $A_1 = C\chi(c_2)\, \partial u_2\, \partial v_2\, \partial w_2\, \partial x\, \partial y\, \partial z.$

Repitiendo esto mismo para cualquier punto que, como el A_1, corresponda á una esferilla e_1 ó á una velocidad del primer grupo, bastará sumar todos estos resultados para tener el número de pares eficaces.

Mas el número de velocidades del primer grupo hemos visto que es, en absoluto,

$$\chi(c_1)\, \partial u_1\, \partial v_1\, \partial w_1;$$

luego basta multiplicar este número por el resultado anterior para tener el número total de pares eficaces.

Tendremos, pues,

Número total de pares eficaces

$$= \chi(c_1)\, \partial u_1\, \partial v_1\, \partial w_1 \cdot C\chi(c_2)\, \partial u_2\, \partial v_2\, \partial w_2\, \partial x\, \partial y\, \partial z.$$

Si en vez de tomar como punto de partida una esferilla ó

una velocidad del primer grupo, para combinarla con las del segundo, hubiéramos partido de una esferilla ó de una velocidad de dicho segundo grupo, para combinarla con las del primero, hubiéramos obtenido, evidentemente,

$$\chi(c_2)\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2 \cdot C'\chi(c_1)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

representando por C' la fracción del número total de velocidades del primer grupo ó de esferillas de este grupo que llenan un paralelepípedo de volumen igual á 1.

Pero como ambos números totales deben ser idénticos, deberemos tener $C = C'$, que es evidente porque ambos valen $\frac{1}{V}$.

En suma,

Número de pares eficaces

$$= C\chi(c_1)\,\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

que es precisamente la fórmula de la obra inglesa que hemos tomado por guía.

Y ahora se comprende por qué dice el autor, prescindiendo de la constante C, que todo el producto que queda á la derecha es proporcional al número de pares de velocidades que pueden formarse, tomando una de modo que las componentes de dicha velocidad estén comprendidas en

$$\begin{array}{ll} u_1 & u_1 + \partial u_1, \\ v_1 & v_1 + \partial v_1, \\ w_1 & w_1 + \partial w_1; \end{array}$$

tomando otra cuyas velocidades estén á su vez comprendidas en

$$\begin{array}{ll} u_2 & u_2 + \partial u_2, \\ v_2 & v_2 + \partial v_2, \\ w_2 & w_2 + \partial w_2; \end{array}$$

y por último, haciendo de modo que los centros de las esferillas correspondientes disten uno de otro una magnitud cuyas componentes tengan por límites

$$x \quad x + \partial x,$$
$$y \quad y + \partial y,$$
$$z \quad z + \partial z.$$

Podemos recordar de paso que, sean cuales fueren las velocidades, la constante C es la misma:

$$\text{siempre es } \frac{1}{V}.$$

***

Veamos ahora el partido que puede sacarse de este resultado para determinar la forma de la función $\chi(c)$.

Imaginemos que la distancia entre los centros cuyas componentes, con pequeñas diferencias, son x, y, z; la distancia, repetimos, entre los centros de cada dos esferillas de los grupos 1 y 2 se hace cada vez menor; pues esto equivale á considerar esferillas muy próximas y entre las que en un intervalo de tiempo muy pequeño, ∂t, ha de verificarse un choque.

Para fijar este concepto, que así dicho es un tanto vago, supondremos que la componente menor y de la línea de los centros es cero, de suerte que dicha componente estará comprendida entre 0 y $0 + \partial y = \partial y$.

Que la componente paralela al eje de las z está comprendida á su vez entre 0 y $0 + \partial z$.

Y por último, que la componente de la distancia de los centros paralelamente á x está comprendida entre $2r$, siendo r el radio de cada esferilla (y hemos dicho que las consideramos iguales) y $2r + \partial x$.

Lo cual equivale á decir que consideramos (fig. 11) que cada par de esferillas a, b tiene sus centros a, b en una paralela al eje de las x.

En efecto; $a\,b = r + r + \partial x$, como se ve en la figura.

La línea de los centros, en rigor, por la definición que hemos dado, no es absolutamente paralela al eje de las x;

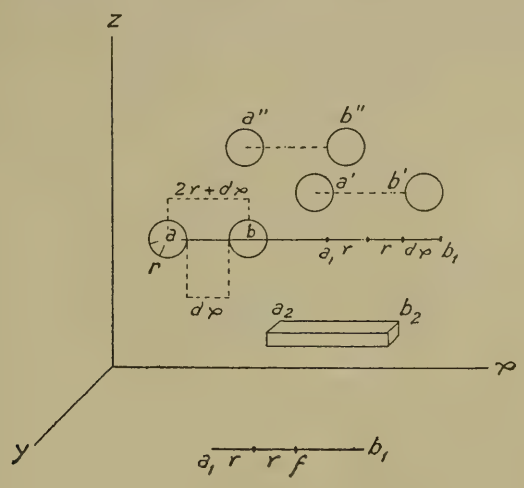


Figura 11

para ello sería preciso no que y estuviera entre 0 y ∂y, y z entre 0 y ∂z, sino que rigorosamente tuviéramos

$$y = 0, \qquad z = 0.$$

Esto podríamos suponerlo si fuera aplicable á esta teoría de lo discontinuo la continuidad del cálculo diferencial; pero sin procurar una exactitud absoluta, podemos admitir que el resultado tiene la suficiente aproximación en la realidad de los hechos y cuando se supone un número enorme de esferillas muy pequeñas respecto al espacio en que se agitan.

Con todas estas salvedades diremos que las esferillas de

cada par tienen sus centros en una paralela al eje de las x, como $a\ b$, como $a'\ b'$, $a''\ b''$, y así sucesivamente, hasta el número N_2 de pares de esferillas, ó si se quiere, de pares de velocidades del primero y segundo grupo. Porque, no lo olvidemos, á cada esferilla va unida una velocidad del grupo correspondiente.

Podemos, pues, decir, que los pares de centros de esferillas, que consideramos, están contenidos en paralelepípedos, cuyos lados varían:

$$\begin{array}{lcl} \text{desde } 0 & \text{á} & \partial z \\ 0 & \text{á} & \partial y \\ 2r & \text{á} & 2r + \partial x. \end{array}$$

Y aun pudiéramos agregar que estos paralelepípedos $a_2\ b_2$ (y presentamos uno como ejemplo) en el límite se reducen á rectas paralelas al eje de las x: $a\ b$, $a'\ b'$, $a''\ b''$ .....

Una pequeña aclaración todavía, para desvanecer toda duda.

La distancia ab en la figura 11 se compone del radio r de la esfera a, del radio r de la esfera b y de la distancia entre las dos esferas, á la cual hemos llamado dx.

Pero es evidente que lo mismo da colocar dx entre los dos radios que ponerla á continuación, como en $a_1\ b_1$. Donde se ve, dentro de la definición general, que la distancia de los centros varía desde $2r$ á $2r + \partial x$.

Por razones que luego veremos, es más cómoda la primera expresión.

El número N_2 de pares de esferillas, ó de pares de velocidades, del primer grupo y del segundo, será el mismo que en el caso general

$$N_2 = C\chi(c_1)\,\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

y ya sabemos que y varía entre 0 y dy; que z varía análo-

gamente entre 0 y dz, y sólo nos falta expresar dx, que vamos á definir por medio de las velocidades de las dos esferillas.

Y en estas pequeñeces elementales estriba en cierto modo el método para la resolución del problema, que entre los varios que pueden presentarse es uno de los más satisfactorios, porque es de los que más hablan á los sentidos, y ésta es una condición importantísima para la enseñanza.

Pongamos en una figura aparte las dos esferillas de que se trata; sea la figura 12.

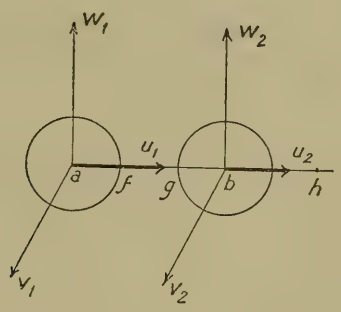


Figura 12

El centro de la esferilla a del primer grupo tiene una velocidad cuyos componentes son u_1, v_1, w_1. La velocidad sería la diagonal del paralelepípedo construído sobre estas tres componentes.

La suprimimos en la figura para evitar complicaciones.

Del mismo modo, el centro b de la esferilla del segundo grupo tendrá una velocidad cuyos componentes serán u_2, v_2, w_2, y la velocidad resultante, que es la de dicha esferilla, sería también la diagonal del paralelepípedo construído sobre estas tres componentes.

Tampoco la hemos representado en la figura.

Si además supomos, para fijar las ideas, que se verifica

$$u_1 > u_2,$$

es decir, que la esferilla a va detrás de la b, y con más velocidad, es claro que se encontrarán; y si la distancia fg es muy pequeña, como suponemos, y por eso la hemos representado por dx, se encontrarán muy pronto, habrá un choque al cabo de un tiempo, que podemos representar por dt.

En todos los demás pares de esferillas a', b'; a'', b''; ..... de la figura 11 sucederá otro tanto; advirtiendo que las distancias $dx = fg$ de la figura 12 en las distintas esferillas serán distintas naturalmente.

Pero detengámonos todavía en este punto, que tiene importancia.

La esferilla a (fig. 12) va detrás de la esferilla b, que es como decir que el punto f va detrás del punto g: *cuando se encuentren se verificará el choque.*

¿Cuándo se encontrarán?

Este es el problema de álgebra elemental que todos mis alumnos conocen con el nombre del problema de *los dos correos.*

Supongamos que f y g se encuentran en h.

La ecuación de primer grado que resuelve el problema se plantea sencillamente:

$$fh - gh = fg;$$

pero siendo u_1 la velocidad de f, siendo u_2 la velocidad de g, siendo dt el tiempo que tardan en encontrarse, y siendo el movimiento uniforme, claro es que tendremos:

$$fh = u_1 \partial t, \qquad gh = u_2 \partial t,$$

con lo cual la ecuación anterior se convierte en

$$u_1 \partial t - u_2 \partial t = fg,$$

ó bien,

$$(u_1 - u_2) \partial t = fg.$$

Pero fg es precisamente dx; luego

$$\partial x = (u_1 - u_2)\,\partial t.$$

Si dt es el mayor tiempo que tarda en verificarse el choque en todo el sistema de pares de esferillas, dx no será un intervalo fg cualquiera, sino el límite que hemos llamado dx.

Y entonces podremos decir que x varía entre

$$2r \quad \text{y} \quad 2r + (u_1 - u_2)\,\partial t.$$

Y la fórmula del número N_2 se convertirá en la siguiente:

$$N_2 = C\chi(c_1)\,\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial y\,\partial z\,(u_1 - u_2)\,\partial t,$$

en que N_2 expresará, como hemos dicho, el número de choques en el intervalo dt.

En el tiempo dt, que suponemos que es el que corresponde al máximo intervalo fg de todos los pares de esferillas, todas ellas chocarán.

Y como suponemos, y ésta es una hipótesis que establecimos desde el principio, que nunca una esferilla chocaba con otras dos en el mismo instante, haciendo dt suficientemente pequeña, en este intervalo cada par de esferillas chocará una vez y una sola.

Esta serie de choques alterarán las velocidades, y tendremos que establecer las condiciones para que dicho cambio de velocidades no altere los dos grupos comprendidos entre

$$\begin{array}{ll} u_1 & u_1 + du_1 \\ v_1 & v_1 + dv_1 \\ w_1 & w_1 + dw_1, \end{array}$$

respecto al primer grupo. Y respecto al segundo, que tam-

poco se alteren las velocidades cuyas componentes están comprendidas entre

$$u_2 \quad \text{y} \quad u_2 + d\,u_2$$
$$v_2 \quad \text{y} \quad v_2 + d\,v_2$$
$$w_2 \quad \text{y} \quad w_2 + d\,w_2.$$

Hemos dicho, que no se alteren las velocidades comprendidas entre estos límites ó sus componentes, y en rigor no nos hemos expresado con exactitud.

Estas velocidades ó sus componentes variarán; lo que importa es que queden en el conjunto de choques, siempre comprendidas entre los límites expresados los mismos números de esferillas.

Es preciso además que las distancias de los centros en el intervalo $d\,t$ tenga sus componentes comprendidas entre los límites

$$0 \quad \text{y} \quad \partial z$$
$$0 \quad \text{y} \quad \partial y$$
$$2\,r \quad \text{y} \quad 2\,r + (u_1 - u_2)\,\partial t,$$

que es como si dijéramos que chocaron en una línea paralela al eje de las x.

Representemos en términos generales las nuevas velocidades por las mismas letras primitivas con un acento.

Es decir, que si la esferilla e_1 tenía una velocidad cuyas componentes eran

$$u_1 \qquad v_1 \qquad w_1,$$

adquirirá las componentes

$$u'_1 \qquad v'_1 \qquad w'_1,$$

y del mismo modo, la esferilla e_2, para la cual las componentes de la velocidad eran, por ejemplo,

$$u_2 \qquad v_2 \qquad w_2,$$

las cambiará por

$$u'_2 \qquad v'_2 \qquad w'_2.$$

Detengámonos todavía un momento para ver cuáles serán estas nuevas velocidades.

En la figura 12 se ve desde luego que ni las velocidades v_1, w_1 ni las v_2, w_2, que son perpendiculares á la línea de los centros, y por lo tanto, á la línea del choque, se alteran en lo más mínimo, si la elasticidad es perfecta y las superficies de las esferas son perfectamente lisas.

De modo que podremos establecer desde luego,

$$v_1 = v'_1 \qquad w_1 = w'_1$$
$$v_2 = v'_2 \qquad w_1 = w'_2.$$

En cambio, u_1, u_2 se alteran. Se alteran *cambiándose.* Es decir, que la esferilla e_1, que tenía la velocidad u_1, adquiere la velocidad u_2, y á la vez la esferilla e_2, que tenía la velocidad u_2, adquiere la velocidad u_1.

Las figuras 13 y 13 bis expresan estos cambios.

Así, $a\,c_1$ de la figura 13 es la resultante de u_1, v_1, w_1. Y $b\,c_2$ es la resultante de u_2, v_2, w_2. En la figura 13 bis, al punto a se aplicará u_2, y al punto b, á su vez, u_1. De modo que tendremos $a\,c'_1$ como resultante de u_2, v_1, w_1; y $b\,c'_2$ como resultante de u_1, v_2, w_2.

Este cambio de velocidades en el choque de las esferillas e_1 y e_2 se demuestra en la Física elemental por manera bien sencilla.

A pesar de todo, reproduciremos aquí la demostración, que es análoga á la que dimos en otra conferencia.

En el choque de las esferas perfectamente elásticas hay que expresar dos condiciones: La invariabilidad de la suma

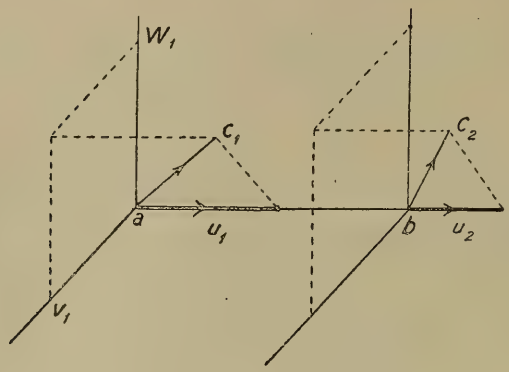


Figura 13

de las fuerzas vivas y la invariabilidad de la suma de las cantidades de movimiento.

Si prescindimos de las velocidades perpendiculares á las

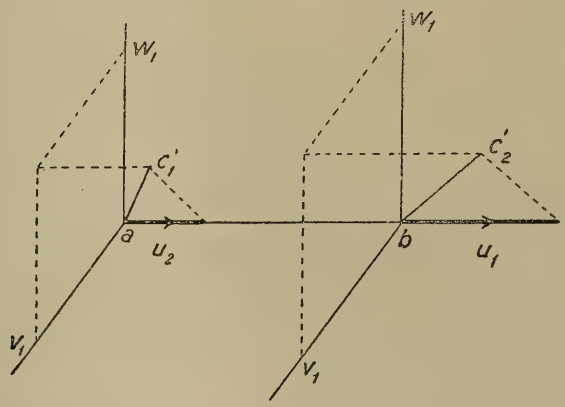


Figura 13 bis

líneas del choque, como puede hacerse porque en las ecuaciones generales dan términos idénticos en ambos miembros de cada ecuación, y nos atenemos tan sólo á las

velocidades u, las dos condiciones indicadas serán las siguientes:

$$m u_1^2 + m u_2^2 = m u'^2_1 + m u'^2_2$$
$$m u_1 + m u_2 = m u'_1 + m u'_2,$$

y dividiendo por m,

$$u_1^2 + u_2^2 = u'^2_1 + u'^2_2$$
$$u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2.$$

De estas ecuaciones podremos despejar u'_1 y u'_2, que son las velocidades después del choque, en función de u_1 y u_2, velocidades anteriores al choque, y tendremos la serie de ecuaciones siguientes, que escribimos sin explicación porque son tan elementales que no la necesitan. Tenemos, pues,

$$u_1^2 - u'^2_1 = u'^2_2 - u_2^2$$
$$u_1 - u'_1 = u'_2 - u_2,$$

y dividiendo,

$$u_1 + u'_1 = u'_2 + u_2$$
$$u_1 - u_2 = u'_2 - u'_1,$$

y de ésta y de

$$u_1 + u_2 = u'_1 + u'_2$$

se deduce

$$2 u_1 = 2 u'_2$$
$$2 u_2 = 2 u'_1,$$

y por fin,

$$u'_1 = u_2$$
$$u'_2 = u_1.$$

Es decir, como antes indicábamos, que las esferillas han cambiado sus velocidades.

Será preciso que el número N_2, en el sistema gaseoso, después del choque sea el mismo que antes; pero al aplicar la fórmula general debemos hacer una observación.

En la figura 12 la esferilla *a* alcanzaba á la esferilla *b* porque la velocidad u_1, por hipótesis, era mayor que u_2.

Mas si representamos en la figura 14 las dos esferillas y

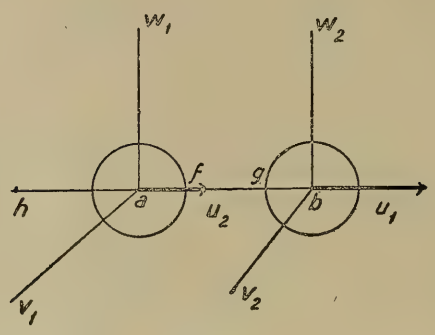


Figura 14

sus velocidades después del choque, observaremos que la esferilla *a* no puede alcanzar á la esferilla *b*, porque la nueva velocidad u_2 que ha adquirido es menor que la velocidad u_1 que ha adquirido la esferilla que va delante.

Y debemos tener en cuenta esta circunstancia al calcular el valor de *fg*.

Las dos esferillas no se encontrarán, *se han encontrado en* h.

De suerte que

$$fg = hg - hf = u_1 \partial t - u_2 \partial t = (u_1 - u_2) \partial t.$$

*
* *

Vemos, en resumen, que el efecto de los choques consiste en convertir cada par en otro par con diferentes velocidades, precisamente las que hemos calculado por las fórmulas del choque de dos esferillas elásticas.

Una esferilla del primer grupo tenía antes del choque velocidades comprendidas en los límites que indica el siguiente cuadro:

$$l_1 = \left| \begin{array}{l} u_1 \ldots\ldots u_1 + \partial u_1 \\ v_1 \ldots\ldots v_1 + \partial v_1 \\ w_1 \ldots\ldots w_1 + \partial w_1 \end{array} \right|$$

que abreviadamente representamos por l_1.

Pues esta esferilla después del choque tendrá una velocidad cuyas componentes estarán en los límites que marca el siguiente cuadro:

$$l'_1 = \left| \begin{array}{l} u'_1 \ldots\ldots u'_1 + \partial u'_1 \\ v_1 \ldots\ldots v_1 + \partial v_1 \\ w_1 \ldots\ldots w_1 + \partial w_1 \end{array} \right|$$

en el que sólo habrá variado la componente paralela al eje de las x; las otras dos se conservarán, aunque á veces para más simetría designaremos v_1 y w_1, después del choque, por v'_1 w'_1; pero recordando que así como u_1 es distinta de u_1, y tiene el valor que antes dedujimos, así v'_1 y w'_1 no han cambiado, y se tiene

$$v'_1 = v_1; \qquad w'_1 = w_1.$$

Estas esferillas del primer grupo después del choque tienen, pues, sus componentes entre los límites l'_1.

Esto respecto á cualquier esferilla del primer grupo perteneciente á uno de los pares eficaces para el choque.

Lo mismo podemos decir de la segunda esferilla de cada par, es decir, de la que corresponde al segundo grupo.

Antes del choque sus velocidades, es decir, las componentes de su velocidad estaban contenidas en los límites

$$l_2 = \left| \begin{array}{l} u_2 \ldots\ldots u_2 + \partial u_2 \\ v_2 \ldots\ldots v_2 + \partial v_2 \\ w_2 \ldots\ldots w_2 + \partial w_2 \end{array} \right|$$

que representamos abreviadamente por l'_2.

Después del choque, estas esferillas habrán cambiado la componente paralela al eje de las x, conservando las otras dos componentes; es decir, que sus límites serán:

$$l'_2 = \left| \begin{array}{l} u'_2 \ldots\ldots u'_2 + \partial u'_2 \\ v_2 \ldots\ldots v_2 + \partial v_2 \\ w_2 \ldots\ldots w_2 + \partial w_2 \end{array} \right|$$

representados por l'_2.

Y repetiremos, como antes, que por la simetría designaremos las componentes paralelas al eje de las y, y al eje de las z por v'_2 y w'_2, aunque recordando siempre que se tiene

$$v'_2 = v_2; \qquad w'_2 = w_2;$$

en cuanto á u'_2, la hemos deducido antes de las ecuaciones del choque.

Por último, cada dos esferillas que choquen, un momento después de dicho choque estarán en un paralelepípedo elemental y alargado, paralelamente al eje de las x, y sus dimensiones estarán entre

$$\left| \begin{array}{l} 0 \ldots\ldots \partial y \\ 0 \ldots\ldots \partial z \\ x' \ldots\ldots x' + \partial x' \end{array} \right|$$

x' será, como antes, la suma de los radios, es decir, $2r$, y en

cuanto á $\partial x'$ tomaremos la misma dimensión que en el primitivo paralelepípedo, á saber $(u_1 - u_2)\,\partial t$; que, sustituyendo en vez de u_1 y de u_2 sus valores en función de las velocidades después del choque, se convertirá en

$$(u'_2 - u'_1)\,\partial t.$$

Y ahora recordemos la expresión que da el número de pares de esferillas eficaces para el choque del primer grupo y el segundo, fórmula que era ésta:

$$C\chi(c_1)\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial y\,\partial z\,(u_1 - u_2)\,\partial t \quad [1]$$

y tomando las letras acentuadas, formemos una expresión análoga, que será:

$$C\chi(c'_1)\chi(c'_2)\,\partial u'_1\,\partial v'_1\,\partial w'_1\,\partial u'_2\,\partial v'_2\,\partial w'_2\,\partial y\,\partial z\,(u'_1 - u'_2)\,\partial t \quad [2]$$

á la cual no le damos todavía significación alguna, ni afirmamos nada respecto á ella. Sólo decimos que es análoga á la anterior en la forma.

Que el conjunto de los grupos l'_1 y l'_2 existe en el sistema es evidente, puesto que suponemos permanente el régimen, y si existen ahora existían antes. No serían éstos; no importa, serían otros idénticos; pero si las velocidades están distribuidas uniformemente en todas las orientaciones, si existían los pares cuyos límites eran l'_1 y l'_2, existían también pares constituídos de tal modo que sus esferillas tendrían velocidades paralelas al eje de las x, iguales y contrarias á las que marcan los límites l_1 y l_2.

Es decir, que un momento antes del choque existirán pares de esferillas de componentes comprendidas en los límites

$$-l'_1 = -\begin{vmatrix} u'_1 \;\ldots\ldots\; u'_1 + \partial u'_1 \\ v'_1 \;\ldots\ldots\; v'_1 + \partial v'_1 \\ w'_1 \;\ldots\ldots\; w'_1 + \partial w'_1 \end{vmatrix} \text{ y } -l'_2 = -\begin{vmatrix} u'_2 \;\ldots\ldots\; u'_2 + \partial u'_2 \\ v'_2 \;\ldots\ldots\; v'_2 + \partial v'_2 \\ w'_2 \;\ldots\ldots\; w'_2 + \partial w'_2 \end{vmatrix}$$

y cuyos centros se hallarán entre los límites

$$\left| \begin{array}{l} 0 \ldots\ldots \partial y \\ 0 \ldots\ldots \partial z \\ x' \ldots\ldots x' + \partial x' \end{array} \right|$$

Y sigamos nuestro razonamiento.

En los grupos $-l'_1$ y $-l'_2$, las esferillas de cada par habrán chocado en el tiempo ∂t, porque la esferilla que iba delante en los pares primitivos, y que tenía la velocidad u_2, ha adquirido la velocidad u_1, que era mayor; y la que tenía la velocidad u_1 ha adquirido la velocidad u_2, y al cambiar de signo las velocidades, la esferilla que va delante tiene la velocidad u_2 y la que va detrás la velocidad u_1, con lo cual la segunda alcanzará á la primera y se verificará el choque.

Pero si en la fórmula [2] cambiamos los signos á los componentes, esta fórmula [2] adquiere un sentido perfectamente determinado análogo al de la fórmula [1], es decir, que expresa, prescindiendo de la constante C, el número de pares que pueden formarse con dos grupos correspondientes á los límites de velocidades $-l'_1$ y $-l'_2$.

Esto es evidente, es la forma general para expresar este número, es la misma forma [1], prescindiendo de la constante C, sin otra alteración que substituir á las letras primitivas las letras acentuadas.

Ahora bien; como hemos dicho que estos grupos existirán forzosamente en el sistema para todo momento, y por lo tanto en el tiempo diferencial ∂t, los choques de que este nuevo sistema de pares sea susceptible se verificarán en efecto y cada dos esferillas volverán á cambiar de velocidades; la que tenía, por ejemplo, $-u_2$ antes del choque, después del choque tendrá $-u_1$, y la que tenía $-u_1$ tendrá $-u_2$. No se restablecerán las velocidades c_1, c_2, pero se restablecerán sus simétricas; como puede verse fácil-

mente en las figuras 13 y 13 bis, prescindiendo de las componentes paralelas á los ejes de las y y de las z. Y fijándonos sólo en las componentes paralelas al eje de las x, se ve desde luego que obtenemos un sistema simétrico, por decirlo así, respecto al primitivo. En el primitivo teníamos las velocidades u en este orden, de izquierda á derecha,

$$\ldots\ldots u_1 \rightarrow u_2, \quad u_1 \rightarrow u_2, \quad u_1 \rightarrow u_2 \ldots\ldots$$

y como la u_1 era mayor que la u_2, chocaban de izquierda á derecha también.

Ahora tendremos de derecha á izquierda pares análogos á éste,

$$\ldots\ldots \leftarrow u_1, \quad \leftarrow u_2, \quad \leftarrow u_1, \quad \leftarrow u_2 \ldots\ldots$$

en que las esferillas que tienen la velocidad u_2 no alcanzan á las que tienen la velocidad u_1; pero las que tienen la velocidad u_1 alcanzarán de derecha á izquierda á las que tienen la velocidad u_2 y se reconstituirán pares de choque simétricos á los primitivos.

Mas aún, el número de éstos será el mismo, porque el coeficiente de reducción C será idéntico al de la fórmula [1].

En suma: el número de choques que expresa la fórmula [2], incluyendo, naturalmente, la constante, será idéntico al que expresa la fórmula [1], con la misma constante C.

Y ahora se ve que legítimamente pueden igualarse ambas fórmulas.

Podemos, pues, escribir la ecuación

$$\begin{aligned} &C\chi(c_1)\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial y\,\partial z\,(u_1 - u_2)\,\partial t = \\ &= C\chi(c'_1)\chi(c'_2)\,\partial u'_1\,\partial v'_1\,\partial w'_1\,\partial u'_2\,\partial v'_2\,\partial w'_2\,\partial y\,\partial z\,(u_1 - u_2)\,\partial t \end{aligned} \qquad [A]$$

El primer miembro expresa el número de choques ó de pares eficaces en los primitivos grupos, es decir, en los de los límites (l_1) y (l_2).

El segundo grupo expresa el número de choques ó de pares eficaces en el sistema $(-l'_1)$ $(-l'_2)$, y éstos dan, por el choque, un número igual de pares, no seguramente en el sistema (l_1) (l_2), pero sí en el simétrico, que da lo mismo.

Y así se comprende que no se altere la distribución de velocidades, porque la fórmula [1] indica que por el choque se pierden el número de pares del sistema (l_1) (l_2) que expresa el valor de $[A]$.

Pero al mismo tiempo el sistema $(-l'_1)$ $(-l'_2)$ reproduce un número igual de pares del sistema simétrico, y á su vez, en el intervalo ∂t, un sistema simétrico habrá perdido igual número de pares, pero habrá reproducido los del sistema (l_1) (l_2).

***

Bueno será, sin embargo, insistir algo sobre la relación $[A]$, porque estos razonamientos reconocemos que son un tanto sutiles y que dejan en el espíritu alguna vaguedad.

La demostración parece clara y parece rigurosa; mas para abarcarla en su conjunto vamos á darle una forma esquemática y á condensar los anteriores razonamientos en una figura.

Hemos considerado un par de esferillas de las eficaces para el choque, pero hemos supuesto un caso particular, á saber: que la esferilla e_1 va detrás de la esferilla e_2; que la primera lleva la velocidad u_1 y la esferilla e_2 la velocidad u_2, y que, por último, u_1 es mayor que u_2, con lo cual es evidente que el choque se realizará, porque la que va detrás lleva más velocidad que la que va delante.

Como los movimientos son paralelos al eje de las x, y como se verifican de izquierda á derecha, la velocidad relativa de ambas esferillas será evidentemente $u_1 - u_2$.

Mas éste es un caso particular; pudieran presentarse otros

tres casos de choque: cuando las esferillas caminaran en sentido contrario al anterior, ó cuando las dos esferillas corrieran una al encuentro de la otra.

De aquí resultan, como decimos, cuatro casos, que están representados en las líneas A de la figura 14 bis.

En el primero el movimiento es de izquierda á derecha y u_1 es mayor que u_2.

En el segundo el movimiento es de derecha á izquierda y u_2 es mayor que u_1.

En el tercero las esferillas corren en sentido contrario y u_1 es mayor que u_2.

En el cuarto también corren en sentido contrario, pero u_2 es mayor que u_1.

En la demostración precedente sólo hemos considerado explícitamente el primer caso; pero es claro que á los otros tres se les puede aplicar los mismos razonamientos y las mismas fórmulas.

En suma; que en la fórmula [1] están comprendidos evidentemente estos cuatro casos.

Verificado el choque, la línea A se convierte en la línea B, y el resultado es, según se deduce de la regla general y según se deduce de las fórmulas, que las esferillas e_1 y e_2 cambian de velocidades.

Sin más que mirar á la figura se ve en la línea B esto con perfecta claridad. La esferilla e_1 siempre toma la velocidad u_2, y la esferilla e_2 siempre toma la velocidad u_1.

Prosigamos representando esquemáticamente la demostración anterior.

Si la línea de pares B existe en un momento cualquiera en el sistema gaseoso, también existirá en cualquier instante la misma línea, con velocidades cambiadas, admitiendo, como admitimos, la permanencia estadística del movimiento y la uniformidad estadística también del mismo.

Es decir, que en cualquier instante, y por lo tanto en el instante del choque, existirán pares de esferillas como indica

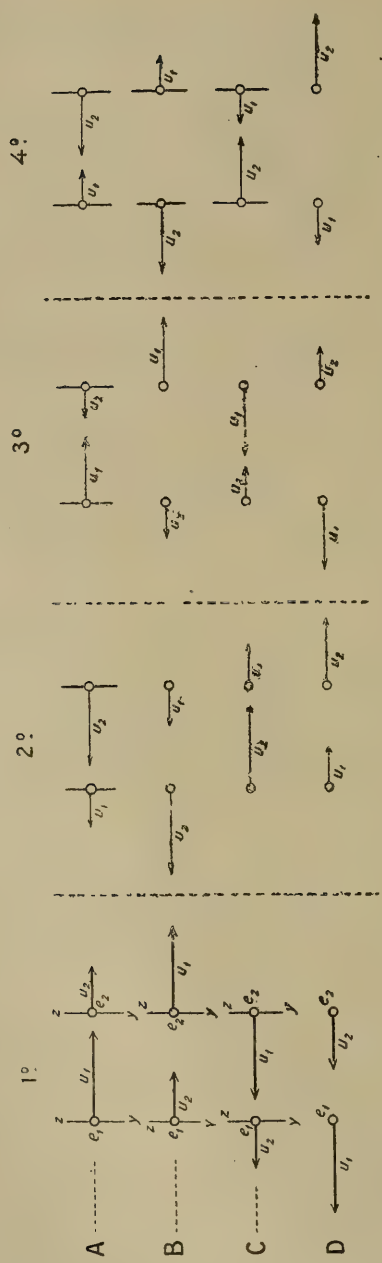


Figura 14 bis

la línea *C* de la misma figura; pero en esta línea se observa que en los cuatro casos hay choque, porque la esferilla que va detrás tiene más velocidad que la que va delante y el resultado de estos choques está representado por la línea *D* de la figura.

Verdad es que en esta línea parece que no se verifican los choques, y en efecto, la primera esferilla no chocará con la primera; pero después de la segunda esferilla vendrá la tercera y las esferillas *b*, *c* de la línea *D'*, éstas sí chocarán y están en el mismo caso que la segunda figura de la línea *A*.

Lo mismo podríamos repetir para los otros tres casos de la línea *D*.

Así por ejemplo, el segundo caso de esta línea *D* reproduce exactamente el primero de la línea *A*.

Y en suma, los cuatro casos de la línea *D* son la reproducción de la línea *A*, con esta modificación: que el segundo es la reproducción del primero, y el primero de la línea *D* es la reproducción del segundo, análogamente para los dos últimos.

De aquí resulta que el choque de los pares del sistema *C*, reproducen en el tiempo del choque todos los pares que han desaparecido de la primera línea.

Agreguemos aún, que ésta es una condición necesaria y suficiente: necesaria, porque si se perdieran más pares de un sistema de los que se reproducen, se alteraría la distribución; suficiente, porque si la compensación existe, la distribución queda inalterable.

Basta, pues, que escribamos la condición necesaria para que los choques de la línea *C* sean en el mismo número que los de la línea *A*.

El número de choques de la línea *A* está expresado por la fórmula [1], y el número de choques de la línea *C* por la fórmula [2]; luego basta igualar estas expresiones y resultará la ecuación siguiente, que es la que antes escribíamos:

$$C\chi(c_1)\chi(c_2)\partial u_1\partial v_1\partial w_1\partial u_2\partial v_2\partial w_2\partial x\partial y(u_1-u_2)\partial t=$$
$$=C\chi(c'_1)\chi(c'_2)\partial u'_1\partial v'_1\partial w'_1\partial u'_2\partial v'_2\partial w'_2\partial x\partial y(u'_2-u'_1)\partial t.$$

Esta es, pues, la condición á que ha de satisfacerse para que no se altere la distribución de velocidades.

*
* *

Y antes de concluir este punto hagamos dos observaciones:

1.ª Toda la demostración está fundada en la constancia de la letra C.

Esta constante en rigor es el producto de otras dos; una de ellas es la que representábamos por $\frac{1}{V}$ (siendo V el volumen) en las fórmulas anteriores, y nada tenemos que agregar á lo que tenemos dicho.

Pero al estudiar los choques en el interior del paralelepípedo $a_2\ b_2$ de la figura 11, no todos los pares de moléculas encerradas en dicho paralelepípedo chocarán entre sí.

Los choques serán en número inferior al de pares. Dos moléculas de un par que están á punto de llegar al choque saldrán quizá del paralelepípedo antes de llegar al contacto por virtud de las velocidades v_1, w_1, v_2 w_2; la molécula de otro par no chocará con todas las moléculas de subíndice distinto, y en suma, los accidentes de la agitación molecular serán causa de que se verifique menor número de choques que el número de pares contenidos en el paralelepípedo.

Por eso habrá que emplear un coeficiente α menor que la unidad, y por eso el coeficiente C se compone de dos factores:

$$C=\alpha\frac{1}{V}.$$

El factor $\frac{1}{V}$ es, evidentemente, constante, y el segundo factor α *suponemos* que es constante también; es decir, que los accidentes de la agitación molecular, de los cuales depende el coeficiente α, son los mismos en los diferentes choques de que depende la demostración que acabamos de dar; es decir, en los choques de los pares que contiene la línea *A* y en los choques que contiene la línea *C*.

Esto parece natural porque están encerrados en paralelepípedos de las mismas dimensiones; las componentes de las velocidades paralelas á los ejes de las y y de las z son idénticas y las componentes paralelas de eje de las x son también iguales en magnitud.

Se trata, pues, de regiones análogas en análogas condiciones, y parece natural admitir la constancia del coefi, ciente α.

2.ª Esta observación se refiere á la figura 14 bis. Las líneas $z\,y$ representan en proyección el plano de las $z\,y$ que se reproduce constamente en los elementos de esta figura.

***

Hemos dicho, que para que no se altere la distribución de velocidades, es decir, que para que el número de choques de la línea *A* sea igual al número de choques de la línea *C*, y que, por lo tanto, el número de pares perdidos en la línea *A* sea igual al número de pares ganados por la línea *C*, es indispensable que se verifique la ecuación

$$C\chi(c_1)\,\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial v_1\,\partial w_1\,\partial u_2\,\partial v_2\,\partial w_2\,\partial y\,\partial z\,(u_1 - u_2)\,\partial t =$$
$$= C\chi(c'_1)\,\chi(c'_2)\,\partial u'_1\,\partial v'_1\,\partial w'_1\,\partial u'_2\,\partial v'_2\,\partial w'_2\,\partial y\,\partial z\,(u'_2 - u'_1)\,\partial t.$$

Pero esta ecuación puede simplificarse suprimiendo factores comunes de ambos miembros. Puede suprimirse por

lo pronto la constante $C \cdot \partial y \cdot \partial z$. Y como las velocidades v_1, v_2 no cambian, y tampoco w_1, w_2, se tendrá

$$\partial v_1 = \partial v'_1; \quad \partial w_1 = \partial w'_1; \quad \partial v_2 = \partial v'_2; \quad \partial w_2 = \partial w'_2,$$

que podrán también suprimirse, y la ecuación anterior quedará reducida á esta otra:

$$\chi(c_1)\,\chi(c_2)\,\partial u_1\,\partial u_2\,(u_1 - u_2)\,\partial t =$$
$$= \chi(c'_1)\,\chi(c'_2)\,\partial u'_1\,\partial u'_2\,(u'_2 - u'_1)\,\partial t.$$

Ahora bien, hemos dicho, que en el choque cada dos esferillas cambian sus velocidades; de suerte que se tiene

$$u'_1 = u_2, \qquad u'_2 = u_1,$$

y por lo tanto,

$$\partial u'_1 = \partial u_2, \qquad \partial u'_2 = \partial u_1, \qquad u'_2 - u'_1 = u_1 - u_2.$$

De suerte que todos estos factores podrán suprimirse en ambos miembros, y quedará

$$\chi(c_1)\,\chi(c_2) = \chi(c'_1)\,\chi(c'_2),$$

que es la ecuación del problema.

Aquella á que hemos de satisfacer para que los choques no alteren la distribución de velocidades.

***

El problema queda reducido ya á determinar la forma que ha de tener la función χ, para que, sean cuales fueren los valores de las c, se verifique la condición precedente.

Pero advirtamos que c_1, c_2, c'_1, c'_2 no son arbitrarias en

absoluto, sino que están ligadas por la siguiente condición:

$$c_1^2 + c_2^2 = c'^2_1 + c'^2_2,$$

puesto que la fuerza viva del sistema antes y después del choque debe ser la misma.

Podremos, pues, expresar el problema analítico de este modo:

Hallar la forma de la función χ de suerte que se verifiquen estas dos condiciones:

$$\chi(c_1)\,\chi(c_2) = \chi(c'_1)\,\chi(c'_2)$$
$$c_1^2 + c_2^2 = c'^2_1 + c'^2_2.$$

Para simplificar la solución haremos, que en la ecuación primera entren los cuadrados de las velocidades lo mismo que en la segunda.

En efecto; se tiene evidentemente

$$\chi(c_1) = \chi(\sqrt{c_1^2}),$$

y representando por ϕ la forma de la función que afecta á c_1^2, tendremos:

$$\chi(c_1) = \phi(c_1^2).$$

Hallar χ es lo mismo que hallar ϕ, porque la forma ϕ pudiéramos decir que es $(\sqrt{})$.

De suerte que las dos ecuaciones del problema se convierten en

$$\phi(c_1^2)\,\phi(c_2^2) = \phi(c'^2_1)\,\phi(c'^2_2)$$
$$c_1^2 + c_2^2 = c'^2_1 + c'^2_2.$$

Para simplificar aún más la escritura cambiaremos de notación y escribiremos:

$$c_1^2 = \gamma_1, \qquad c_2^2 = \gamma_2, \qquad c'^2_1 = \gamma'_1, \qquad c'^2_2 = \gamma'_2,$$

con lo cual las dos ecuaciones fundamentales toman esta forma definitiva:

$$\psi(\gamma_1)\,\psi(\gamma_2) = \psi(\gamma'_1)\,\psi(\gamma'_2)$$
$$\gamma_1 + \gamma_2 = \gamma'_1 + \gamma'_2,$$

y eliminando γ'_2 de la primera,

$$\psi(\gamma_1)\,\psi(\gamma_2) = \psi(\gamma'_1)\,\psi(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma'_1).$$

La forma de la función ψ debe, por lo tanto, ser tal que para todos los valores de γ_1, γ_2, γ'_1 la ecuación precedente quede satisfecha.

Si esta ecuación ha de quedar satisfecha considerando á las tres γ que entran como independientes, sus derivadas también deberán verificarse con esta condición.

Veamos si de este modo podemos eliminar alguna de estas variables.

Diferenciando sucesivamente, con relación á γ_1 y γ_2, tendremos:

$$\psi'(\gamma_1)\,\psi(\gamma_2) = \psi(\gamma'_1)\,\psi'(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma'_1)$$
$$\psi(\gamma_1)\,\psi'(\gamma_2) = \psi(\gamma'_1)\,\psi'(\gamma_1 + \gamma_2 - \gamma'_1),$$

y dividiendo una por otra,

$$\frac{\psi'(\gamma_1)\,\psi(\gamma_2)}{\psi(\gamma_1)\,\psi'(\gamma_2)} = 1,$$

ó bien,

$$\frac{\psi'(\gamma_1)}{\psi(\gamma_1)} = \frac{\psi'(\gamma_2)}{\psi(\gamma_2)}.$$

Es decir, que el cociente $\frac{\psi'}{\psi}$ tiene un valor independiente de γ, ó sea el mismo para γ_1 que para γ_2, lo cual equivale á expresar que es independiente de c_1 y de c_2, y ha de ser

constante, sean cuales fueren los pares de velocidades que se consideren.

Tenemos, pues, la condición analítica necesaria para determinar ψ, que será:

$$\frac{\psi'(\gamma_1)}{\psi(\gamma_1)} = \text{constante.}$$

Esta última constante la representaremos por $-h$, y le damos el signo menos, porque á medida que la velocidad crece, la densidad de las velocidades disminuye; es decir, hay menos velocidades con el valor más elevado; luego ψ' debe ser negativa, y como ψ es positiva esencialmente, la constante del segundo miembro debe ser negativa también.

Dicha ecuación la podremos poner bajo esta forma:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(\gamma_1)}{\partial \gamma_1}}{\psi(\gamma_1)} = -h;$$

de donde

$$\frac{\partial \psi(\gamma_1)}{\partial \gamma_1} = -h\,\psi(\gamma_1),$$

ó bien,

$$\frac{\partial \psi(\gamma_1)}{\psi(\gamma_1)} = -h\,\partial \gamma_1;$$

é integrando,

$$\log \psi(\gamma_1) = -h\gamma_1 + \log A,$$

dando á la constante la forma de logaritmo, con lo cual se puede escribir:

$$\log \psi(\gamma_1) - \log A = -h\gamma_1$$

ó bien,

$$\log \frac{\psi(\gamma_1)}{A} = -h\gamma_1.$$

Y pasando de los logaritmos á los exponenciales,

$$\psi(\gamma_1) = A\, e^{-h\gamma_1}.$$

Pero $\gamma_1 = c_1^2$; luego

$$\psi(c_1^2) = A\, e^{-hc_1^2}.$$

Por último, volviendo á la función χ, y suprimiendo el subíndice de c, que ya no es necesario porque se trata de una velocidad cualquiera, tendremos:

$$\chi(c) = A\, e^{-hc^2}.$$

Tal es la expresión de la densidad de velocidades para que el estado del gas sea permanente y no se altere por los choques.

Y así podemos decir: el número de esferillas que tienen velocidades tales que las componentes de éstas se hallan comprendidas entre

$$\begin{array}{ccc} u & \text{y} & u + \partial u \\ v & \text{y} & v + \partial v, \\ w & \text{y} & w + \partial w \end{array}$$

es

$$N_2 = A\, e^{-hc^2}\, \partial u\, \partial v\, \partial w.$$

Para que esta expresión pueda aplicarse á cada caso, deberemos determinar las constante A y h por procedimientos ó experiencias especiales.

El estudio de la fórmula anterior y de sus consecuencias para el movimiento del gas constituirá el objeto de la conferencia inmediata.

VI.—Bosquejo del estudio de las mareas

POR

EDUARDO LEÓN Y ORTIZ (1).

Las hermosas tintas que se suceden al despertar de la mañana son las mismas que se contemplan a la caída de la tarde; pero el efecto no es el mismo, porque en el primer caso la claridad va en aumento y en el segundo va menguando. Por eso, todo lo que tiene de alegre la mañana tiene de melancólica la tarde. Digo esto para explicar la situación de mi ánimo al presentarme ante la docta Corporación, no con los alientos de la juventud, sino con el cansancio de la edad. Todavía, si a este cansancio hubiera contribuído una valiosa labor científica, pudiera sentirme reanimado; mas lejos de ello, sólo puedo atribúir mi elección á exceso de benevolencia, que ha juzgado meritoria la labor por el afán con que era sostenida, o quizá a ilusión formada, creyendo ver algún resplandor propio, cuando sólo era luz reflejada y debida a vuestro acreditado saber, pues para el que tiene la honra de saludaros, el estímulo fué constante, bien por parte de venerados maestros que a esta corporación pertenecieron, bien por comprofesores eminentes que en la misma ingresaron por sus reconocidos méritos, o bien por los demás miembros, cuyas obras y trabajos eran a cada momento motivo de justas alabanzas.

Con ironía, no exenta de amargura, se ha dicho que si los sabios no se murieran sería imposible el progreso. Fúndase

(1) Cuartillas dictadas para su discurso de ingreso en la Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales, que sin corrección alguna se dan póstumamente á luz por acuerdo de la Corporación.

sin duda la frase en lo que es consecuencia de la edad, más bien que condición del saber, aludiendo al afán con que al declinar de la vida se encierran los sabios en sus opiniones y a la prevención que sienten contra las ideas nuevas, sin recordar que las suyas lo fueron en otro tiempo y sirvieron para cambiar o modificar otras antiguas con igual tesón entonces intentadas. Pero la regla tiene no pocas excepciones y una de ellas era el Excmo. Sr. D. Diego Ollero y Carmona, sabio académico a quien me cabe la honra de suceder. Señal clara de que con los años no había dejado de brillar su talento en útiles invenciones técnicas de su profesión militar fué la merced, que por ley especial, se le concedió de ser ascendido a General de División, no obstante haber pasado, por razón de su edad, a la reserva como General de Brigada, grado que en condiciones normales hubiera sido el definitivo.

La enseñanza es medio adecuado de desenvolvimiento intelectual. Allanada a fuerza de recorrer la senda conocida convida a seguir avanzando, aunque a veces desde la nueva altura que se alcanza échase de ver que podía haberse seguido camino más rápido y a través de más fértil campo. Da gran prestigio el renombre de excelente profesor, y este concepto le alcanzó Ollero en la Academia de Artillería. La fama allí conquistada le valió ser nombrado para varias comisiones técnicas, en que confirmó la claridad de ideas y profundidad científica, demostradas en un *Tratado de Balística* y en un *Cálculo de Probabilidades,* aparte de otra obra matemática, que, con el Sr. Pérez Griñón escribió con el título de *Cálculo infinitesimal.*

Elegido individuo de esta Academia, por virtud de todos esos méritos, supo probar en sus informes y discusiones, su ilustración y buen criterio. Modales corteses suelen ser indicio de flexibilidad de atención, y Ollero, que podía citarse como modelo de cortesía, demostraba que había logrado adquirir especiales conocimientos de los nuevos mé-

todos de investigación matemática que no eran los corrientes, cuando hizo sus estudios fundamentales.

No le atraía menos toda invención que pudiera mejorar estudios prácticos militares. Los ábacos de Lalanne fueron en un principio métodos gráficos de cálculo sin base verdaderamente científica. Comenzaron a tenerla después con la introducción de las anamorfosis, que permitían sustituír las curvas por rectas. Pero el ilustre D'Ocagne fué quien realmente sistematizó la nueva rama de la Nomografía con la teoría de los puntos en alineación y el planteo del problema en toda su generalidad matemática, medios con los cuales tuvieron los nomogramas solución completa. De esta nueva rama de las matemáticas aplicadas, fué Ollero uno de los más distinguidos cultivadores. Modelo del procedimiento seguido son los nomogramas de la ecuación del tiro, y fué de sentir que no pudiera dar cima a un trabajo que sobre ello tenía emprendido.

Estaba dotado de ingenio inventivo, como lo demostró con aparatos originales de útil aplicación en general y en particular a las artes de su profesión militar. Había construído un *eclímetro de puntería,* e ideó después una *regla de cálculo,* de manejo más fácil y seguro que las usadas hasta entonces, pues por medio de un tope adecuado se señala con exactitud una de las coincidencias de la regla fija con la móvil, base del cálculo en esta clase de aparatos. En construír con esmero tal regla y probar cuan conveniente era su adopción, puso Ollero sus últimos empeños, acreditando el vivo resplandor que aún despedía su inteligencia.

Daba, además, realce a la persona de D. Diego Ollero el distinguido Cuerpo militar a que pertenecía, cuyo elogio puede trazarse aquí sin temor a herir susceptibilidades, porque, como decía en ocasión solemne mi querido amigo, el entonces coronel de Artillería y general después D. Gonzalo de Carvajal: «las glorias del Ejército son indivisibles». Por consiguiente, tanto le dignifican las justas alabanzas

que se tributen al cuerpo de Artillería como aquellas otras que en una oración fúnebre dirigía el célebre orador sagrado Bossuet a la Infantería española, tan unida y compacta en la acción de guerra, que las balas no producían brecha en ella, porque si alguien caía otro le reemplazaba.

Ceder ante fuerza patentemente muy superior y no lanzarse a la lucha, no vislumbrando probabilidad alguna de vencer, son consejos que la prudencia hace bien en dictar, pero que sentimientos muy dignos, al verse hollados, hacen mejor en olvidar. Capitaneados por famosos generales habían penetrado en España ejércitos aguerridos que traían el prestigio de victorias alcanzadas en Egipto, en Alemania y en Italia, mandados por quien, merced a su genio militar, había llegado a imponerse como emperador de Francia y era árbitro de los destinos de pueblos y reyes en Europa. Hubieran podido esos ejércitos producir entusiasmo viniendo como amigos; pero aunque al pronto pudo parecerlo, no tardó en verse que se pretendía disponer de España, aprovechándose de que nada parecido a capacidad, vigor ni entereza se veía en los que gobernaban. Pero surgió la indignación de los llamados a obedecer. No contaron éstos el número de enemigos, ni vacilaron en exponer su vida, y la guerra de la Independencia comenzó con aquel sangriento Dos de Mayo de 1808, en que al lado de los cañones se vieron los cadáveres de Daoíz y Velarde.

Pasaron los años. Los trastornos políticos suelen ir más lejos de lo que pensaban sus promovedores e iniciados. El 22 de Junio de 1866 fué trágico en Madrid. Dignos oficiales de Artillería perdieron la vida al resistir la formidable insurrección de subalternos que estalló dentro del cuartel. No poco esfuerzo costó dominar desde fuera aquella insurrección, y tremendo castigo fué aplicado. Transcurrió algún tiempo y otros acontecimientos cambiaron la situación política. Para cierto importante cargo fué indicada persona a quien adornaban no escasos méritos; pero que, cuando ocurrió aquella in-

surrección, figuraba en la oficialidad del Cuerpo y se le culpó de iniciado, ya que no partícipe del movimiento. El Cuerpo de Artillería no había olvidado la trágica escena causada por la indisciplina, y se sintió herido en su honrosa tradición de lealtad por aquel nombramiento. Penoso sacrificio es renunciar a la profesión militar que, en justa compensación de los peligros a que expone, ofrece gran prestigio y consideración social; pero nadie vaciló en imponerse este sacrificio.

Júzguese, pues, de mi confusión al ocupar en la Academia el puesto que ilustró un individuo de ese honroso Cuerpo militar, que por su valor y entereza ha brillado tanto como por su cultura científica, bien acreditada por Odriozola, Saavedra Meneses, Balanzat, Luxán, Fernández de los Senderos y Lallave, que en esta Academia figuraron con no menor relieve que el general Ollero.

Aliéntame, sin embargo, la consideración de que, dedicado a la enseñanza de la *Astronomía esférica* y de la *Geodesia*, no desaproveché ocasión de elogiar, como era debido, los grandes trabajos realizados por el Ejército en España y en el Extranjero en el trazado de sus mapas respectivos. En Francia, Alemania, Inglaterra y otras naciones el Ejército casi exclusivamente ha realizado esa obra, y en España, si bien el trabajo es colectivo de elementos civiles y militares, éstos han tenido preponderancia. Tal misión del Ejército está muy justificada, porque aparte de las dotes de disciplina y medios de ejecución ordenada, es natural que señalen la configuración y límites del territorio los encargados de defenderle.

Por el motivo expuesto, es decir, por haber en otras ocasiones escrito sobre los trabajos geodésicos en España, no adopto este punto como tema de discurso de recepción, y prefiero tratar, siquiera sea en bosquejo, del estudio de las *mareas*, problema que si en un aspecto práctico interesa a marinos e ingenieros de puertos, en su aspecto teórico se

presta a interesantes investigaciones que han abordado eminentes matemáticos. Para desenvolver tal tema, según requiere la importancia de esta Corporación, había procurado reunir copiosos materiales; pero una penosa afección a la vista me obliga a prescindir de mucha parte de ellos, y esto sería para mí un nuevo motivo de recelo y temor, si no contara con vuestra probada indulgencia.

*
* *

No están todas las partículas de igual masa, en que puede suponerse divididos el mar y la tierra, a igual distancia de la luna y no son, por lo tanto, atraídas con igual fuerza, puesto que la atracción se ejerce en razón directa de las masas e inversa del cuadrado de las distancias. Ni son tampoco paralelas las atracciones experimentadas por todas esas partículas, sino concurrentes al centro de la luna. La dirección intermedia es la de la recta que une los centros de la luna y de la tierra, puesto que hay simetría de posición respecto de tal recta. El promedio de intensidad de las fuerzas de atracción de la luna sobre todas esas partículas del mar y de la tierra es la atracción padecida por la partícula situada en el centro de la tierra, porque dividida ésta por una superficie esférica que tenga su centro en el de la luna y pase por el de la tierra, será la parte de ella frontera á la luna, de masa un poco menor que la parte opuesta, pero en cambio, será atraída con fuerza un poco mayor. Pero si todas esas partículas de océano y de tierra, estuvieran solicitadas por la luna con fuerzas iguales y paralelas, no se produciría movimiento relativo entre el mar y la tierra. Luego la diferencia en intensidad y dirección entre la fuerza que actúa sobre cada partícula y el indicado término medio es la causa engendradora de la marea.

Compuestas estas fuerzas de marea en las diversas partí-

culas con esas otras fuerzas iguales y paralelas, de dicho término medio, dan las atracciones de la luna en las partículas respectivas. Pero como tales atracciones son mayores que dichas fuerzas paralelas en la parte de la tierra frontera a la luna, y menores en la parte opuesta, las fuerzas de marea forman con estas otras, en la primera parte, ángulos agudos y, en la segunda, obtusos, tendiendo aquí a alejar de la luna las partículas y allí a acercarlas. Casi en el plano trazado por el centro de la tierra perpendicularmente á la recta que une este punto con el centro de la luna, están las partículas en que la fuerza de marea se dirige al mismo centro de la tierra. A medida que las partículas están más distantes de ese plano, las fuerzas de marea son, respecto del mismo, cada vez más divergentes, hasta que en la línea de los centros queda directamente dirigida hacia la luna la fuerza de marea de la partícula situada en la cara frontera, y en sentido contrario, la de la otra partícula diametralmente opuesta. En cada dos partículas simétricas, respecto del plano referido, las fuerzas de marea son casi simétricas, respecto del mismo, y están contenidas en el plano trazado por dichas partículas y la línea de los centros de la tierra y la luna. Pero todas esas fuerzas son relativamente pequeñas, porque la distancia de la luna es grande, comparada con el radio de la tierra. Tienen su máximo valor en las dos partículas situadas en la línea de los centros; pero esas fuerzas están producidas por la diferencia que en la atracción se origina por aumentar o disminuír la distancia en cantidad igual a ese radio, y tal diferencia está en razón inversa del cubo de la distancia, puesto que la atracción se ejerce en razón directa del cuadrado de la misma.

Bastan, sin embargo, esas pequeñas fuerzas de marea para producir sobre el conjunto de las diversas partículas un efecto de cuantía, a partir de ese círculo que separa en la tierra el hemisferio frontero a la luna del hemisferio opuesto. Con la rotación de la tierra varía en ésta a cada

momento la posición de ese círculo, en cuyas mitades, oriental y occidental, están respectivamente los puntos desde los cuales en ese momento parece salir y ponerse la luna. El diámetro de la tierra perpendicular a este círculo termina en el primer hemisferio en la parte que tiene a la luna en el zenit, y en el otro, en el punto que la tiene en el nadir. Por la atracción de la luna, desigual en los diversos puntos de la tierra, las partículas en el hemisferio frontero tienden a dirigirse desde dicho círculo hasta el punto para el cual está la luna en el zenit, y en el otro hemisferio tiende, á su vez, a dirigirse desde el mismo círculo hacia el punto, para el cual, está la luna en el nadir. Suponiendo que el océano cubriese toda la tierra, este océano, si hubiese tiempo para ello, se deprimiría en todo el círculo referido y se encumbraría en los puntos centrales de los dos hemisferios, formando un elipsoide de revolución prolongado, cuyo eje pasaría por el centro de la luna, y el encumbramienro vendría a ser como dos veces la depresión. Mas para que ese tiempo indicado fuese suficiente sería menester que, permaneciendo iguales todas las fuerzas respectivas, el día fuese bastante largo, y el mes, con igual o mayor número de días, lo fuese también; es decir, que fueran bastante pausadas la rotación de la tierra sobre su eje y la revolución de la luna en torno de la tierra.

Convertido el océano en dicho elipsoide, su altura sobre la esfera interior concéntrica formada por la corteza terrestre iría en aumento desde ese círculo de depresión hasta los vértices del elipsoide. Luego, en el plano que contuviera el eje del mismo y el de rotación de la tierra esa altura no sería la misma en los extremos del diámetro de un paralelo, sino cuando el eje del elipsoide se hallara en el ecuador terrestre. En cualquier otra posición la altura sería mayor en el extremo del diámetro de ese paralelo que estuviera más próximo al eje del elipsoide. Por lo tanto, si en ese océano que cubriría toda la tierra asomara una isla, los habitantes

de ella, llevados de Oeste a Este por el movimiento diurno, pasarían de una pleamar a otra en el curso de medio día lunar con una bajamar en el intermedio. Pero las dos pleamares tendrían diferente altura, produciéndose con ello en la marea semidiurna una oscilación equivalente a otra marea de doble período, es decir, una marea diurna. Mas ésta sería variable aun en un mismo lugar, porque la luna cambia en declinación desde unos 28° al Norte hasta otros tantos al Sur, y la pleamar meridiana bajo la luna tendría mayor o menor altura que la pleamar opuesta, según que el observador y la luna estuvieran a un mismo lado del ecuador o a diferente lado, porque en el primer caso pasaría el observador más cerca del vértice del elipsoide frontero a la luna que del vértice opuesto, y en el otro caso sucedería lo contrario. Además, esa desigualdad o marea diurna iría disminuyendo al aproximarse la luna al Ecuador.

Otra desigualdad, pero de mayor período, se produciría en la marea semidiurna lunar por su combinación con la solar. La fuerza de ésta es un poco menor que la mitad de la otra, porque tales fuerzas son proporcionales directamente a las masas de los cuerpos que las producen, si bien están en razón inversa del cubo de sus distancias al cuerpo que solicitan, y aunque la extraordinaria masa del sol aumentaría mucho la fuerza de marea, el cubo de su distancia, que figura como divisor, la hace disminuír en mayor proporción. Tiene esta marea por período medio día solar, esto es, un período veinticinco minutos más corto que el de la lunar, con la cual se combina, aumentando o disminuyendo su efecto.

En la luna nueva los dos astros están en conjunción y en la luna llena están en oposición, mientras que en los cuartos creciente y menguante los dos astros están en cuadratura. En el primer caso de conjunción u oposición, las dos ondas de marea superponen sus cumbres, mientras que en el otro caso de cuadratura la cumbre de una se opone a la

hondonada de la otra, es decir, la pleamar de aquélla a la bajamar de ésta. Así en la luna nueva y llena la marea es la llamada de aguas vivas, y en los cuartos creciente y menguante, la de aguas muertas. La primera alcanza una altura tres veces mayor que la otra, porque en el primer caso se juntan dos fuerzas que son la una la mitad de la otra y en el segundo caso se oponen estas mismas fuerzas y dan otra igual a su diferencia.

Resultaría de todo ello una marea semidiurna, una oscilación diurna en la altura de esta marea y otra oscilación quincenal de aguas vivas y aguas muertas, como consecuencias principales de la teoría de equilibrio fundada en el supuesto de que las corrientes oceánicas tuvieran tiempo suficiente para dar a la superficie su forma de equilibrio en cada momento. Alguna relación, en efecto, tienen dichas consecuencias con los hechos realmente observados, pero un examen más detenido hace resaltar diferencias que deben atribuírse a que al girar la tierra en torno de su eje y al revolver la luna en torno de la tierra lo hacen demasiado de prisa para que pueda lograrse esa figura de equilibrio, porque antes de completar el océano el elipoide en una dirección ya está solicitado a comenzarla en otra.

Prueban, en efecto, los hechos que la teoría de equilibrio anda acertada en señalar la figura y condiciones a que se tiende bajo la acción de las fuerzas de marea, pero no la figura y condiciones a que se llega en realidad. Es cierto que la desigualdad diurna de la marea se desvanece cuando la luna está en el ecuador y va aumentando hasta que dicho astro adquiere su mayor declinación por Norte o Sur; pero la cuantía de la desigualdad diurna no concuerda con la calculada, y en muchos sitios la marea, que debiera ser la mayor, es precisamente lo contrario. Es cierto también que la marea de aguas vivas viene a ser unas tres veces mayor que la de aguas muertas, y que la primera ocurre en tiempo de la luna llena y nueva, y la segunda en los cuartos cre-

ciente y menguante; no hay sin embargo, coincidencia entre el paso de la luna por el Meridiano y el momento de la marea.

Tiene cada puerto lo que llaman *su establecimiento* los marineros, es decir, un régimen de mareas dado por el número de horas solares que transcurren entre el paso de la luna por el meridiano y el momento de la marea. Este tiempo se fija observando en el puerto elegido á qué hora solar ocurre la marea en la luna nueva o en la llena, porque en la primera la luna pasa por el meridiano al mismo tiempo que el sol, y en la segunda doce horas después. Pero según la teoría de equilibrio, la pleamar debiera ocurrir precisamente al estar la luna en el Meridiano o en la parte opuesta, y, por tanto, en la luna nueva y en la llena debiera haber una pleamar al mediodía y otra a media noche; esto es: el establecimiento de todos los puertos debiera ser cero, pero los hechos acreditan que el establecimiento en diversos puertos tiene variados valores y que en el Océano Pacífico (donde las fuerzas de marea actúan libremente), dicho establecimiento se aproxima a seis horas.

*
* *

Hay que plantear, pues, el problema como dinámico, conforme hizo Newton al suponer el Océano confinado en un canal que circuyera el ecuador, y conforme hizo después Laplace al suponer que cubriera toda la tierra un Océano de igual profundidad. Probó el primero que la marea en dicho canal debía resultar invertida, ocurriendo bajamar cuando debía esperarse, al parecer, pleamar; y demostró el segundo que esto ocurriría en el ecuador, pero que hacia regiones polares la marea sería directa, ocurriendo pleamar al hallarse el astro en el meridiano o en la parte opuesta. Sirve de fundamentos para estas conclusiones el siguiente principio:

si en un sistema capaz de oscilar con un cierto período actúa una fuerza periódica, cuando el período de la fuerza es mayor que el del período libre natural del sistema, las oscilaciones del sistema concuerdan con las oscilaciones de la fuerza; pero si el período de la fuerza es menor que el período libre natural del sistema, las oscilaciones están invertidas con respecto a la fuerza.

Este principio tiene una aclaración sencilla: a cada longitud del péndulo corresponde un cierto período de oscilación. Según se acorte o alargue, el péndulo oscila más de prisa o más despacio. Ese período propio es el de la oscilación libre del péndulo. Pero si, teniendo el péndulo pendiente de la mano, se da a ésta un movimiento de vaivén acompasado, la oscilación del péndulo sostenido no será libre sino forzada, por tener que sujetarse al vaivén de la mano. Si ésta oscila más despacio que oscilaría el péndulo libre, éste tiende a adelantarse y la mano va refrenándole. Pero si el vaivén de ella es más rápido que la oscilación propia del péndulo, éste tiende a rezagarse y la mano va arrastrándole. Por eso las condiciones de oscilación varían. En el primer caso, cuando la mano tiene la máxima desviación hacia un lado, el péndulo la tiene también hacia el mismo lado. En el segundo, cuando la mano tiene máxima separación hacia la derecha, el péndulo la alcanza a la izquierda; si el período de dicho vaivén fuera el mismo que el de la oscilaciones libre, se produciría el caso crítico en que la oscilación forzada tiende a ser infinita.

En un canal cualquier impulso que actúe de una vez produce una onda libre que se propaga con una cierta velocidad. Si es onda larga, esto es, si su longitud es igual o mayor que el duplo de la profundidad del canal, la velocidad es independiente de la longitud de la onda, y sólo varía con la profundidad del canal, aumentando o disminuyendo según aumente o disminuya dicha profundidad. Para que en un canal que circuyera el ecuador la onda libre producida por

un terremoto u otra sacudida casi instantánea recorriera dicho ecuador en las veinticuatro horas cincuenta minutos que invierte la luna en su movimiento diurno, la profundidad del canal debiera ser de unos veinticuatro kilómetros, y para que esa onda libre recorriera el ecuador en un día solar, la profundidad del canal debiera ser de casi veinticinco kilómetros. Pero tales profundidades vienen a ser como tres veces la altura de las más elevadas montañas del globo terrestre, y exceden al duplo de las mayores profundidades del Océano.

La onda de marea no está en las mismas condiciones que la onda libre, pues cualquiera que sea la profundidad del canal, el período de la onda de marea o tiempo invertido por ella al pasar desde la cumbre, que tiende a formarse bajo el sol o la luna, hasta la cumbre en el meridiano opuesto, es siempre de medio día solar o lunar. Luego si el canal en el ecuador tiene profundidad mayor que la indicada por los números precedentes, la onda libre tendrá velocidad mayor que la correspondiente al movimiento del sol o de la luna, y la medio circunferencia ecuatorial comprendida entre las dos cumbres sería recorrida en un período menor que medio día solar o lunar. Por tanto, convertida esa onda libre en onda forzada de marea baja, la acción del sol o de la luna situados sobre el ecuador quedará sometida a un período mayor que al suyo propio, y, por consiguiente, la marea será *directa*, es decir, habrá pleamar bajo el sol o la luna y en la parte diametralmente opuesta.

Pero si la profundidad del canal en el ecuador es menor que la señalada por esos números, la onda libre caminará más pausadamente que el sol o la luna en movimiento diurno, y la semicircunferencia ecuatorial comprendida entre las dos cumbres sucesivas de la onda será recorrida en un período mayor que medio día solar o lunar. Luego, convertida esa onda libre en onda forzada de marea como la antedicha, tendrá un período menor que el suyo propio, y, por

consiguiente, la marea será *inversa,* es decir, habrá bajamar bajo el sol o la luna y en la parte diametralmente opuesta, en vez de producirse pleamar, como en el caso de la marea directa. Esta conclusión, que es la más adecuada en el ecuador con la profundidad que tienen nuestros mares, es la opuesta al caso anterior, sirviendo de línea divisoria entre los dos resultados esa profundidad crítica de veinticuatro o veinticinco kilómetros en que el período de la onda forzada coincidiría con el de la onda libre.

Tal coincidencia hace recordar lo que puede ocurrir en un puente de hierro cuando sobre él caminan a compás muchas personas a la vez. Las oscilaciones se van sumando; la amplitud de la oscilación resultante va en aumento, y al cabo puede producir la ruptura del puente. Si la onda de dos cumbres diametralmente opuestas que el sol o la luna tiende a formar en el canal indicado es del mismo período que la onda libre, se irán sumando las cumbres de las ondas sucesivas y se formaría al cabo una onda resultante de cumbres de infinita altura. Pero esta consecuencia prescinde de que la altura cada vez mayor de la cumbre de la onda disminuiría finalmente la velocidad de la misma en el canal. La onda, libre entonces, ya no caminaría a compás del sol o la luna. Por tanto, la conclusión debe limitarse a decir que con esa profundidad crítica del canal, que no es la misma para la marea solar que para la lunar, tendería a ser infinita aquella marea a que la profundidad se refiere.

Con el océano cubriendo toda la tierra, el conjunto de movimientos en la marea es complicado, porque tienden a ponerse bajo el sol o la luna o a dirigirse hacia su punto opuesto partículas que proceden de todas partes en el hemisferio frontero o en el opuesto, y el movimiento de unas partículas modifica el de otras. Por ejemplo, las partículas que desde regiones polares caminan hacia el ecuador van situándose sobre paralelos donde la velocidad rectilínea es mayor, aunque la velocidad angular sea la misma, y, por tanto,

se van rezagando hacia el Oeste. En cambio, las partículas, que desde la región ecuatorial caminan hacia uno u otro polo, cruzan paralelos donde la velocidad rectilínea es menor, y, por lo tanto, se adelantan hacia el Este. Así, las que proceden de Norte o Sur se encuentran con las que vienen de los otros puntos, Este u Oeste. No puede, pues, sustituírse el problema de la marea en un océano que cubra libremente toda la tiera con el de las mareas en un océano dividido en canales, según el ecuador y según los paralelos. Pero este problema, más sencillo, permite formarse del otro una idea aproximada, suponiendo el sol y la luna sobre el ecuador.

(Continuará.)

VII.—Las relaciones modulares en los cráneos de España.

Nota presentada en Mayo de 1915

(Continuación.)

POR LUIS DE HOYOS SÁINZ.

Los grupos bien caracterizados, y con un número de provincias agrupadas en una región natural, son los siguientes:

(I). De tipo *ancho* y *corto;* el primero, o congruente con tales formas por ser además *bajo*, y, por tanto, de aspecto esferoide, es el del litoral cantábrico o del Norte, desde Santander a Pontevedra, en que ya se alarga y sale del grupo, cuyas características matrices son: 120,3, en la relación del diámetro antero-posterior; 86,2, en su relación vertical, y 93,7, que es la más característica, en la transversal. Como cráneos típicos pueden presentarse, en la norma lateral posterior y superior, el de Lugo y Oviedo y en la relación vertical este último y el de Santander.

(II). Es *ancho*, *corto* y *alto* el cráneo extremeño, y a él se unen los de Huelva y Córdoba, que en la relación longitudinal sólo excede cinco décimas al tipo anterior o braquicéfalo del Norte, siendo la última provincia la más típica de todas, pues su cráneo femenino es el mínimo y su masculino es de menor valor que el total de la región; la relación vertical es de 87,4, que no es de exagerada altura, pero lo suficiente para distinguirla del grupo del Norte, y la traesversal de 91,9 representa atenuadamente el mismo tipo. Reune los caracteres de este tipo el cráneo de Talavera de la Reina, especialmente en las normas lateral y posterior.

Por el lado opuesto, o sea en los cráneos de aspecto paralepipoide, que son *altos, estrechos* y *largos* (IV), están los aragoneses y los de Alicante, Albacete y Jaén, con la provincia aislada de Zamora. En los casos típicos los valores de la relación longitudinal pasan de 121,5, los de la vertical, 87,9, y los de la transversal no llegan á 90,6, presentándose especialmente en Teruel y Alicante, que parecen los focos de esta arquitectura craneal.

Las normas lateral y superior de Elche y Osma, y más especialmente los de Miguel Esteban, en Toledo, son características, aunque el de Jaén es el más típico por la altura y forma general.

(V). Persistiendo en *altos* y *estrechos*, pero haciéndose *cortos*, de tipo turriforme, están en tres zonas, de las cuales son las más típicas las de Tarragona y Castellón, al E., y la de Almería y Murcia, al SE., caracterizadas por una relación vertical más alta de 88,3, una transversal menor que 91,3 y una longitudinal inferior á 120,5, cifras que bajan unas décimas en la primera y que suben otras en las últimas, como atenuando el carácter en la zona, que puede llamarse manchega, de Toledo, Ciudad Real y Cuenca, pues realmente la mitad occidental, ó sea la zona montuosa de las dos primeras provincias, ensancha el cráneo y se incorpora por otros varios caracteres á Extremadura. Hay, por fin, la provincia de Cádiz y tal vez la de Huesca, que ya señalamos, que caen dentro de este tipo, pudiendo, tal vez, la primera unirse á Sevilla.

Recordando el concepto de mesaticefalia que daba el índice cefálico, aparece aquí por las tres relaciones modulares el grupo de los cráneos *bajos, anchos* y *largos* (III), que caracteriza la región vasco-riojana y ciertamente navarra, a no ser por la influencia particular de una colección de cráneos de Cascante en los valores de la provincia, teniendo un valor de la relación vertical inferior en todos los sexos y provincias a 86,1, que es extraordinariamente bajo; en la transver-

sal, superior a 92,5, como expresión de una gran anchura craneal, especialmente en las mujeres, y en la longitudinal excediendo también de 121,1, que en las mujeres exagera también el desarrollo antero-posterior. Cualquiera de los cráneos masculinos de Guipúzcoa y el femenino del Roncal son buen ejemplo de este tipo.

De modo análogo a como el manchego atenúa el tipo levantino y en cierto modo el extremeño al cántabro; el castellano del Norte y leonés, salvo Zamora, representa la atenuación del vasco, pues con dos a seis décimas más en todas las relaciones, permanece en el mismo grupo, siendo algo menos bajo y más estrecho y corto. Por las cifras se incluyen en este grupo, aunque hay otros muchos datos que los separan, los cráneos de Pontevedra y Málaga.

Por razones de complicación o antítesis en los datos de las relaciones, o por falta de éstos, quedan sin caracterizar todas las provincias que rodean a Segovia, más Palencia en Castilla, Barcelona y Gerona en Cataluña, y Sevilla y Granada en Andalucía. Viendo las líneas gruesas del mapa V, que señalan diferencias entre provincias limítrofes de más de 30 puestos en la suma de las tres relaciones, se puede incorporar Sevilla al tipo alto, estrecho y corto de Cádiz, ó tal vez mejor de la región bética, que indicamos por el estudio de los índices cefálico y nasal, hace veintitres años; Granada es más que probable que totalmente no tenga inclusión ni entre el grupo de Jaén o interior, ni en el de Almería o litoral, sino que sea más complejo y se divida en varios, hallándose Valencia en igual caso; Soria ya vemos su necesaria unión a los tipos de Aragón, confirmando la hipótesis de Olóriz, y Orense, según nuestra opinión expresada en el mapa de las regiones étnicas de España, presentado en el Congreso de Ginebra de 1912, forma con Zamora y partidos judiciales de algunas provincias limítrofes una pequeña región de transición y superposición de elementos etnogénicos.

Las *razas*, o mejor las REGIONES ÉTNICAS de España, aparecen abocetadas en la síntesis de las seis categorías cefálicas que venimos haciendo, con mucha más certidumbre científica que la dada por el solo hecho del índice cefálico o de éste y el nasal; pero no es este el problema que hoy nos planteamos, reducido a la exposición de un método de trabajo e investigación y al ejemplo de aplicación del mismo.

Permítasenos, más por cumplir con la curiosidad ajena que por aventurar la opinión propia, abocetar una distinción de regiones, completando con estos datos las hipótesis que sobre las regiones antropológicas de España hicimos en la comunicación al *Institut français d'Anthropologie,* en 1912 (1), fundadas en la correlación de las 11 relaciones e índices, que con las principales medidas del cráneo y de la cara pudimos entonces hacer y que, contrastadas hoy con las relaciones modulares, tienen en los casos de coincidencia o en los de contraposición de caracteres un gran valor. Antes de esta división en regiones étnicas, sólo podemos señalar el ensayo hecho por nosotros en 1892 con el Sr. Aranzadi, y el de 1894, del Dr. Olóriz, cuyos datos iremos citando para ver cómo se fijan y precisan aquellos primeros bocetos (2).

Es de notar cómo en todos los ensayos de distribución hay regiones que persisten y pudiéramos llamar fundamentales, y otras que desaparecen o se alteran al rectificar y comprobar los datos: Entre las primeras está la CANTÁBRICA que, establecida por nosotros, fué comprobada por Olóriz y sigue hoy con iguales límites, correspondiendo, desde Lugo a Santander, al tipo de cráneos anchos, bajos y cortos con

---

(1) *Caractéristique générale des cranes espagnols.* L'ANTHROPOLOGIE, tomo XXIV, 1913, págs. 472-494, 10 fots.

(2) Por ser fundadas en estudios sobre el hombre vivo no tenemos aquí en cuenta las divisiones del interesante trabajo del Subinspector de Sanidad militar Sr. Sánchez Fernández.

relaciones respectivamente de más de 93,7 y menos de 86,8 y de 120,3; de cara estrecha y nariz leptorrina; es en el vivo la más branquicéfala, con un índice medio de 80,4, re-

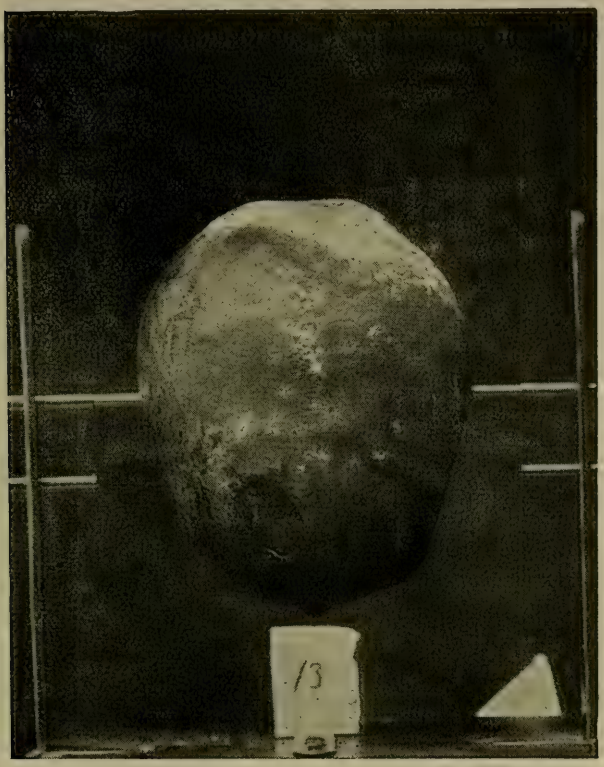
25.—Fot. 5.—[6, 7 y 8].

♀ **Santander.** Cabuérniga, Sopeña.—B. *Tipo cantábrico.* Igualmente las figuras 1, 3, 4 y 9 del ♂ de Lugo y 10, 15 y 19 de la ♀ de Oviedo.

presentando al tipo históricamente *céltico* y antropológicamente *alpino.*

Dentro del clásico grupo de los braquicéfalos, está la región llamada EXTREMEÑA, que no corresponde exactamente ni a las dos provincias que llevan ese nombre ni a la limi-

tación señalada en el mapa V, pues de un lado, como ya se dijo, extiéndese por Toledo y Ciudad Real, y en cambio, a nuestro parecer, no han de incluirse en ella las de Córdo-



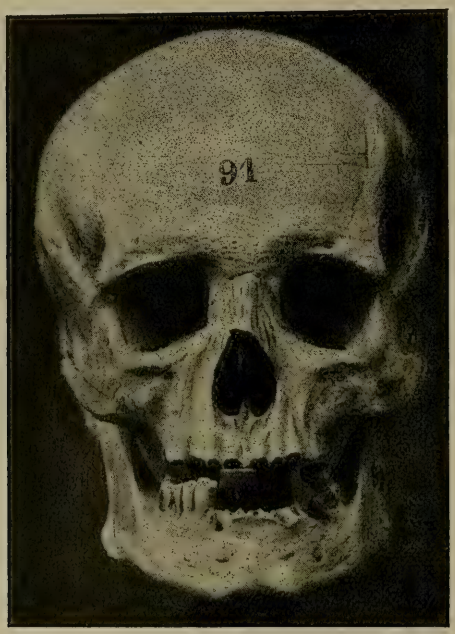
26.—Fotg. 6.—[7 y 8].

♀ **Santander.** Cabuérniga, Sopeña. — B. *Tipo cantábrico.* Igualmente las figuras 1, 3, 4 y 9 del ♂ de Lugo, y 10, 15 y 19 de la ♀ de Oviedo.

ba y Huelva. Se destacó desde nuestra primera distribución de los índices cefálico y nasal, y nos la confirmó el dato de la morfología craneal sostenido por los dichos y ampliado por el carácter de la microconquia o pequeñez de la órbita,

y la estrechez de la cara, por lo cual se destaca de la compleja región castellana inferior en que la fundió Olóriz.

Sus valores típicos en las relaciones modulares son los ya dichos, como atenuando los longitudinales y transversos de la cantábrica y pasando en la vertical de 87,4, mientras en aquella no sube de 86,7, por lo cual bien puede conside-

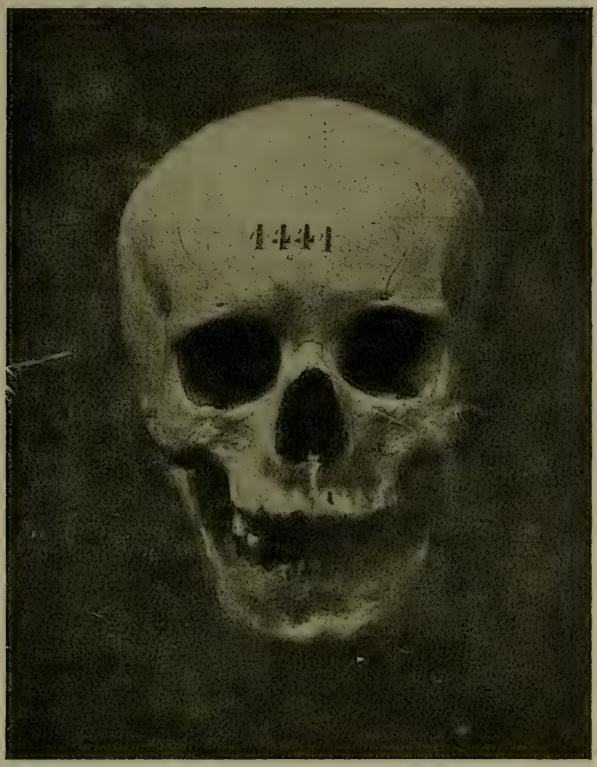


27.—Fotg. 15.—[12, 13 y 14.]
♂ **Toledo.** Talavera de la Reina.—66 años.—91, Fac. Med.
Tipo extremeño.

rarse como un antiguo mestizaje de los alpinos, con el tipo hipsicéfalo del centro de España, que es el de la región manchega, que ya a su vez no es puro como el levantino de que procede, según el Sr. Aranzadi, que considera su braquicefalía influida por el tipo llamado *armenoide* directamente y sin la transición del alpino a que éste originó.

El otro, ya no braquicéfalo, pero sí más mesaticéfalo, es

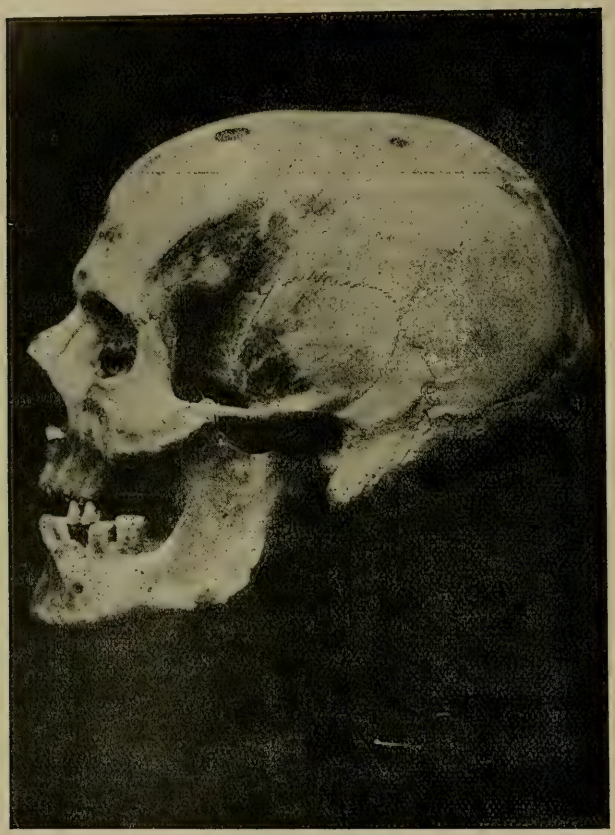
el que nosotros llamaríamos LEVANTINO, o mejor IBERO LITORAL, si bien exige el nombre la aclaración de no confundirle con el estrictamente valenciano, que al menos por estas relaciones modulares divide el levantino del litoral en



28.—Fotg. 27.—[25 y 26].
♂ **Alicante.** Elche.—núm. 1.441. Fac. Med. *Tipo levantino.* Mas la fig. 4 de ♂ de la misma localidad.

las dos zonas de craneos cortos, pero estrechos y altos, la de Tarragona y Castellón al Norte, y la de Murcia con Almería al Sur de la provincia de Valencia, cosa que nosotros consideramos anómala, pues la región debe de ser continua, ya que además de los caracteres dichos, tiene de común la

anchura de la cara y la microconquía orbitaria, así como una marcada platirrínia o anchura de la nariz, que contrasta con su limítrofe la zona MANCHEGA, que para nosotros es



29.—Fotg. 35.—[36 y 37].
♂ **Toledo.** Miguel Esteban (Quintanar de la orden).—66 años.—1.140;
Fac. Med. *Tipo Manchego.*

una de las mejor caracterizadas, aunque mal limitada, ya que por las relaciones modulares sigue siendo de cráneos altos, estrechos y cortos, bajando los valores de 88, mientras pasan de 88,3 en la levantina para la relación vertical;

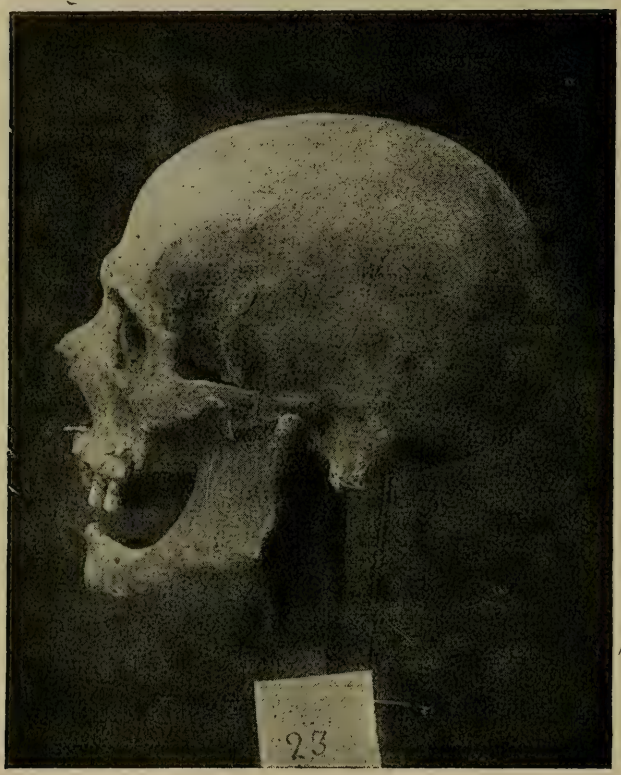
suben 5 décimas de las 91,3 por la mayor anchura, y bajan 3 décimas de las 120,8 en la longitudinal.

Las cuatro provincias propiamente de la Mancha, Toledo, Ciudad Real, Cuenca y Albacete no entran enteras en la región, que separamos de la por nosotros llamada celtibérica y de la ya dicha castellana inferior de Olóriz. Tal vez de

30.—Fotg. 37.—[35 y 36].
♂ **Toledo.** Miguel Esteban (Quintana. de la Orden).—66 años.—1.140
Fac. Med. *Tipo manchego*

buscar filiación lo haríamos nosotros por los más antiguos tipos prehistóricos. La distinción de este tipo y el extremeño es evidente con sólo comparar las fotografías 12, 13, 14 y 15, o sean las figuras 16, 23, 20 y 27, y las 35, 36 y 37, respectivamente, que separan las zonas manchegas, de tipo craneal largo, estrecho y bajo, y las extremeñas completamente opuestas.

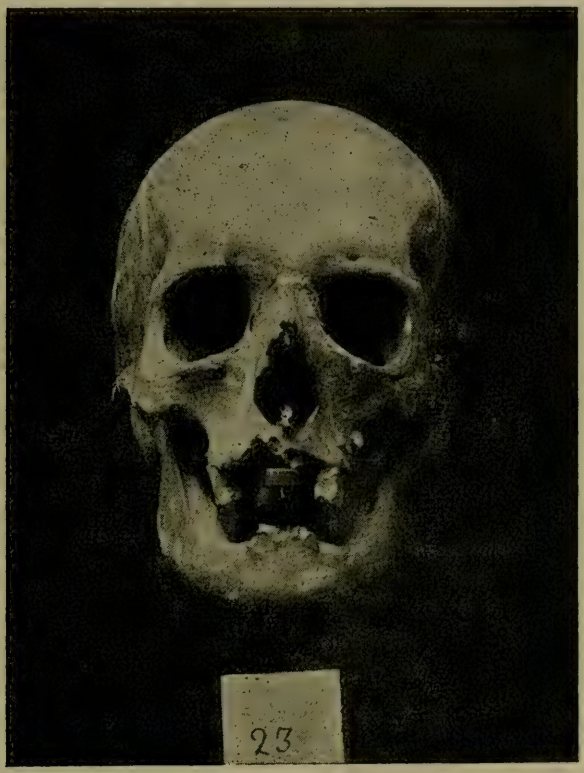
Región bien marcada por los tipos craneales, aunque no por los límites geográficos, es la que en el mapa se extiende por Alicante, Albacete y Jaén, con el tipo probablemente CELTIBERO. Repite bastante el tipo craneal de la celtiberia septentrional, como puede verse en el cráneo de Osma



31.—Fotg. 32.—[33 y 34].
♂ **Tarragona.** Vilarrodona.—2.—Mus. Ant.; *Tipo Ibero-litoral.*

(Soria), cuya norma superior damos con las restantes de Villanueva del Arzobispo, en Jaén, de cráneo alto, estrecho y largo, que está representado por las figuras 11, de Osma, en Soria, y 2, 5 y 6 de Villanueva del Arzobispo, en Jaén, en donde puede estar la representación de la estirpe medite-

rránea o euriafricana, y que se caracteriza en la ARAGONESA de modo más concreto, ampliando el Aragón político con Soria ciertamente, y tal vez como pretendió Olóriz con Guadalajara, aunque los tipos más puros como se ve en las fotogra-

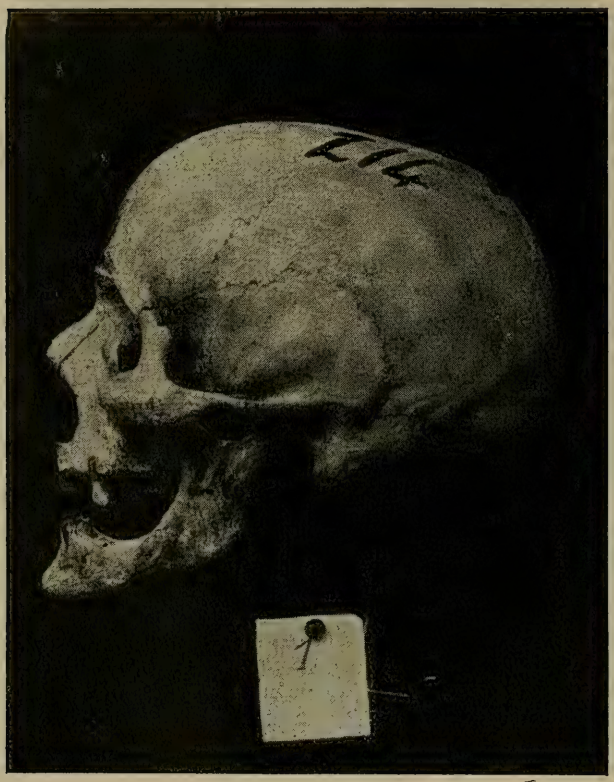


32.—Fotg. 34.—[32 y 33].
♂ **Tarragona.** Vilarrodona.—2.—Mus. Amt.; *Tipo Ibero-litoral.*

fías, se dan en Alicante y Jaén, pues sus relaciones de altura y longitud pasan de 87,9 y de 121,5, en tanto que no llegan a 87,5 y 120 en los aragoneses, y la transversal no llega a 90,6 en los primeros, y sube hasta 91,3 en los últimos. Para nosotros es el tipo puramente *ibérico*, y como subtipo

bien característico, por su cráneo alto, estrecho y corto el *ibero-litoral* o levantino del Norte o del Ebro, que en el cráneo de Tarragona de las figuras 31 y 32, y la 14 ya dada por su índice vértico-transversal está bien representado.

Otra de las regiones constantes en toda clasificación es la



33.—Fotg. 17 [16].
♂ **Guipúzcoa**.—Cestona.—214. Mus. Ant. *Tipo vasco.*

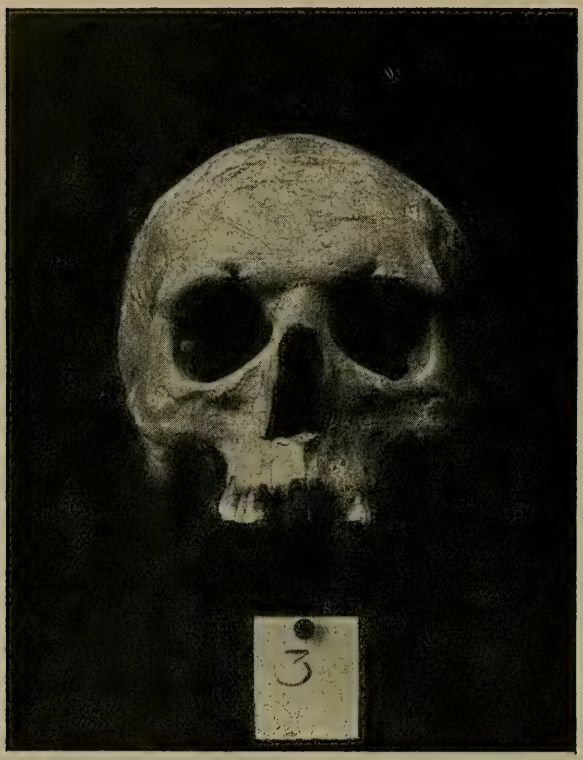
VASCA, más o menos ampliada, que hoy podemos ya fijar con las tres provincias y las de Logroño y Navarra, pues si ésta aparece como de cráneos altos, lo son en tan escasa medida y es tan acusada su separación de la zona aragonesa, que no hay razón para separarla de los vascones, a los

que, además de los caracteres cefálicos, la unen los faciales de cara estrecha y nariz de igual tipo. Los valores típicos de esta región acusan un cráneo extraordinariamente bajo, más aún que el cántabro, pues no pasa de 86,1, compitiendo en anchura con su citado limítrofe, y separándose por ser largo

34. Fotg. 17 [16].
♂ **Guipúzcoa.** Cestona.—214. Mus. Ant. *Tipo Vasco.*

con una relación longiludinal modular superior a 121,1, especialmente en su parte riojana. El Sr. Aranzádi hace notar que Jacques, al estudiar los cráneos de la colección Siret, halló un tipo, el de Argar, análogo a éste por su parecido al descrito por Broca como de Zarauz, al que llamó Pirenaico

occidental para evitar, apelándole vascón, su asimilación al ibérico y al Cro-Magnon, que representaban una filiación directa o unidad para la etnografía de hace veinticinco años. Hoy no cabe asomo de tales asimilaciones, y, además, ha-



35.—Fot. 19.
♂ **Vizcaya.** Rigoitia.—1. Mus. Ant. *Tipo vasco.*

biendo estudiado nosotros detalladamedte la colección de Zarauz, del Museo de la Société d'Anthropologie, de París, no tenemos duda en afirmar que es la menos vasca de todas, y que su heterogeneidad es manifiesta, bastando para darse cuenta del verdadero tipo vascón ver las fotografías de los

cráneos masculinos de Rigoitia y Cestona y de la mujer del Roncal.

Mucha más certeza que en la representación atenuada del tipo levantino por el manchego, tenemos en la del vascón por el CASTELLANO de Castilla la Vieja y León, pues esta región es de las que más han cambiado, ya que en nuestro

36.—Fotg. 23 [20, 21 y 22].
♂ Navarra. Roncal.—1·304. Fac. Med. *Tipo vasco.*

Avance formaba, de un lado la leonesa y de otro la carpetana, y luego en la distribución de Olóriz la gran región castellana, superior, con índice medio de 77,6, una unidad menor que la vasca. Es indudable que comprende León, Salamanca y Segovia con Palencia, Valladolid y Avila, probablemente, y la de Burgos en parte, ya que la transición a la

vasca y cántabra por los partidos de Villarcayo, Sedano y Miranda, es evidente. Al mestizaje en esta región intervinieron dos corrientes hipsicéfalas que marcan el curso del Duero por Zamora y el del Ebro por Burgos, aunque más aún desde Soria, bajando de los altos que inician las sierras aragonesas del Moncayo.

Desde las primeras distribuciones de las razas de España por sus caracteres antropológicos, se inició una pequeña región que, por no tener historia, sólo a fuerza de acusarse por lo somático, hemos tenido que respetar, aunque cambiando sus límites y considerándola más como una zona de paso o transición: es la *zamorana*, que con Orense se la ve bien separada de sus limítrofes, repitiendo el tipo aragonés o levantino, o mejor aún, lo que nosotros consideramos como ibérico, en las serranías soriano-aragonesas y en las de Jaén y Albacete. Su cráneo, alto estrecho y largo, influye en Galicia no litoral, como es Orense, y complica la etnogenía de esta región que se dividía ya por los solos caracteres de los índices cefálicos y nasales en los dos tipos; grueso basto ó céltico (1), y fino estrecho, y presunto normando, como decíamos hace años planteando un problema al que el señor Olóriz dedicó también algunas páginas en su clásico trabajo.

Hemos hablado ya del carácter especial de Lérida en sus relaciones modulares y de su contraste con Tarragona, que aparece totalmente levantina y aragonesa, de igual modo que ocurrió en la distribución del índice cefalométrico en el vivo, como en cualquiera de los mapas de Olóriz puede verse, por lo cual, nosotros caracterizaríamos a la región CATALANA por el tipo de Lérida y la limitaríamos al Norte del Delta del Ebro que señala el límite levantino o ibérico-aragonés, en todo caso.

Andalucía es un complejo muy difícil de clasificar sin estudios monográficos; pero es lo cierto que desde los prime-

(1) Damos el valor histórico á estos nombres.

ros datos del índice cefálico se dividió la gran región turdetana, desde Huelva a Murcia, en dos zonas, Bética y no Bética, baja y alta, como escribía Olóriz; oriental y occidental, como estimamos nosotros. Pero limitados hoy a estas relaciones modulares, sólo nos es permitido afirmar que la occidental que nos apareció como más braquicéfala, tiene cráneos altos en Sevilla y Cádiz, que serían su centro, y la oriental o del antiguo reino de Granada, exagera la altura y presenta estrechez y largura acentuadísimas en Jaén y tal vez Granada, cuyo tipo damos en la fotografía de Villanuenueva del Arzobispo.

Claro es que el complemento y ratificación de estos datos de valores medios está en el ánalisis de las series individuales, que por las ya ensayadas no modifican las regiones ni alteran las conclusiones generales; pero ese trabajo formará nota aparte de este avance, que es bastante claro y definitivo respecto al método.

VIII. — La presiòn osmótica y las disoluciones ideales.

Por Rafael Luna Nogueras

Entre las variadas cuestiones científicas planteadas en el pasado siglo, y que a la química-física afectan, pocas se encontrarán que hayan despertado tanto interés como los fenómenos de ósmosis descubiertos y estudiados por Dutrochet (1826-1837), al repetir el experimento que el abate Nollet realizó setenta y ocho antes, sin conseguir llamar la atención de los sabios de su época, y las investigaciones de Graham (1850-1862) acerca de la difusión simple o sin membrana, conocida por Parrot en 1815.

Si no interminable, larga sería la lista de los botánicos, físicos, químicos y biólogos en general, que dedicaron su actividad a la investigación dirigida en tal sentido, y aun hoy constituyen pléyade, como la formarán mañana, aquellos que se afanan por arrancar a la Naturaleza sus secretos, eligiendo como temas de trabajo cuanto se relaciona con el proceso de la disolución y sus derivaciones, proceso que después de ser tan estudiado no podemos llamar físico, cómo tampoco se puede incluir entre los químicos, por no estar decidida en la hora actual su categoría. ¡Tanta es la complejidad que entraña! Y nada de extraño tiene adquiera mayor preponderancia cuanto a la disolución se refiere, por tratarse de fenómeno que en todos sus aspectos origina siempre los más interesantes capítulos; su conocimiento constituye materia previa e imprescindible para el que aspira a comprender lo que le rodea, y si todo el mecanismo de la vida no está comprendido dentro de sus manifestaciones, no es posible concebir la existencia del ser vivo sin

su intervención eficaz y decisiva (1), circunstancia que justifica, quizás más que ninguna otra, la expectación que en el campo de la ciencia produjo el conocimiento de la presión osmótica y de las membranas semi-permeables, ya que multitud de procesos fisiológicos encontraban con ello explicación tan racional y satisfactoria que en muchos determinó, ¡vana quimera!, esperanzas de descubrir con su ayuda los secretos y misterios de la vida.

No abrigamos propósitos, ni cabría dentro de una conferencia, por mucha extensión que se la diera, de exponer, ni aun de manera sucinta, cuantos trabajos se han publicado sobre el particular, las conclusiones que representan, hipótesis que se han emitido para explicar los hechos experimentales, en una palabra, de cuanto se refiere a la presión osmótica, y con ella a la teoría general de las disoluciones que lleva aparejada. Son, por otra parte, materias sobradamente conocidas de los profesionales cuanto se refiere a las conclusiones de Graham, confirmadas por Fick con la ley que lleva su nombre, considerada después por Nernst como *corolario de los fenómenos de la presión osmótica*, y con cuya hipótesis fundamental Stefan, reemplazando en las ecuaciones de Fourrier, acerca de la propagación del calor por conductibilidad, los términos temperatura y cantidad de calor por los de concentración y cantidad de substancia, llega a una *descripción matemática completa de los fenómenos de difusión sin septum.*

Lo mismo puede decirse de la obra de Dutrochet, Traube, Pfeffer, de Vries, van't Hoff, etc., cuyos nombres marcan otras tantas fases de notable progreso en el conocimiento de los fenómenos osmóticos y desarrollo de las teorías; pues si el primero pone el hecho al descubierto, aper-

---

(1) Pekelharing en 1904, al promover a van't Hoff, doctor honorario en Medicina (Utrech-Holanda), decía: «No se puede pensar ya en ninguna Fisiología o Patología científica en la cual no juegue un papel importante el concepto de presión osmótica.»

cibiéndose de la relación o dependencia que existe entre la presión osmótica y las densidades para disoluciones de la misma substancia, Pfeffer, aprovechando las propiedades descubiertas por Traube en el precipitado de ferrocianuro de cobre, consigue la formación de células artificiales, en las que, suprimida la exósmosis con la difusión molecular que le acompaña, subsiste sólo el flujo endosmótico íntegro, que le permitió efectuar medidas más precisas y establecer que la *presión osmótica, para una misma substancia, varía proporcionalmente con la concentración.* Al mismo tiempo vió de una manera terminante y clara la *influencia de la temperatura.*

De Vries funda el *método plasmolítico o diferencial,* y con gran sencillez, partiendo de disoluciones cuya presión osmótica se conoce, determina por comparación la que a otras corresponde; prepara *disoluciones isotónicas o isosmóticas* de diversas substancias; refiere su concentración al peso molecular y deduce que *las disoluciones isotónicas de cuerpos no electrólitos son también isomoleculares,* o lo que es igual: *todas las moléculas de cuerpos no electrólitos ejercen en disolución la misma presión osmótica,* ley de trascendental importancia que también fué encontrada por Hamburger y otros investigadores.

En este estado las cosas, aparece van't Hoff, y en un momento de sublime inspiración compara las disoluciones con los gases, descubre sus analogías y establece la igualdad entre las presiones osmótica y gaseosa, demostrando que *la fórmula* $PV = RT$ *se aplica a los cuerpos disueltos lo mismo que a los gases, sin necesidad de modificar el valor de la constante* R, siempre que se consideren disoluciones diluídas en grado suficiente.

Nuestro punto de partida es el marcado por esta fase, y sin entrar en la crítica y discusión de las teorías que se han emitido acerca del mecanismo de la ósmosis, de los procedimientos directos o indirectos propuestos para medir la

presión osmótica, aunque utilizando de todo ello cuanto se juzgue necesario para el objeto que perseguimos, hablaremos de la fórmula de van't Hoff, procurando demostrar cómo el mismo razonamiento termodinámico que utilizó para deducirla en el caso de disoluciones diluídas, conduce a ecuaciones más perfectas, modificando adecuadamente los fundamentos.

*
* *

Las leyes de la presión osmótica, con su carácter de limitadas, no permiten aplicar la ecuación $P V = R T$, que las resume, a toda clase de disoluciones. Si estas son bastante diluídas y de cristaloides no electrólitos (1), existe concordancia aceptable entre las determinaciones experimentales y las deducciones teóricas; pero a medida que la concentración aumenta, se manifiestan y acentúan más y más las discrepancias entre los valores encontrados por uno y otro procedimiento. La comprobación de ambos extremos se encuentra, por una parte, en los resultados obtenidos por Morse y Frazer, en tanto que Berkeley y Hartley, trabajando con disoluciones de sacarosa de mayor concentración, prueban cómo las diferencias entre las presiones osmóticas observadas, y las calculadas según la teoría de

(1) Las disoluciones de electrólitos, como ya observó de Vries, son siempre *hipertónicas* respecto a las de igual concentración molecular de cuerpos que no lo son. Las anomalías que los electrólitos presentan se explican fácilmente con la teoría de Arrhenius, y admitiendo que los iones ejercen la misma presión osmótica que las moléculas. La fórmula en este caso toma la forma $P V = i R T$, en donde i es un factor correctivo, llamado también *coeficiente isotónico,* variable para una misma substancia con la concentración, suponiendo constante la temperatura. Los valores de este coeficiente, calculados en función de los cocientes que se obtienen dividiendo las conductibilidades moleculares por las moleculares límites, para las concentraciones que se consideran, son aproximadamente iguales a los encontrados por de Vries con el método plasmolítico, y por Hamburger siguiendo el de los glóbulos rojos.

van't Hoff, son ya enormes para líquidos de concentración poco superior a la doble normal.

Precisa advertir que la manera de estimar la concentración varía en las citadas determinaciones. Morse comprobó en el curso de sus numerosas investigaciones, que los valores experimentales de la presión osmótica concuerdan más exactamente con los teóricos, si en el cálculo de éstos se supone aquélla igual a la presión que la substancia ejercería si reducida al estado gaseoso ocupara el volumen del disolvente, en lugar de considerarla como van't Hoff, igual a la presión que la substancia ejercería si su volumen fuera el de la disolución. De aquí vienen las expresiones de *normalidad en peso* y *normalidad en volumen,* de uso frecuente en la indicación de presiones osmóticas.

H. N. Morse y J. C. W. Frazer.

Azúcar en 1.000 gramos de agua.	Temperatura.	Presión observada.	Presión calculada.
17,1 gramos.	20°,5 C.	1,25 atms.	1,21 atms.
34,2 —	18°,5 —	2,44 —	2,40 —
68,4 —	21°,5 —	4,80 —	4,25 —
102,6 —	19°,4 —	7,23 —	7,22 —
171,0 —	20°,0 —	12,08 —	12,07 —
273,6 —	17°,5 —	19,07 —	19,14 —
307,8 —	20°,2 —	21,80 —	21,74 —
342,0 —	22°,5 —	24,34 —	24,37 —

Lord Berkeley y M. Hartley.

(Temperatura = 0° C).

Azúcar en litro de disolución.	Presión observada.	Presión calculada.
120,7 gramos.	9,50 atms.	8,40 atms.
180,1 —	13,95 —	12,45 —
240,0 —	21,30 —	16,70 —
300,2 —	26,77 —	» —
360,0 —	32,00 —	25,10 —
420,0 —	43,00 —	29,20 —
540,4 —	67,51 —	» —
660,5 —	100,78 —	» —
750,6 —	133,74 —	51,90 —

La introducción del criterio de Morse, así como el aumento que correspondiera al pasar de 0° a 20 ó 25°, para hacer los resultados de Berkeley y Hartley comparables con los del cuadro anterior, no modificaría en nada las conclusiones fundamentales que el examen de estas series de valores permiten deducir, aun habida cuenta de los errores que al método experimental, utilizado por los citados físicos, puedan afectar.

Puede, pues, admitirse la fórmula de van't Hoff en el caso del azúcar de caña para concentraciones inferiores a la normal en peso, ya que las diferencias entre los valores calculados para la presión osmótica y los experimentales son pequeñas, y lo mismo pueden derivar de la imperfección de ella que de los métodos de trabajo; pero como se ve, son poco extensos los límites de aplicación para que pueda considerarse como resumen de una teoría general de las disoluciones, aun suponiendo que para otras substancias no sea de aplicación más restringida. Se impone, en consecuencia, la necesidad de hallar una expresión de mayor amplitud en sus aplicaciones, y si posible fuera, la que resuma de una manera general a todas las disoluciones, cualquiera que sea su concentración.

Las primeras tentativas realizadas en este sentido fueron conducidas por una senda análoga a la seguida para modificar la ecuación de Clapeyron $PV = RT$, característica de los gases reales; pero sólo aplicable al caso teórico de un gas perfecto, por ser resultado de las leyes Boyle-Mariotte y Gay-Lussac, cuyo significado, alcance y grado de exactitud es de sobra conocido. Y no debe causar sorpresa ver encauzados los esfuerzos con esa orientación, porque dada la sorprendente analogía que se reconoce entre las disoluciones diluídas y los gases, ¿no era de esperar pudiera aplicarse la fórmula de van't Hoff a las disoluciones concentradas, modificándola convenientemente, como se hace con la de los gases cuando se consideran sometidos a fuertes pre-

siones? En una palabra: ¿las relaciones cuantitativas entre la presión osmótica y la concentración, no podrían expresarse por una ecuación semejante a las establecidas por Van der Waals, Clausius, Sarrau, etc., para los gases, que si bien no son perfectas hasta el extremo de resistir el rigorismo científico, contienen savia de la verdad, ya que con ellas se han explicado satisfactoriamente muchos hechos y hasta adelantándose a éstos, se pudieron deducir con aproximación maravillosa las constantes críticas de algunos gases, quince años antes de conseguir su liquefacción? (1).

Sabido es que la ley de compresión de los gases descubierta por Boyle en 1661, y confirmada experimentalmente por Mariotte en 1676, pierde su validez cuando se trata de fuertes presiones. Así quedó demostrado por investigaciones que, a partir de Sulzer (1753), fueron realizadas por distinguidos físicos, figurando en primera línea, por la mayor intensidad y eficacia de su labor, Natterer, Regnault, Cailletet, Andrews, Amagat, etc. Compenetrado Van der Waals de estos trabajos, y ante la necesidad, cada vez más sentida, de llevar a la ecuación de Clapeyron las modificaciones necesarias para ponerla en armonía con los hechos

---

(1) Sarrau, utilizando la fórmula

$$\left[p + \frac{K\varepsilon^{-T}}{(v+\beta)^2}\right](v-\alpha) = RT$$

que dedujo buscando la interpretación de los resultados obtenidos por Amagat en una larga serie de investigaciones sobre el nitrógeno, operando a la temperatura ordinaria, encontró para el expresado gas como temperatura y presión críticas — 142° y 32,9 atmósferas, respectivamente. Quince años más tarde Olszewski obtuvo experimentalmente — 146° y 35 atmósferas, y Wroblewski 146° y 33 atmósferas. Anteriormente Van der Waals, entre las muchas verificaciones a que sometió su fórmula, dedujo para temperatura crítica del anhídrido carbónico + 32°,5, valor que no difiere mucho de + 30°,9 encontrado por Andrews experimentalmente, y menos de + 31°,35 que se admite en la actualidad.

revelados por la experiencia, convirtiendo así la ecuación de estado de los gases perfectos o ideales en fórmula práctica de los gase reales, sumó sus esfuerzos con los de sus antecesores, y en 1879 vió el sabio holandés coronados sus desvelos por el éxito, llegando para todos los gases a la ecuación

$$\left(p + \frac{a}{v^2}\right)(v - b) = R\,T,$$

en donde a y b son coeficientes particulares propios de cada gas, conservando R el mismo valor que en la fórmula de Clapeyron (1). Esta ecuación, que expresa aproximada-

---

(1) Puede expresarse esta constante por números muy distintos, según sean las unidades de peso, volumen y presión que se adopten. Para un kilogramo de gas, midiendo el volumen en metros cúbicos y la presión en kilogramos, se tendrá: Un kilogramo de aire en condiciones normales de presión y temperatura representa $0^{m^3},7733$, y como la presión sobre 1^{m^2} es 10333 kilogramos,

$$R = \frac{10333 \times 0{,}7733}{273} = 29{,}27$$

y para un gas cualquiera expresando por *D* su densidad

$$R = \frac{29{,}27}{D}. \qquad (a)$$

Considerando un gramo-molécula de cualquier gas, tomando el volumen en litros y la presión en atmósferas, se obtiene el mismo valor para todos.

$$R = \frac{1 \times 22{,}384}{273} = 0{,}08199\ldots\ldots \qquad (b)$$

y también 81,99, o sea, en números redondos, 82 (cifra que más adelante ha de utilizarse), si el volumen se expresa en centímetros cúbicos.

Finalmente, expresando el volumen del gramo-molécula en centímetros cúbicos, y la presión en gramos por centímetro cuadrado,

$$R = \frac{1033{,}3 \times 22384}{273} = 84723. \qquad (c)$$

mente los resultados de la experiencia, aplicándose con igual suerte al estado líquido, resulta como corolario obligado de la teoría cinética combinada con la atracción de las moléculas gaseosas, que ya Hirn había previsto como manifestación de la ley de atracción universal (1).

Volviendo a nuestro particular punto de vista sobre la presión osmótica, recordemos que, adoptando Morse la normalidad en peso para apreciar el grado de concentración de las presiones, introdujo en la fórmula de van't Hoff una corrección que no puede pasar inadvertida. Considera Morse que esta modificación equivale a reemplazar el factor V por el término (V — b), en donde V expresa el volumen de la disolución y b un factor correctivo que introduce en la ecuación el volumen de las moléculas de la substancia disuelta. Bogdan, entre otros investigadores, propuso para las disoluciones fórmulas parecidas a la de Van der Waals. Mas modernamente Berkeley y Hartley, ya mencionados, buscando una expresión que se acomodara a las series de investigaciones por ellos efectuadas, modificaron de muy diversa manera la ecuación de Van der Waals, llegando a la fórmula

$$\left(\frac{A}{V} - P + \frac{a}{V^2}\right)(V - b) = RT,$$

que con gran exactitud encierra las relaciones experimentales que ellos mismos habían tenido ocasión de compro-

(1) Decía Hirn: A causa de la separación relativamente grande que se admite entre las moléculas de los distintos gases, la atracción mutua, que ha de ser proporcional al cuadrado de las distancias, son extraordinariamente débiles cuando de bajas presiones se trata, y su influencia, con tal motivo no se deja sentir. Pero al disminuir el volumen de una manera considerable por el efecto de grandes presiones, la atracción, débil al principio, se manifiesta después con energía, actuando como una presión interna que aumenta por la aproximación misma, determinando una compresión de la masa gaseosa mayor a la indicada por la ley.

bar. Los factores $\frac{A}{V}$ y $\frac{a}{V^2}$ que esta ecuación contiene, son correctivos. Expresa el primero la atracción entre las moléculas del disolvente y las del cuerpo disuelto; el segundo, la atracción recíproca entre las moléculas del cuerpo disuelto.

Sin embargo, tal manera de proceder, no puede conducir al establecimiento de una teoría general de las disoluciones. La ecuación de van't Hoff, notable por su sencillez, marca verdaderamente una época afortunada en la evolución del concepto de presión osmótica; entraña, desde luego, los principios de una genial y meritísima generalización; pero como producto de una deducción termodinámica afirmada sobre hipótesis que no son aceptables en el caso de disoluciones concentradas (1), no puede considerarse como resul-

---

(1) Razonaba van't Hoff, como es sabido, haciendo recorrer a la molécula de un cuerpo dado, un ciclo isotermo reversible a través de los estados líquido y gaseoso, y calculando los trabajos parciales efectuados, cuya suma debe ser igual a cero, necesariamente. Utilizaba como proposiciones para este razonamiento, la ley de de Vries y Hamburger y la que Henry formuló en 1803, reconocida siempre como ley física perfectamente exacta.

Según la primera «*Las disoluciones equimoleculares de los cuerpos no electrólitos son isotónicas*», o bien «*toda molécula que no es electrólito ejerce en disolución la misma presión osmótica*», ley que, considerada como equivalente a la formulada por Avogadro para los gases, implica que la presión osmótica no depende de la constitución química de las moléculas ni de su forma y dimensiones, sino del *número que haya contenidas en el volumen considerado*, exclusivamente.

En la ley de Henry *Los gases se disuelven en los líquidos proporcionalmente a la presión*», que se aplica también a los líquidos disueltos, se manifiesta implícitamente la proporcionalidad que existe entre la concentración y la tensión del vapor, y, por tanto, con la presión osmótica. De aquí que van't Hoff sentaba en 1885 «*para todos los gases o vapores que se disuelven en un líquido cualquiera, según indica la ley de Henry, la presión osmótica es igual a la gaseosa*»

La ley de absorción fué, en consecuencia, la que permitió afirmar que la presión osmótica obedece a las leyes de los gases, constitu-

tado de una teoría general, y todo intento de ponerla en armonía con los resultados experimentales, en cuanto la concentración se eleva, introduciendo en ella factores correctivos que satisfagan a particulares investigaciones, puede calificarse de lamentable en el terreno de la ciencia pura, por conducir siempre a comprobaciones parciales, desviando la atención de los generales conceptos y de esas deducciones sintéticas, verdaderos centros de atracción donde convergen, obedeciendo a una ley común, fenómenos que, sometidos a un ligero examen, aparecen sin relaciones manifiestas.

Existe, pues, una razón de carácter puramente matemático que hace inadaptable la ecuación de van't Hoff a las disoluciones concentradas, y como lo han demostrado Boldingh, Van Lear y Van der Vaals, tantas veces citado, hay que volver en la deducción termodinámica de la teoría de van't Hoff al punto preciso donde fueron introducidas las hipótesis, para fundamentarlas sobre bases más amplias y generales, al mismo tiempo que se da cabida a nuevos factores que indiscutiblemente se presentan, determinando una influencia poderosa a medida que las concentraciones se hacen mayores.

El número de compuestos que forma parte de una disolución y su estado molecular; las asociaciones posibles y, en general, las variadas combinaciones que entre el disolvente y los cuerpos disueltos pueden establecerse; los cambios de volumen producidos en el momento de realizar las mezclas; los efectos térmicos que la dilución determina; la compresibilidad de las disoluciones, etc., etc., son factores que deben tenerse muy presentes en todo momento, porque varían mu-

---

yendo al propio tiempo la confirmación experimental de que las substancias en disolución ejercen sobre una pared semi-permeable la misma presión que ejercerían sobre una pared ordinaria, si afectaran el estado gaseoso con igual concentración, y a la misma temperatura.

cho de uno a otro caso, y una ecuación termodinámica completa debe contenerlos todos, no puede ser independiente de ellos. Ciertamente que este camino conduciría a expresiones complicadísimas, tan difíciles de establecer como de verificar en el terreno práctico; pero se puede demostrar la bondad del procedimiento si para introducir algunas simplificaciones se aplica al caso de disoluciones que pueden llamarse *ideales,* de muy difícil, por no decir de imposible realización, dadas las condiciones que han de cumplir.

Supongamos el sencillo caso de una disolución formada por dos componentes de mixcibilidad perfecta, que conservan siempre normal el peso molecular, lo que quiere decir que entre ellos no hay reacción ni combinación de ninguna especie, y, por último, admitamos sea incompresible el sistema. Designando por P la presión osmótica, igual a la presión adicional que es necesario ejercer sobre la disolución para impedir que el líquido exterior atraviese la membrana semi-permeable y se mezcle con el líquido contenido en el interior de la célula; por x la razón del número de moléculas de substancia disuelta al total de las que forman la disolución, y por V_m el volumen molecular del disolvente, la ecuación termodinámica aplicable a todas las disoluciones, y en todos los grados de concentración es

$$P = \frac{RT}{V_m} [-Lg(1-x)], \qquad [I]$$

o bien para que afecte forma más práctica

$$P = \frac{RT}{V_m}\left(x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 \ldots\right) \qquad [II]$$

si se desarrolla en serie el término $[-Lg(1-x)]$.

Expresando la concentración con arreglo al criterio de Morse, por el número de gramos-moléculas de substancia

disueltos en 1000 gramos de agua, que llamamos g, resulta $x = \frac{g}{55,5 + g}$, en donde 55,5 representa el número de gramos-moléculas de agua contenidos en 1000 gramos de este disolvente $\left(\frac{1000}{H20} = \frac{1000}{18,016} = 55,5\right)$, no considerando la parte que ha podido entrar en combinación con la substancia. Y como el volumen molecular del agua a 25° es igual a $\frac{1002,8}{55,5}$ (a esa temperatura 1000 gramos de agua $= 1002^{cc},8$), si reemplazamos valores en la [II], sacando previamente x fuera del paréntesis y suprimimos los términos que contienen sus potencias a partir de la segunda, dado el escaso valor que representan, tendremos para calcular la presión osmótica (1):

$$P = \frac{82 \times 273 \times 55,5}{1002,8} \cdot \frac{g}{55,5 + g} \left[1 + \frac{1}{2}\left(\frac{g}{55,5 + g}\right)\right], \qquad [III]$$

(1) En una nota ha quedado deducida la constante R = 82. Morse, en sus cálculos, admite 22280^{cc} para volumen molecular de los gases, y entonces R = 81,61.

(Continuará).

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

V.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (segunda parte), por *José Echegaray*. Conferencia cuarta 121

VI.—Bosquejo del estudio de las mareas, por *Eduardo León y Ortíz* 155

VII.—Las relaciones modulares en los cráneos de España. Nota presentada en Mayo de 1915 (continuación), por *Luis de Hoyos Sáinz* 170

VIII.—La presión osmótica y las disoluciones ideales, por *Rafael Luna Nogueras* 188

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

FEB 1926
National Museum

TOMO XIV.—NÚMERO 5.
NOVIEMBRE DE 1915

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1915

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

IX.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.) (1)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia quinta.

SEÑORES:

Hemos demostrado, en la conferencia anterior, que la forma de la función χ necesaria y precisa para que el sistema de esferillas se encuentre en un estado de movimiento permanente en el orden estadístico, era la de *una exponencial;* y admitida esta forma, decíamos: El número N_1 de esferillas tales que las componentes de su velocidad tienen valores comprendidos entre

$$L \begin{cases} u \text{ y } u + du \\ v \quad v + dv \\ w \quad w + dw \end{cases}$$

es la siguiente:

$$N_1 = Ae^{-hc^2} du\, dv\, dw,$$

siendo A y h dos constantes, de cuya determinación en breve nos ocuparemos.

Designamos también por c una de las velocidades de este grupo, por ejemplo, la del punto que en el paralelepípedo del diagrama está más cerca del origen.

Claro es que pudiéramos tomar otra cualquiera, porque como en dicho diagrama todas las velocidades van del ori-

(1) En las cuatro Conferencias anteriores, donde dice (SEGUNDA PARTE) debe decir: (PRIMERA PARTE).

gen al interior del paralelepípedo $du \cdot dx \cdot dw$, y éste es muy pequeño, todas en este grupo son casi iguales y casi tienen la misma dirección.

De suerte que podremos escribir:

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Y también podíamos expresar la fórmula anterior, poniendo en ella el valor de c, de este modo:

$$N_1 = A\, e^{-h(u^2+v^2+w^2)}\, \partial u\, \partial v\, \partial w.$$

Todo el factor de la exponencial que multiplica á

$$du.\ dv.\ dw,$$

es lo que llamábamos la *densidad de las velocidades*, encerradas en el cuadro que para abreviar designábamos por L.

Y fácilmente se comprende ahora la razón por la que hemos dado á h un valor negativo.

En efecto, las mayores velocidades tienen menos probabilidades de realizarse que las velocidades medias.

Ya lo explicábamos en una de las primeras conferencias.

En la agitación general de las esferillas se necesitan muchos choque y en condiciones especiales para que la velocidad vaya creciendo.

Y esto resulta poniendo el exponente negativo, porque

$$e^{-hc^2} = \frac{1}{e^{hc^2}}$$

Donde vemos, en efecto, que cuando c crece, crece el denominador y disminuye el quebrado, lo cual no se verificaría si h fuera positivo y la exponencial hubiese quedado en el numerador.

Entonces tendríamos lo contrario: que la densidad de las grandes velocidades sería mayor que la de las pequeñas.

La figura 15 indica la forma de esta exponencial:

$$Y = Ae^{-hc^2}$$

Si representamos por Y su valor y trazamos dos ejes

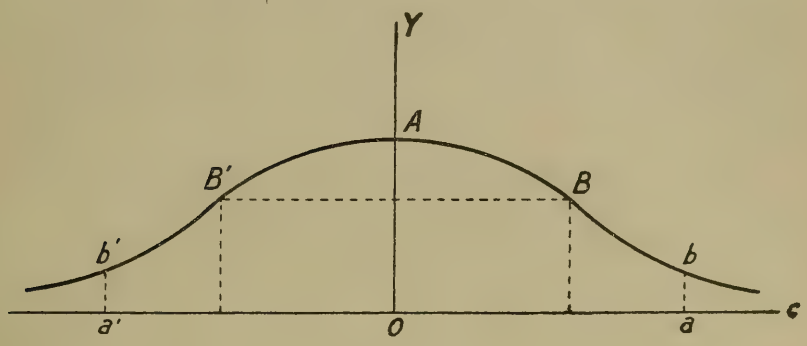


Figura 15

Oc, OY, dando á c valores desde el infinito negativo hasta el infinito positivo, las ordenadas Y determinarán la curva B' A B.

Es simétrica respecto al eje de las Y, porque como c entra elevada al cuadrado, dos valores c y $-c$ dan la misma ordenada.

Para $c = 0$ la exponencial se reduce á la unidad y queda:

$$Y = OA = A:$$

A medida que c crece, como antes indicamos, disminuye Y, y para

$$C = \infty$$

se reduce á cero.

De suerte que la curva, por ambos lados, tiene por asíntota el eje de las c.

Esta curva y estas exponenciales se encuentran en el cálculo de probabilidades al demostrar el problema de Bernouilli.

***

Así, pues, se expresa gráfica y analíticamente la ley de distribución de las velocidades en un conjunto de N esferillas iguales y de igual masa, cuando el sistema ha llegado á un estado permanente; es decir, á un estado estadístico permanente.

La permanencia significa, que para cada valor c de la velocidad el número de esferillas, que tienen próximamente esta velocidad c, es en todos los instantes el que está expresado por

$$N_1 = Ae^{-h(u^2+v^2+w^2)}\partial u\,\partial v\,\partial w$$

Al emplear la frase anterior: *que tienen próximamente la velocidad* c, empleamos una frase poco precisa; debemos decir: el número de esferillas cuyas velocidades tienen sus componentes comprendidas en los límites que hemos representado por L, siendo

$$L = \begin{vmatrix} u & u+\partial u \\ v & v+\partial v \\ w & w+\partial w \end{vmatrix}.$$

En el diagrama están representadas por un haz piramidal que termina en el paralelepípedo $du\,dv\,dw$. En el gas compuesto de esferillas, están distribuídas por todo el espacio.

Además, el estado permanente supone homogeneidad en todo el flúido; no la homogeneidad continua que hemos estudiado otras veces, sino una homogeneidad, por decirlo así, estadística. Es decir, que el número N_1 de velocidades está distribuído uniformemente en todo el espacio que ocupa el

flúido, y por eso decíamos, que en cada paralelepípedo de volumen igual á la unidad, en todos los instantes hay el mismo número de esferillas de las del número N_1. Y por eso decíamos que C era constante y que el número de esferillas contenidas en dicho paralelepípedo era $C\ N_1$.

Para otra velocidad c' y otros límites L' el número de esferillas ó de velocidades sería N' distinto del anterior, menor si c crecía; mayor, si disminuía c.

Pero en este caso correspondería á la unidad de volumen $C\ N'_1$ como para las velocidades c correspondía $C\ N_1$ siendo C la misma.

Además, en cada punto y en un tiempo muy breve las velocidades tomarán todas las orientaciones.

Y ya que todo esto es al principio algo difícil de comprender y difícil de explicar, permítasenos una imagen y una hipótesis al parecer extraña; pero que dan forma sensible á estos diferentes conceptos.

Supongamos que un observador estuviera dotado de un sentido de la vista tan perfecto que pudiera ver y seguir en el flúido el movimiento y, por lo tanto, la velocidad de todas y cada una de las esferillas por virtud de la persistencia de la sensación; y supongamos que á esta agitación del flúido se le aplicase un cinematógrafo ideal.

Pues para cada punto, suponiendo que pudiera aislarlo durante el intervalo infinitamente pequeño dt, vería, no la velocidad c, ó si se quiere las del manojo del diagrama, porque estas velocidades toman todas las orientaciones en breve tiempo, sino una esfera, ó si la proyección se verificase en un plano, *un círculo.*

Si la velocidad c era muy grande, la densidad de las velocidades, según la figura 15, sería muy pequeña, y esta imagen del disco tendría, por decirlo de este modo, muy poca densidad; su luz ó color sería muy *pálido.*

Para otra velocidad menor, y, por lo tanto, para otra densidad mayor de velocidades, vería otro círculo más peque-

ño y de color más intenso, que se superpondría al primero y no dejaría de él mas que una corona circular.

Para otra velocidad menor todavía, y, por lo tanto, para una densidad mayor, vería otro círculo aun más denso; y si suponemos que la intensidad del color crece con la densidad de velocidades, aún se superpondría un círculo más vivo á los dos círculos anteriores, y así sucesivamente hasta el círculo de color más intenso, que correspondería, por decirlo de este modo, á la ordenada *OA* de la figura 15.

Pues esta serie de coronas de tintas más o menos intensas *se reproducirían para todos los puntos del espacio* en este cinematógrafo ideal.

Esta uniformidad de círculos y coronas es la que simboliza la uniformidad estadística del flúido al llegar éste á su estado permanente.

Todo es igual en todos los puntos, pero no en todos los instantes, sino en cada intervalo pequeño de tiempo.

Y la persistencia de la sensación de esta experiencia ideal sería la que convertiría en *continuo lo discontinuo,* como traza un círculo de luz el extremo de una cuerda inflamada que se hace girar rápidamente, aunque en cada instante el punto luminoso no esté en todo el círculo, sino en un punto de él.

Veamos ahora cómo se determinan las constantes A y h; mejor dicho, cómo se comprende que pudieran determinarse.

*
* *

Empecemos por la constante A.

Hemos dicho que el número de esferillas cuyas velocidades tienen componentes comprendidas en los límites del cuadro L estaba representado por la fórmula

$$N_1 = Ae^{-hc^2} \partial u \, \partial v \, \partial w$$

ó bien por esta otra:

$$N_1 = A e^{-h(u^2+v^2+w^2)} \partial u \, \partial v \, \partial w.$$

Si hacemos variar u, v, w, entre $-\infty$ y $+\infty$ é integramos el segundo miembro, es claro que el número que resulte será el *número de todas las esferillas*, porque comprenderá todas las velocidades posibles.

De suerte que si representamos por N el número total de esferillas, podremos escribir:

$$N = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(u^2+v^2+w^2)} \partial u \, \partial v \, \partial w$$

Y efectuando la integración deduciremos el valor de A, que de este modo será conocida, suponiendo que previamente hemos determinado el valor de la constante h.

Claro es, que este método supone cierto atrevimiento, porque aplicamos el método de integración á un sistema eminentemente discontinuo y además no existirá ninguna velocidad igual á ∞.

Pero estos son escrúpulos por los que tendremos que pasar constantemente en la teoría cinemática de los gases.

Y además en la práctica es corriente sustituir á lo discontinuo lo continuo cuando lo discontinuo cambia por grados muy pequeños.

Por lo demás, la misma figura 15, en la que está simbolizada la marcha de la exponencial, nos demuestra, por ser la curva asintótica al eje de las e, que toda la parte de la izquierda y de la derecha, á partir de ordenadas muy pequeñas $a\,b$, $a'\,b'$ puede despreciarse ó puede tomarse en cuenta sin error sensible.

Claro es que no basta que la curva sea asintótica para llegar á este resultado; pero sería sumamente fácil demostrar que esta hipótesis es exacta.

Efectuemos ahora la triple integración, que en rigor podemos descomponer de esta manera para comodidad en el cálculo:

$$N = A\left[\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u\right]\left[\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(w^2+v^2)}\partial v\,\partial w\right].$$

Y hemos separado la integral triple en dos integrales porque las variables de la integración están separadas.

Hallemos ahora la integral doble:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(v^2+w^2)}\partial v\,\partial w$$

Para ello cambiemos de variable, y en vez de v y w tomemos circunferencias $b\ b'\ b''$ (figura 16), cuyo centro esté en O y cuyo radio sea r.

Consideremos dos de estas circunferencias infinitamente próximas y la doble integración se reducirá á sumar todos los términos de la integral

$$e^{-h(v^2+w^2)}\partial v\,\partial w$$

comprendidos en la corona $b\ b'\ b''$.

Y como en todos ellos la distancia al centro es próximamente la misma, $v^2 + w^2 = r^2$ será constante.

Podremos sacar

$$e^{-h(v^2+w^2)} = e^{-hr^2},$$

factor común de todos los elementos $\partial v\,\partial w$, y pues la suma de éstos es el área de la corona, la integral se reducirá á

$$\int_{r=\ 3}^{r=\infty} e^{-hr^2} \times \text{área de la corona};$$

pero

$$\text{área de la corona} = 2\,\pi\, r \partial r;$$

luego

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(v^2+w^2)}\, \partial v\, \partial w = \pi \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-hr^2}\, 2\, r \partial r$$

que se integra inmediatamente y que da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(v^2+w^2)}\, \partial v\, \partial w = \pi \left[\frac{-e^{-hr^2}}{h} \right]_{r=0}^{r=\infty} = \frac{\pi}{h}.$$

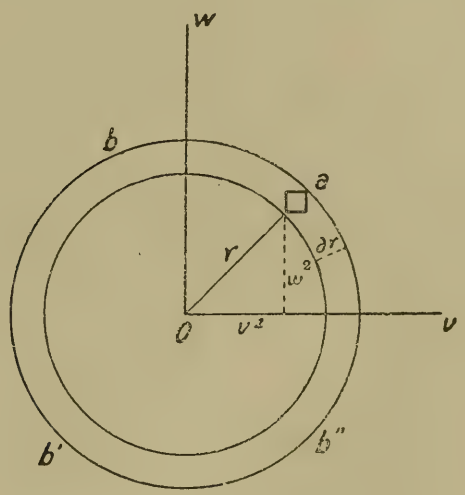


Figura 16

Sustituyendo esta expresión en el valor de N tendremos:

$$N = A \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\, \partial u \cdot \frac{\pi}{h}$$

ó

$$N = A \frac{\pi}{h} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\, \partial u,$$

y no queda más que integrar esta última expresión. Pero el

resultado de la integración se puede escribir inmediatamente.

En primer lugar las tres integrales

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\, du; \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hv^2}\, dv, \text{ y } \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hw^2} \partial w$$

son exactamente iguales. La forma es la misma, los mismos son los límites; luego poco importa que á la variable la llamemos u, v, ó w.

Mas el producto de las dos últimas es precisamente la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h(v^2+w^2)} \partial u\, \partial w$$

que hemos obtenido porque estando separadas las variables lo mismo da el producto de las integrales que la integral doble.

Luego este producto es el cuadrado de una de ellas, y podremos escribir:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2} \partial u = \sqrt{\frac{\pi}{h}} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}$$

Así en último análisis tendremos para N

$$N = A \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}} \times \frac{\pi}{h}$$

ó

$$N = A \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{h^{\frac{3}{2}}}$$

y hallaremos finalmente para la constante A:

$$A = N \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}}.$$

Si conociésemos h la constante A quedaría determinada, porque N es un dato del problema: el *número de esferillas*.

Y aun sin eso; en un gas cualquiera para un peso representado por la *molécula-gramo,* se sabe por los admirables trabajos de Perrín y de otros autores que el número N está determinado: es $68{,}10^{22}$.

Las cifras superiores 68 en otras experiencias son 62; y en otras, 64.

Como son cuestiones en que ahora no podemos entrar y más se trata en esta teoría cinemática de los gases por lo pronto, de leyes y de fórmulas, que de determinaciones numéricas, sólo haremos constar que A queda conocida desde el momento en que se conozca h.

***

Hemos hallado que el valor de A era:

$$A = N \frac{h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}}$$

y que, por lo tanto, el número de esferillas para las que las componentes de sus velocidades están comprendidas en los límites que marca el cuadro

$$L = \begin{vmatrix} u & u + du \\ v & v + dv \\ w & w + dw \end{vmatrix},$$

dicho número, repetimos, N_1 estará determinado por la fórmula

$$N_1 = \frac{N h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-hc^2} \partial u \, \partial v \, \partial w,$$

que es la primera fórmula en las que hemos sustituído á la densidad de velocidades $\chi(u, v, w)$ la expresión de χ necesaria y suficiente para la permanencia del movimiento en su estado de equilibrio estadístico.

***

El primitivo diagrama de velocidades en que figuraba el paralelepípedo $du \cdot dv \cdot dw$, recordarán mis alumnos que lo convertimos en otro diagrama, en que á las componentes de la velocidad u, v, w, sustituíamos las de un sistema polar de coordenadas.

Recordarán también que considerábamos una figura análoga á la figura 17.

En este único diagrama considerábamos esferas cuyos radios variaban por incrementos muy pequeños ∂c.

Por ejemplo, una esfera de radio c y otra de radio $c + \partial c$.

Sobre la esfera de radio c considerábamos un cuadrilátero $ab\,a'b'$, formado por dos paralelos ab, $a'b'$ y dos meridianos aa' bb'.

Trazando el radio de la esfera $0a = c$ y prolongándolo una longitud $aa_1 = \partial c$, con lo cual determinaríamos el punto a_1 de otra esfera concéntrica con la primera y de radio $c + \partial c$, imaginábamos un sólido, próximamente un paralelepípedo, cuya base sería aa' $b'b$ y cuya altura sería $aa_1 = \partial c$.

De este modo podíamos determinar en coordenadas polares el número de esferillas comprendidas en este paralelepípedo: sus velocidades estarían comprendidas entre c y ∂c.

La fórmula que entonces obtuvimos, cambiando las coordenadas tri-rectangulares por coordenadas polares, era

$$\chi(u, v, w)\, c^2 \partial c \cdot \operatorname{sen} \theta \partial \theta \partial \varphi,$$

representando por θ la distancia polar y por φ el azimut.

Pero observando que

$$\operatorname{sen} \theta \partial \theta \partial \varphi$$

es precisamente el área de un cuadrilátero trazado sobre una esfera de radio 1 concéntrica con las anteriores y co-

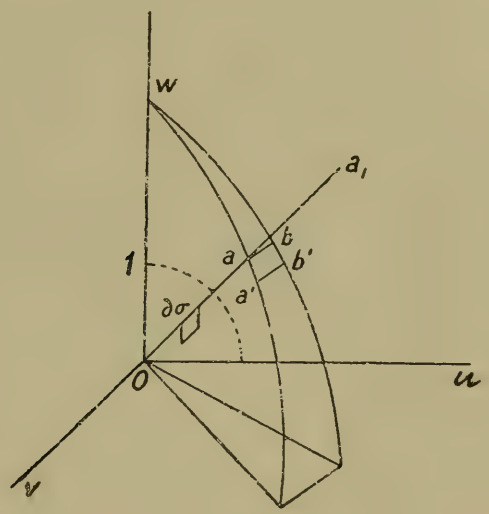


Figura 17

rrespondiente al cuadrilátero $ab\,a'b'$, es decir, el cuadrilátero que interceptaría en esta esfera una pirámide que tuviese por base $aa'\,bb'$ y cuyo vértice estuviera en 0, es claro que representando por $\partial\sigma$ el área de dicho cuadrilátero, la fórmula anterior se puede escribir de este modo:

$$\chi(u, v, w)\, c^2 \partial c\, \partial \sigma$$

en que χ representa la densidad de esferillas o la densidad de velocidades cuando éstas varían entre c y $c + \partial c$.

Pero ya hemos determinado la expresión de χ ó de la densidad de velocidades, y podemos, por lo tanto, escribir

$$A e^{-hc^2} c^2 \partial c \, \partial \sigma,$$

ó recordando el valor de A,

$$\frac{N h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-hc^2} c^2 \partial c \, \partial \sigma.$$

Este es el número de esferas que tienen velocidades comprendidas entre c y $c + \partial c$ y que están dentro del nuevo paralelepípedo elemental; y quien dice el número de esferillas quiere decir el número de velocidades comprendidas en los límites (L).

Si integramos para todos los cuadriláteros $\partial \sigma$ situados sobre la esfera de radio 1, habremos integrado todos los paralelepípedos elementales de base $aa' \, b'b$ y de altura ∂c, es decir, habremos extendido en el diagrama la suma de dichas esferillas ó velocidades á la capa esférica comprendida entre las dos esferas de radio c y de radio $c + \partial c$.

Dicha integral será

$$\frac{N h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-hc^2} c^2 \partial c \int_0^{4\pi} \partial \sigma,$$

porque el área de la esfera de radio 1 es 4π.

Efectuando la integración resultará el área total de la esfera, y tendremos

$$4\pi \frac{N h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-hc^2} c^2 \partial c,$$

ó bien,

$$\frac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc^2}c^2\,\partial c.$$

De suerte que el número de esferillas con velocidades comprendidas entre c y $c+\partial c$ en el diagrama, y, por lo tanto, en el flúido, está expresado por la fórmula anterior.

También podemos decir, en vez de esferillas, el número de velocidades comprendidas entre c y $c+\partial c$, sin atender más que á la magnitud y no á la dirección, porque las habrá en todas direcciones. Dicho número es, según esto, el que da la expresión precedente.

Pero fíjense bien mis alumnos. En el diagrama las velocidades c tienen forma radial á partir de 0: son los radios de la esfera y están distribuídas uniformemente alrededor del punto 0.

En el espacio las hay en todos los puntos y no tienen un punto común como el punto 0.

Y en cada punto varían de dirección para cada instante y se les puede aplicar la hipótesis cinematográfica de que hablábamos en otra ocasión.

Podemos, pues, consignar este resultado:

Número de velocidades comprendidas entre

$$c \text{ y } c+\partial c = \frac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc^2}c^2\,\partial c.$$

***

Es claro que si integrásemos esta expresión para todas las capas esféricas del diagrama, es decir, si integrásemos respecto á c entre 0 é ∞, deberíamos obtener precisamente el número N, que es el número de esferillas, y como á cada

esferilla le corresponde su velocidad, el número de velocidades. Pero fíjense bien mis alumnos: el número de estas velocidades, sin tener para nada en cuenta su magnitud.

***

Esta última fórmula nos dará la manera de determinar la VELOCIDAD MEDIA DEL SISTEMA DE ESFERILLAS.—Hemos dicho que el número de esferillas cuyas velocidades están comprendidas entre c y $c + \partial c$ se representaba por la fórmula

$$\frac{4 N h^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc^2} c^2 \partial c,$$

y se trata de determinar la velocidad media del conjunto de todas las esferillas.

Sabido es que en general el valor medio de diversas magnitudes que considerásemos como positivas m, m', m''..., cuyo número es n, se expresa por

$$\frac{m + m' + m'' \ldots}{n}$$

y que si hay a magnitudes iguales á m; a' magnitudes m', y así, sucesivamente, esta misma magnitud media, ó media aritmética, como también se llama, tiene por valor

$$\frac{am + a'm' + a''m'' \ldots}{n}$$

representando siempre n el número de todas ellas, ó sea

$$n = a + a' + a'' \ldots$$

Aplicando estas nociones elementales á nuestro caso, y suponiendo, como si se tratara de magnitudes continuas, que todas las velocidades comprendidas entre c y $c + \partial c$

son iguales á c, podremos decir que el sistema de esferillas contiene

$$\frac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc^2}c^2\,\partial c \text{ esferillas con la velocidad } \ldots c$$

$$\frac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc'^2}c'^2\partial c' \text{ esferillas con la velocidad } \ldots c'$$

. . . . . .

La primera columna representa precisamente los números a, a', a'' . . . y la segunda, las magnitudes m, m', m'' . . .; luego la media aritmética de todas estas velocidades, es decir, la velocidad media del sistema, será, representándola por v_m,

$$v_m = \frac{\dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc^2}c^2\,dc \times c + \dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc'^2}\,c'^2\,\partial c' \times c' + \ldots}{\dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc^2}c^2\,\partial c + \dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\,e^{-hc'^2}c'^2\,\partial c' + \ldots}$$

Y aplicando el principio de continuidad á esta fórmula, lo cual no es rigorosamente exacto, pero es la aproximación más elemental en las cuestiones de Mecánica estadística, á las sumas podremos sustituir integrales; y resultará sacando fuera de la integral la constante, é integrando, aunque tampoco sea exacto, no desde la menor velocidad á la mayor velocidad, sino desde 0 á $+\infty$:

$$v_m = \frac{\dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-hc^2}\,c^3\,\partial c}{\dfrac{4\,Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}}\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-hc^2}\,c^2\,\partial c}.$$

Mas el denominador es el número total de esferillas; luego es el número N, lo cual se comprobaría efectuando la integración del denominador, y podremos, por último, escribir el valor de la velocidad media de este modo:

$$v_m = \frac{\dfrac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-hc^2} c^3 \partial c}{N}.$$

Para obtener en términos finitos el valor de v_m no hay más que efectuar la integración indicada, que es una integración elemental; pero que para ahorrar trabajo á mis lectores voy á desarrollar minuciosamente.

***

Se trata, ante todo, de hallar la integral indefinida

$$\int e^{-hc^2} c^3 \partial c,$$

y para ello integraremos por partes, tomando por parte integrable, porque lo es en efecto, $c^{-hc^2} c \partial c$, y por segunda parte, el factor c^2.

La integral de la primera parte es evidentemente

$$\int e^{-hc^2} c \partial c = \frac{1}{2h} \int e^{-hc^2} \cdot 2h\, c \partial c = \frac{1}{2h} \int e^{-hc^2} \partial (hc^2) = \frac{-1}{2h} e^{-hc^2},$$

y, por consiguiente, la integral propuesta será, según el método de la integración por partes,

$$\int e^{-hc^2} c^3 \partial c = \frac{-1}{2h} e^{-hc^2} \cdot c^2 - \int \frac{-1}{2h} e^{-hc^2} 2c \partial c,$$

y como la segunda integral es integrable inmediatamente, hallaremos

$$\int e^{-hc^2} c^3 \partial c = \frac{-1}{2h} e^{-hc^2} \cdot c^2 + \frac{1}{2h} \cdot \frac{1}{h} c^{-hc^2}.$$

Pero esta integral hay que tomarla entre 0 é ∞; luego resultará

$$\int_0^\infty e^{-hc^2} c^3 \partial c = \left[\frac{-1}{2h} e^{-hc^2} \cdot c^2 - \frac{1}{2h^2} e^{-hc^2} \right]_0^\infty.$$

La primera parte,

$$-\frac{1}{2h} e^{-hc^2} c^2,$$

prescindiendo del primer factor constante, puede escribirse de este modo:

$$e^{-hc^2} \cdot c^2 = \frac{c^2}{e^{hc^2}},$$

y aplicando los dos límites

$$\left(\frac{c^2}{e^{hc^2}} \right)_\infty - \left(\frac{c^2}{e^{hc^2}} \right)_0.$$

El primer término para $c = \infty$ toma la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$.

Mas aplicando el método correspondiente á este caso, es decir, tomando las derivadas con relación á la variable c del numerador y denominador, se demuestra que dicho valor es cero.

En efecto, si hacemos para abreviar $c^2 = a$, observando que para $c = \infty$ se tiene $a = \infty$, hallaremos

$$\left(\frac{c^2}{e^{hc^2}} \right)_\infty = \left(\frac{a}{e^{ha}} \right)_\infty = \left(\frac{1}{he^{ha}} \right)_\infty,$$

y en este caso el denominador se hace ∞ y el quebrado, 0.

Pasemos al segundo término,

$$\left(\frac{c^2}{e^{hc^2}}\right)_0,$$

y haciendo $c = 0$ resultará:

$$\left(\frac{c^2}{e^{hc^2}}\right)_0 = \frac{0}{1} = 0$$

De suerte, que los dos primeros términos de la integral se anulan, y sólo queda

$$\int_0^\infty e^{-hc^2} c^2 \partial c = \left(-\frac{1}{2h^2} e^{-hc^2}\right)_0^\infty =$$

$$= -\frac{1}{2h^2}\left(\frac{1}{e^{hc^2}}\right)_\infty + \frac{1}{2h^2}\left(e^{-hc^2}\right)_0.$$

La primera parte para $c = \infty$ se reduce á cero, y la segunda parte para $c = 0$, como la exponencial se reduce á la unidad, se convierte en

$$\frac{1}{2h^2}$$

En suma, la expresión de la velocidad media, que era

$$v_m = \frac{\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-hc^2} c^3 \partial c}{N},$$

sustituyendo, en vez de la integral, el valor que acabamos de obtener nos dará

$$v_m = \frac{\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{1}{2h^2}}{N} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{h^{2-\frac{3}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}\, h^{\frac{1}{2}}}.$$

ó bien,

$$v_m = \frac{2}{\sqrt{\pi h}}$$

Tal es el valor de la velocidad media que podrá conocerse en cada caso, si hay manera de determinar la constante h.

***

Pasemos á otro problema relativo á magnitudes medias: «Cálculo del valor medio de los cuadrados de las velocidades».

Es decir, que en vez de calcular como antes el valor medio de c, vamos á calcular el valor medio de c^2, y podemos repetir palabra por palabra lo que en el problema precedente explicamos.

Haciendo variar c entre cero é ∞, tendremos:

$$\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc^2} c^2 \partial c$$

número de esferillas correspondientes á . . . c^2

$$\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc'^2} c'^2 \partial c'$$

número de esferillas correspondientes á . . . c'^2

. . . . . .

La primera columna expresa el número de esferillas de cada clase.

La segunda columna, el cuadrado de la velocidad de la clase correspondiente.

Si representamos por $(v^2)_m$ el valor medio del cuadrado

de las velocidades, para obtener esta cantidad bastará multiplicar el cuadrado de cada velocidad c^2, c'^2, ... por el número correspondiente de la primera columna, sumar estos resultados y dividir por N; y tendremos:

$$(v^2)_m = \frac{\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc^2} c^2 \partial c \cdot c^2 + \frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc'^2} c'^2 \partial c' \cdot c'^2 + \ldots}{N}.$$

Y sustituyendo las integrales á las sumas, ó si se quiere, la continuidad á la discontinuidad, resultará

$$(v \quad m = \frac{\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-hc^2} c^4 \partial c}{N},$$

y el problema queda reducido á obtener el valor de la integral.

Para ello obtendremos primero la integral indefinida por los procedimientos elementales relativos á este caso.

A este fin descompondremos la cantidad que está bajo el signo integral en dos partes: una, la parte integrable, que será $e^{-hc^2} c \partial c$, y la otra, c^3.

Aplicando la regla de la integración por partes, que sabemos que se formula así: la integral propuesta es igual á la integral de la parte integrable por la segunda parte, menos la integral de la parte integrada por la diferencial de dicha segunda parte, resultará:

$$\int e^{-hc^2} c^4 \partial c = -\frac{1}{2h} e^{-hc^2} c^3 + \frac{1}{2h} \int e^{-hc^2} \cdot 3 c^2 \partial c =$$

$$= -\frac{1}{2h} e^{-hc^2} \cdot c^3 + \frac{3}{2h} \int e^{-hc^2} c^2 \partial c;$$

y volviendo a integrar por partes la última integral de la expresión precedente, tomando, como acabamos de hacer por parte integrable $e^{-hc^2} c \partial c$, y por segunda parte, c, obtendremos:

$$\int e^{-hc^2} c^4 \partial c = -\frac{1}{2h} e^{-hc^2} c^3 + \frac{3}{2h}$$
$$\left[-\frac{1}{2h} e^{-hc^2} \cdot c + \int \frac{1}{2h} e^{-hc^2} \partial c \right].$$

Pero esta última integral, que prescindiendo de la constante

$$\frac{1}{2h} \qquad \text{es} \qquad \int e^{-hc^2} \partial c,$$

ya la hemos obtenido precedentemente al obtener el valor de A, porque tanto da que a la variable le llamemos u, como allí hacíamos, que darle el nombre de c, como hacemos ahora.

Y obtuvimos en aquella ocasión esta integral:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hc^2} = \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}}.$$

De este último valor nos vamos a servir para terminar la resolución del problema.

Integrando la integral indefinida entre 0 e ∞, tendremos

$$\int_0^\infty e^{-hc^2} c^4 \partial c = \left[-\frac{1}{2h} e^{-hc^2} c^3 \right]_0^\infty -$$
$$-\frac{3}{4h^2} \left[e^{-hc^2} \cdot c \right]_0^\infty + \frac{3}{4h^2} \int_0^\infty c^{-hc^2} \partial c.$$

El primer término es evidentemente igual a 0 para el límite superior, porque si bien el quebrado $\frac{c^3}{e^{hc^2}}$ se presen-

ta bajo la forma indeterminada $\frac{\infty}{\infty}$ cuando se hace $c = \infty$, tomando dos veces la derivada del numerador y del denominador, no queda más que la exponencial en dicho denominador, y el quebrado se reduce a 0 para el mencionado valor $c = \infty$, como se ve inmediatamente:

$$\left(\frac{c^3}{e^{hc^2}}\right)_\infty = \left(\frac{3c^2}{2he^{hc^2} \cdot c}\right)_\infty = \left(\frac{3c}{2he^{hc^2}}\right)_\infty =$$

$$= \left[\frac{3}{4h^2 e^{hc^2} c}\right]_\infty = \frac{3}{4h^2}\left(\frac{1}{e^{hc^2} \cdot c}\right)_\infty.$$

La última expresión para $c = \infty$ es igual á cero, porque ambos factores del denominador son infinitos.

Asimismo es igual a cero esta expresión $\left(\frac{c^3}{e^{hc^2}}\right)_0$ para $c = 0$, porque se reduce a $\frac{0}{1}$. Luego el primer término de $(v^2{}_m)$ desaparece.

Lo mismo podemos decir del segundo término, que tanto para el límite superior como para el inferior se anula, y basta para convencerse de ello tomar, como acabamos de hacer, las derivadas del numerador y del denominador de la expresión

$$e^{-hc^2} \cdot c = \frac{c}{e^{hc^2}}$$

en cuanto se refiere al límite superior, y hacer $c = 0$ para el límite inferior.

Queda por lo tanto

$$\int_0^\infty e^{-hc^2} c^4 \partial c = \frac{3}{4h^2} \int_0^\infty e^{-hc^2} \partial c$$

Pero esta integral es evidentemente la mitad de la integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hc^2} \partial c,$$

cuyo valor es

$$\frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}},$$

puesto que la integral entre 0 e ∞ es igual a la integral entre 0 y $-\infty$, toda vez que en el coeficiente diferencial no entra mas que c^2, que no varía de signo con c.

Tendremos, pues,

$$\int_0^\infty e^{-hc^2} c^4 \partial c = \frac{3}{4h^2} \cdot \frac{1}{2} \frac{\pi^{\frac{1}{2}}}{h^{\frac{1}{2}}} = \frac{3\sqrt{\pi}}{8h^{\frac{5}{2}}},$$

y sustituyendo en el valor de $(v^2)_m$, se obtiene, por último,

$$(v^2)_m \frac{\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} \cdot \frac{3\sqrt{\pi}}{8h^{\frac{5}{2}}}}{N}$$

que, simplificando, se reduce a

$$(v^2)_m = \frac{3}{2h}.$$

Hemos hallado, pues, el valor medio del cuadrado de la velocidad en un sistema cualquiera para el que la constante es la h.

Podíamos resolver otros problemas análogos; pero ante todo haremos comprender cómo para cada caso particular es posible determinar la constante h.

Con esta cuestión empezaremos la conferencia inmediata.

X.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

Por José Echegaray.

Conferencia sexta.

Señores:

En la última conferencia resolvimos estos dos problemas

1.° Valor medio de la velocidad en un sistema de esferillas, como representación esquemática de un gas, sistema que cumple con las condiciones tantas veces indicadas, a saber: el número de esferillas es muy grande, su radio es muy pequedo; el volumen que representan todas ellas es también muy pequeño con relación al volumen total del espacio en que se agitan; la masa es idéntica para todas ellas y el radio es el mismo.

Cada esferilla es un sólido perfectamente elástico y de pulimento perfecto en la superficie.

El sistema ha llegado a una distribución permanente de velocidades, y en términos estadísticos puede decirse que es homogéneo.

Por de contado sobre las esferillas no actúan fuerzas exteriores, ni entre ellas existe fuerza alguna.

Por último, el sistema corresponde a la constante h.

2.° Resolvimos también este problema: En las mismas condiciones del primer caso, hallar el valor medio del cuadrado de las velocidades.

Representando por c_m la velocidad media y por $(c^2)_m$ el

valor medio del cuadrado de las velocidades obtuvimos estos dos resultados:

$$c_m = \frac{2}{\sqrt{\pi h}},$$

$$(c^2)_m = \frac{3}{2h}.$$

***

Desde luego se observa que la segunda cantidad, la que abreviadamente pudiéramos llamar la media de los cuadrados (sobreentendiéndose siempre la palabra *velocidades*), es mayor que el cuadrado de la velocidad media.

En efecto, elevando el cuadrado c_m tendremos que comparar

$$(c_m)^2 = \frac{4}{\pi h}$$

y

$$(c^2)_m = \frac{3}{2h},$$

y se ve inmediatamente que

$$(c^2{}_m) > (c_m)^2,$$

puesto que se tiene

$$\frac{3}{2h} > \frac{4}{\pi h},$$

o bien

$$3\pi > 8.$$

No deben confundir, por lo tanto, mis alumnos la velocidad media entre todas las velocidades del sistema con la velocidad media que corresponde al cuadrado medio de velocidades.

En la mayor parte de las cuestiones esta velocidad es la más importante, porque es la que está enlazada directamente con la fuerza viva de las moléculas, y, por lo tanto, con la temperatura.

Esto se comprenderá aun mejor dentro de un momento.

*
* *

Determinamos la constante A, que entraba en la densidad de las velocidades en función del *número de esferillas*, y ahora vamos a completar aquellas ideas, haciendo comprender cómo podría determinarse la constante h.

Si por cualquier medio pudiera hallarse experimentalmente una de las dos velocidades medias antes calculadas, se comprende que el valor de h quedaría determinado.

Pero esto puede conseguirse, y se ha conseguido, para la segunda de las velocidades medias, es decir, para la que se determina en la fórmula

$$(c^2)_m = \frac{3}{2h}.$$

Recordemos que en el curso de 1905 a 1906, página 24, hallamos directamente la fórmula de los gases en la hipótesis cinemática.

Nuestro objeto entonces era señalar en cierto modo el espíritu general de los problemas de *Física Matemática* en comparación con los problemas de la *Física experimental*.

Así hallamos experimentalmente la fórmula de los gases

$$pv = RT,$$

en que p es la presión, v es el volumen, T la temperatura absoluta y R una constante que puede determinarse por la experiencia.

Y esta fórmula de los gases perfectos la encontrábamos en la hipótesis cinemática bajo esta forma:

$$pv = \frac{n}{3} mu^2,$$

en la que p y v significan lo mismo que antes: la presión y el volumen; n, el número de moléculas o átomos del gas (en nuestro caso diríamos el número de esferillas), y u, una velocidad media capaz de sustituír, en la expresión de los fenómenos físicos—perdónesenos esta vaguedad, por ahora—, a las velocidades reales y distintas unas de otras de las diferentes moléculas.

Porque en aquella ocasión no tratábamos de estudiar la teoría cinemática de los gases, sino de presentar un ejemplo, y así, además de la hipótesis general, establecíamos otras hipótesis secundarias para simplificar los cálculos.

Ya admitíamos que las diferentes moléculas del gas se agitaban con diferentes velocidades y en diferentes direcciones, y, sin embargo, para abreviar, suponíamos que se ordenaban en tres direcciones paralelas a los tres ejes coordenados, y que todas las velocidades eran iguales á cierto valor medio, que designábamos por u.

Y esto nos hace comprender cómo en cada caso prácticamente puede determinarse este valor medio de la velocidad.

Y en efecto, sin entrar en pormenores técnicos y atendiendo a la idea general y a una primera aproximación, vemos en la fórmula citada

$$pv = \frac{n}{3} mu^2$$

que pv, según la fórmula de los gases, es igual a RT.

Luego,

$$RT = \frac{nm}{3} u^2.$$

Mas nm es la masa del gas; luego tendremos, representando por M dicha masa,

$$RT = \frac{M}{3} u^2,$$

de donde

$$u^2 = \frac{3RT}{M}.$$

En el segundo miembro todas son cantidades conocidas: lo es la masa M, la constante R, que es conocida en cada caso, y también la temperatura; luego podemos *suponer* que este valor u^2 es, precisamente, el valor anterior de $(c^2{}_m)$, e igualando ambas cantidades, tendremos la ecuación

$$\frac{3}{2h} = \frac{3RT}{M},$$

de donde podremos despejar h para cada temperatura.

Esta es una idea general, un *atisbo,* por decirlo de este modo, del problema; es hacer comprender que la constante h, que entra en estas fórmulas generales de la cinemática, es *accesible,* en cada caso, al método experimental, y que, por lo tanto, en las fórmulas generales podemos considerar conocidas A y h: A, por el número de esferillas; h, por la fuerza viva media o por la temperatura.

Por lo demás, a los que quieran estudiar más detenidamente esta determinación de ciertos elementos en la Teoría de los gases, problemas que en su tiempo podían pasar por verdaderos prodigios, hoy obscurecidos por otros prodigios mayores, podemos aconsejarles que estudien previamente una obra elemental, que hace cincuenta años tuvo mucha importancia, y que entonces y ahora es un modelo de exposición y de claridad.

Nos referimos a la *Teoría del calor,* de Briot.

En la página 143 de la segunda edición de dicha obra,

con el titulo de *Velocidad de traslación de las moléculas*, se hace el cálculo de la velocidad media, que consideramos, para el oxígeno, el ázoe y el hidrógeno, y se obtiene la fórmula general

$$u_1 = 485 \frac{\sqrt{T}}{273 \rho}.$$

en la que ρ es la densidad del gas que se considera con relación al aire, a la temperatura $t = 0$ o $T = 273$, como temperatura absoluta, y se obtienen estos números:

Para el aire, 485 metros por segundo;

Para el oxígeno, 461;

Para el ázoe, 492; y

Para el hidrógeno, 1.848.

Resulta de las consideraciones precedentes que el valor de la constante h depende, como es natural, de la temperatura media.

***

¿Pero cuál será la temperatura de un gas?

Experimentalmente la que marca el termómetro.

Pero en la teoría cinemática ya la contestación no es tan sencilla; y séanos permitido con este motivo insistir algo, siquiera sea de paso, sobre lo que dijimos en una de las conferencias precedentes.

En los comienzos, o algún tiempo después, de la Termodinámica, cuando la hipótesis mecánica estaba en su apogeo, la teoría del calor como energía era también una cuestión de mecánica.

La temperatura era una cantidad proporcional a la fuerza viva de los elementos del cuerpo. El calor se explicaba por el movimiento de las partículas del cuerpo mismo, y en esta hipótesis se escribían obras que gozaban, por entonces, de gran prestigio.

Citemos, por ejemplo, la obra de Tyndall, y hemos ya citado hace un instante la obra de Briot, que, sin ser de gran extensión, es de doctrina sustanciosa y un modelo de método y claridad, como antes afirmábamos.

Después las ideas cambiaron. Se rechazó por muchos la hipótesis mecánica para explicar las leyes de la Termodinámica. Se quiso rechazar en absoluto toda hipótesis y fundar la nueva ciencia sobre base puramente experimental.

Mas, posteriormente y sobre todo en estos últimos tiempos, al estudiar estos problemas, y sobre todo en la teoría cinemática de los gases, a la hipótesis mecánica se vuelve, que se confiese o no quiera confesarse.

Pero aquí nos encontramos con que es preciso dar un nuevo sentido, y casi me atrevería a decir un sentido estadístico, si vale la palabra, aun a las leyes más elementales y más firmes de la teoría del calórico.

Una de las leyes, la primera puede decirse, es la del equilibrio de temperaturas.

Cuando dos cuerpos están en presencia y con temperaturas distintas, el cuerpo de mayor temperatura pierde calórico, el de menor temperatura lo gana y ambos tienden a un nivel común, es decir, a una temperatura igual.

Ni más ni menos (o algo así) que cuando hay agua en un depósito de nivel y agua también en otro de nivel superior al primero y se ponen ambos en comunicación: el agua desciende en el más alto y no se llega al equilibrio sino cuando el nivel es el mismo para ambos depósitos.

En este caso, el sistema constituye una fuerza motriz mientras el desnivel existe, y cuando ambos depósitos se han nivelado, cuando no hay una caída hidráulica, desaparece toda fuerza motriz por este concepto.

Esta fué la primera idea que debió ocurrir y la que en efecto ocurrió a Carnot en su célebre Memoria, y la que le llevó, *en parte*, por senda extraviada, suponiendo el calor

una sustancia que cae, como el agua de una catarata, al establecimiento de su célebre teoría.

De todas maneras y prescindiendo del ejemplo hidráulico, la ley del equilibrio de temperaturas subsiste o ha subsistido, y en esta ley se ha visto o se ha querido ver una sentencia de muerte para el mundo físico. Mientras existen caídas de temperaturas, se decía, existen energías disponibles, así en los fenómenos de la Naturaleza como en la industria humana; pero como esta ley de equilibrio de temperaturas tiende a igualarlas todas y a convertir el Universo, por decirlo de esta manera, en una inmensa charca de igual nivel, cuando llegue este caso el Universo habrá muerto.

Tal desoladora teoría se enlazaba íntimamente y tomaba forma cuantitativa; es decir, se traducía en fórmulas y números, introduciendo en la ciencia un concepto importantísimo, a saber: el concepto de *entropía.*

De la entropía ya hablaremos en otra ocasión. Por hoy limitémonos al equilibrio de temperaturas.

Y esta ley de equilibrio, ley en cierto modo mortal para el mundo físico, se traduce por una expresión muy propia y muy sugestiva. Se dice que la energía calorífica *tiende a degradarse.*

¿Significa esto que se niega el principio de la conservación de la energía?

No; este principio de la Física todavía subsiste, aunque ciertos ultramodernistas le miran de reojo.

Lo que significa es, que la energía calorífica, pasando de las altas a las bajas temperaturas y estableciendo un nivel medio universal y constante en todos los objetos, en todos los seres, en todos los astros, desde las grandes moles hasta el último grano de arena, deja de ser utilizable como energía es estéril para las grandes agitaciones del Cosmos, se insinúa en los últimos átomos y establece una uniformidad, una monotonía, que bien puede afirmarse, si todo esto es exacto, que se parece mucho a la muerte definitiva del Cosmos.

Al pasar la energía de ser útil para el trabajo á ser estéril, es natural que se diga que la energía se ha degradado.

***

Y no obstante, ¡al estudiar la teoría cinemática de los gases nos asaltan dudas y aun protestas contra esta sentencia de pena capital! No podemos de pasada discutir esta formidable cuestión, pero reproduzcamos algunas de las ideas que en las primeras conferencias de este curso señalábamos.

Si el calor de un sistema, y por lo tanto su temperatura, puede expresarse en cada punto material por la fuerza viva de éste, un sistema de esferillas o de moléculas de igual masa, en que todas tuviesen la misma fuerza viva, parece que había de ser un sistema en que se hubiera realizado el bello ideal (¡triste belleza!) del equilibrio de temperaturas.

Y, sin embargo, no es así.

Hemos visto en otra conferencia, que si en el instante inicial todas las velocidades son iguales, al cabo de algún tiempo el equilibrio se rompe, la distribución homogénea de velocidad cesa y unas fuerzas vivas son mayores que la inicial y otras fuerzas vivas son menores, y sólo se llega a un estado permanente cuando la distribución de las velocidades es la expresada por la ley exponencial que explicamos antes.

De suerte que el equilibrio no está en la igualdad de temperaturas, sino en la desigualdad.

Cuando la igualdad existe en un momento (salvo distribuciones ideales), la Naturaleza rompe esta igualdad *por el choque* y viene a parar a la desigualdad permanente según cierta ley.

Y, a decir verdad, esto sucedería en la sociedad humana si por un instante prevaleciese un comunismo igualitario.

Parece, y valga sólo como imagen, que la Naturaleza comprende que toda energía disponible desaparece con el sistema de igualdad y ella misma provoca la desigualdad para crear desniveles de temperatura.

*
* *

¿Significa esto que haya que rechazar el principio del equilibrio de temperaturas, fundamento hasta aquí inquebrantable de tantos experimentos y de tantas teorías de la Física?

No, ciertamente; lo que resulta es que esta ley, que en el *sistema de la continuidad* toma la apariencia de una ley absoluta, en el *sistema de la discontinuidad*, que es el de la cinemática, toma un sentido *estadístico* o de términos medios.

Expliquémonos con más claridad.

Imaginemos un sistema de esferillas, o, para hablar en términos más propios, un gas cuyas moléculas o átomos ó últimas partecillas discontinuas, todas iguales, se agitan en dicho espacio, y han llegado a un estado permanente, ó si se quiere, de equilibrio estadístico.

Las velocidades no serán idénticas para todos los elementos, serán, por el contrario, distintas las velocidades de estos elementos: formarán grados, comprendidos cada uno entre c y $c + dc$, cuyo número, es decir, el de cada grado, hemos determinado en la conferencia precedente y aun hemos representado en una figura por las ordenadas de la curva exponencial.

Un experimentador que observase el gas de que se trata, dada la imperfección de los sentidos humanos, no vería nada de esto, sino un aspecto medio y uniforme, un aspecto estadístico, si vale de nuevo la palabra, o también pudiéramos decir cinematográfico.

Y asimismo, si aplicase un sistema de medida para el calor, o dicho con más precisión, un termómetro, tampoco podría apreciar la fuerza viva de cada grupo de moléculas, sino una fuerza viva media: la que correspondería à la velocidad

$$(c^2)_m = \frac{3}{2\,h}$$

en que h es precisamente una constante dependiente de la temperatura media que marca el termómetro.

Y diríamos: el gas tiene la temperatura t, que, volvemos a repetirlo, no es la temperatura de aquella ó esta molécula, pues todas son distintas, sino la temperatura media de todo el sistema.

Supongamos ahora que ante este primer gas se presenta otro. Sobre este segundo podemos hacer las mismas consideraciones que sobre el primero, y, por lo tanto, no podremos decir que todas sus moléculas tienen la misma temperatura; pero el termómetro nos dará otra temperatura media que llamaremos t'.

Y ahora bien; si entre ambos gases hay comunicación de movimiento, ambos estados no subsistirán: no podrá existir equilibrio dinámico entre ambos sistemas.

Y así, suponiendo que t' es mayor que t, pasará calórico del segundo sistema al primero, hasta que se llegue, no á una nivelación general de temperaturas, que es imposible en la hipótesis cinemática, sino hasta el punto en que se *equilibren las dos temperaturas medias.*

Mas como el experimentador no penetra en el interior de ninguno de los dos gases y no puede juzgar sino por las indicaciones del termómetro, que son las que percibe por sus sentidos, formulará la ley del equilibrio de temperaturas que ha dominado y domina en la Física en general.

Por eso decíamos que las nuevas teorías cinemáticas no

arruinan las leyes de la Termodinámica, aunque en rigor les dan otro sentido: el sentido estadístico o de los términos medios.

*
* *

Así la ley de la *entropía*, de que hablaremos en su día, toma el sentido de una ley de probabilidades.

Pero no anticipemos las ideas, y en verdad que no podríamos anticiparlas sin un trabajo estéril para la enseñanza, puesto que todavía no hemos explicado lo que este concepto de entropía significa.

Hablemos tan sólo de la degradación de la energía calorífica.

Este principio podrá ser exacto hasta cierto punto.

Lo era en nuestro ejemplo entre dos o más gases á distintas temperaturas; no lo es en un gas entre una y otra molécula.

Tan no lo era, que si la suponemos degradada hasta la igualdad, en la hipótesis de los choques, estos choques la vuelven a reconstituír como energía teóricamente utilizable, puesto que entre molécula y molécula crea una caída de temperatura.

Es un consuelo, pudiéramos decir; pero es un triste consuelo.

Y al decir que son caídas de temperatura utilizables no hemos dicho la verdad exacta, y aun hemos forjado esperanzas ilusorias.

Se utiliza la caída de agua en una catarata porque vivimos, por decirlo de este modo, en su ambiente, y entre el nivel superior y el nivel inferior podemos interponer una turbina ó cualquier otro receptor hidráulico.

Podemos utilizar una caída de temperaturas, porque entre el hogar y el condensador podemos intercalar calderas

llenas de agua, cilindros, émbolos y todo el mecanismo de la máquina de vapor, porque podemos manejar estas diferentes piezas, unas con separación de las otras: las hemos fabricado a nuestra escala.

Pero entre una o varias moléculas con la temperatura c y otras con la temperatura c' no podemos intercalar ningún receptor: serían receptores ultramicroscópicos que ni podemos construír, ni podemos manejar, ni aun ver siquiera; que al manejarlos, por exquisito y fino que fuera el aparato, se llevaría por delante, y valga la palabra, miles de niveles de temperatura superior y miles de niveles también de temperatura inferior.

Sería como si un gigante de dimensiones planetarias quisiera manejar desde el espacio, con sus manos enormes, nuestras turbinas y nuestras máquinas de vapor.

Sí; en la hipótesis que examinamos, la Naturaleza reconstituye saltos de temperaturas sustituyendo lo discontinuo a lo continuo; pero, desgraciadamente, no nos sirven para nuestras faenas industriales. La raza humana está sujeta al equilibrio de temperaturas y á la degradación de la energía, porque está sujeta a las leyes estadísticas, aunque la ciencia aspire á las leyes absolutas de la continuidad.

***

¿Pero lo que la industria humana no puede realizar hasta hoy no podrá realizarlo la Naturaleza?

¿Después de haber creado saltos de temperatura en el interior del gas no sería posible que, rompiendo la distribución uniforme, acumulase los niveles superiores de temperatura a un lado y los niveles de temperatura inferior a otro distinto?

Ya lo intentó, como dijimos en otra crónica, el diablillo de Maxwell.

Y en verdad que esta aspiración ó este sueño pudiera transportarse de los sistemas gaseosos al interior del átomo, ante la amenaza de que los grandes depósitos de hulla de nuestro globo se agoten en pocos siglos y de que falten para la Industria las grandes masas de energía que la combustión representa, sin que las demás energías, como la de las mareas y la del calor solar, principalmente, hayan podido dominarse por completo.

Y esto nos ocurre dentro de la corriente soñadora a que nos hemos lanzado, porque es triste pensar que la masa humana llegue un día en que agonice por falta de energías industriales, cuando parece evidente que en el interior de unos cuantos átomos de la materia, que tenemos a nuestro alcance, existen energías acumuladas en cantidades inmensas.

¿Pero de qué nos sirven si a ellas no podemos llegar?

¿De qué nos sirve, vuelvo a repetir, que en el interior de un átomo, como demuestra la radioactividad, existan electrones positivos y electrones negativos y subátomos innumerables girando con velocidades inmensas, que representan inmensas fuerzas vivas, si no podemos llevar a interior del átomo receptores infinitesimales que las recojan?

Detengamos el vuelo a la imaginación y dejemos estos problemas para un porvenir remoto, suponiendo, y es mucho suponer, que algún dia hayan de plantearse; y volvamos modestamente á nuestra tarea.

Continuemos con la teoría cinemática de los gases en este primer ejemplo que vamos estudiando, y en el que hemos hallado la densidad, por decirlo de este modo, de cada clase de velocidades, la fórmula del número de esferillas comprendidas entre los límites tantas veces señalados, la fórmula que da la velocidad media, así como la que expresa el valor medio de los cuadrados de las velocidades.

*
* *

Otras varias cantidades medias pudiéramos determinar, como, por ejemplo: la velocidad media relativa, el número de choques en un tiempo dado y el camino medio recorrido por una esferilla entre choque y choque, que es como decir el valor medio de todos los caminos recorridos por todas las esferillas.

Pero en estos problemas nos ocuparemos más adelante, precisando su definición ante todo.

Y sólo resolveremos, para concluir esta conferencia, un problema que tiene mucha importancia en esta teoría cinemática.

Hemos demostrado, que el número de esferillas cuyos componentes, en un momento dado, y puesto que el estado es permanente, en todos los momentos, tienen valores comprendidos entre

$$\begin{array}{lll} u & \text{y} & u + \partial u \\ v & \text{y} & v + \partial v \\ w & \text{y} & w + \partial w \end{array} \qquad (l)$$

límites que para abreviar representamos por (l); este número, repetimos, una vez determinada la densidad de las velocidades, viene dado por la fórmula

$$A e^{-h(u^2+v^2+w^2)} \partial u \, \partial v \, \partial w,$$

siendo A un coeficiente que sabemos determinar en función del número total de esferillas y de la constante h, que también indicamos cómo se comprende que pudiera determinarse en función de la temperatura.

Dada esta fórmula, nos proponemos ahora determinar el número de esferillas cuyas velocidades paralelas al eje de las x están comprendidas

$$\text{entre } u \quad \text{y} \quad u + \partial u.$$

Claro es que no habrá más que integrar, respecto a v y w, entre $-\infty$ y $+\infty$, porque así agrupamos todas las esferillas en que las componentes v y w varían entre sus límites extremos, dejando tan sólo las esferillas en que la componente paralela al eje de las x varía entre u y $u + \partial u$.

Esto es evidente y casi de sentido común.

A estas componentes, si se nos permite expresarnos de esta manera, poco les importa cuáles hayan de ser las otras dos componentes, y habrá que abarcar estas últimas, con tal que la componente u esté entre los límites indicados.

Llamando N_u a dicho número, tendremos

$$N_u = A e^{-hu^2} \partial u \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hv^2} \partial v \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hw^2} \partial w.$$

Dejamos sin sustituír el valor de la constante A, puesto que la consideramos como una cantidad conocida, y así simplificamos la escritura.

Todo queda reducido á efectuar las dos integraciones indicadas.

Ambas son iguales, porque la forma es idéntica y son los mismos los límites; y poco importa que a la variable la llamemos v ó la llamemos w.

Hemos demostrado ya, en otra conferencia, por un artificio especial, que se tiene

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hv^2} \partial v = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hw^2} \partial w = \sqrt{\frac{\pi}{h}};$$

luego el valor anterior se convertirá en

$$N_h = A e^{-hu^2} \partial u \frac{\pi}{h},$$

y el problema quedará resuelto.

Pero de este problema se deduce otro que, con ser muy sencillo, al generalizarlo adquiere importancia transcencental.

Nos proponemos hallar el valor medio del cuadrado de estas velocidades paralelas al eje de las x, cuyo número acabamos de determinar, y la solución es la misma que la que hemos empleado ya dos veces.

Multiplicar el número de cada clase por el cuadrado u^2, sumar, que aquí equivale a integrar, y dividir por el número total, que es N_u.

Tendremos, pues, representando por $(u^2)_m$ el valor medio que buscamos:

$$(u^2)_m = \frac{A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u \frac{\pi}{h} u^2}{A\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u \frac{\pi}{h}} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2} u^2 \partial u}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu_2}\partial u}.$$

No queda más que efectuar las integraciones de numerador y denominador, que son integrales que ya hemos encontrado anteriormente.

La integral del numerador, integrando por partes, como hemos hecho varias veces, nos da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2} u \cdot u\,\partial u = -\frac{1}{2h}\left(e^{-hu^2}\cdot u\right)_{-\infty}^{+\infty} + \frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u$$

y como la primera parte para los dos límites se reduce a cero según hemos visto, el valor medio del cuadrado de la velocidad se convierte en

$$(u^2)_m = \frac{\frac{1}{2h}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u}{\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u}.$$

Y suprimiendo las integrales del numerador y del denominador, que son iguales, resulta, por fin,

$$(u^2)_m = \frac{1}{2\,h}.$$

Antes habíamos obtenido para el valor medio del cuadrado de la velocidad total

$$(c^2)_m = \frac{3}{2\,h}.$$

Luego la fuerza viva media que se obtiene multiplicando el cuadrado medio de la velocidad por la masa será la tercera parte en la dirección del eje de las x que en la dirección total, por decirlo de este modo. Es decir,

$$m\,(u^2)_m = \frac{m}{2\,h},$$

$$m(c^2)_m = \frac{3\,m}{2\,h}.$$

Y si esto se verifica para cada esferilla, se verificará para todas ellas, y podremos establecer este principio.

La fuerza viva total se divide en tres partes iguales, en la dirección de tres ejes trirrectangulares, y aun podemos dar a este teorema una forma muy sencilla y muy elegante.

Cuando se tiene un punto en el espacio, su posición está determinada por tres coordenadas, y se dice, en el lenguaje moderno, que el punto tiene *tres grados de libertad*, porque puede moverse con independencia según los tres ejes.

Y así puede establecerse que la energía de un sistema para cada uno de sus puntos se divide en *tres partes iguales: cada una para cada grado de libertad;* y para la energía total se repetirá lo mismo.

Hemos creído conveniente agregar esta observación, que no aparece en el excelente opúsculo de Mr. Watson, porque es teorema que ha adquirido gran importancia (nos referimos al teorema general) en estos últimos años y que en la célebre cuestión de los *quanta* se cita constantemente, ya como piedra de toque para las antiguas teorías, ya como piedra de choque, pudiéramos decir, para las teorías modernas.

En la conferencia próxima trataremos de otro ejemplo, que será el segundo, algo más complicado que el anterior en esta teoría cinemática de los gases y que prepara poco a poco teorías más y más generales.

XI.—Neurópteros nuevos de España.

Por el R. P. Longinos Navás, S. J.

(PRIMERA SERIE)

Reuniré en series, por orden de familias, los Neurópteros nuevos de nuestra patria que vinieren a mi noticia.

Familia Ascaláfidos.

1. **Ascalaphus libelluloides** H. Sch. var. **tessellata** nov.

A typo differt alis tessellatis.

Alæ anterioris pars hyalina reticulatione fusco marginata ita ut pleræque areolæ centro pallidæ appareant.

Alæ posterioris macula flava anteapicali subevanescente, areolis plerisque medio obscuratis; macula basilari nigra a margine posteriore ante apicem plus minusve remota.

Patria. Valle de Arán (Lérida). Varios ejemplares cogidos en Bosost por el Sr. Codina, el 22 de Julio de 1915, y por mí propio, en Viella, el 24 del mismo mes y año.

2. **Ascalaphus libelluloides** H. Sch. var. **areolata** nov.

A typo differt:

Alæ anterioris parte hyalina obscuriore; parte nigra basilari pallidiore, venulis plerisque procubitabilus conspicuis nec nigro marginatis.

Alæ posterioris macula basilari nigra plerisque areolis medio pallidioribus; macula anteapicali flava subobsoleta, areolis subtotis vel centro late fuscatis.

Patria. Valle de Arán (Lérida). Un ejemplar ♀ cogido por mí en Viella, el 24 de Julio de 1915.

De la var. *leucocelia* Costa difiere en el color amarillo de las alas, en el mayor número y extensión de las aréolas pá-

lidas de la mancha negra, que son casi todas, de suerte que, aun en el mismo campo costal, la parte interna, negra, presenta una estría amarilla en cada celdilla, por ser éstas estrechas y largas; finalmente, en que la mancha oval amarilla anteapical casi ha desaparecido, absorbida por el pardo extendido de la malla.

Familia Osmílidos.

3. **Osmylus fulvicephalus** Scop. var. **lota** nov.

Thorax niger, nitens. Pronotum macula tridentata, dente medio longiore, cum lateralibus postice conjuncta, flava. Meso-et metanotum fascia longitudinali media flava.

Alæ area costali maculata solum macula fusca citra et ultra stigma; pupillis distinctis, sed vix fusco tinctis.

Ala anterior nullis maculis in disco neve in area radiali, neve ad marginem nisi 3-4 parvis prope basim, quarum duæ præter marginem posticum.

Ala posterior nullatenus maculata neve umbrata (nisi ad stigma et ad pupillas).

Patria. Valle de Arán (Lérida). Les, 21 de Junio de 1915. Un ejemplar ♂ cuyas dimensiones son: long. del cuerpo 10,5 mm.; ala ant. 24 mm.; ala post. 21 mm.

Conforme a la descripción original de Scopoli *(Entomologia Carniolica*, 1763, p. 270) *Hemerobius fulvicephalus* «Alæ hyalinæ, maculis marginalibus venulisque fuscis, reticulatæ» se designan con el nombre de *fulvicephalus* Scop. *(maculatus* Fab.) los ejemplares que ofrecen manchas pardas bien visibles, a lo menos a lo largo de los márgenes anterior, externo y posterior del ala del primer par. Esta será la forma típica.

Concuerda con esto la interpretación de los autores. Así Rostock dice *(Neuroptera germanica*, 1888, p. 106): «Vorderflügel mit braunen Flecken, von denen 2 bis 3 grössere am Hinterrande, mehrere kleinere am Vorderrande.»

En la variedad nueva, por el contrario, apenas se distinguen otras manchas que las estigmales y alguna exigua cerca de la base del ala.

Revisando los ejemplares de mi colección encuentro la misma variedad de otras procedencias, de Italia y Bélgica: vallé de l'Hermeton, 9 de Agosto de 1909, Tonglet leg.

4. **Osmylus fulvicephalus** Scop. var. **densata** nov.

A typo differt alis dense copioseque maculatis.

Ala anterior area costali fere 8 maculis fuscis citra stigma, aliis minutis; area radiali venulis aliquot fusco limbatis maculas 6-10 efficientibus; maculis aliis exiguis per totam alam respersis, aliquot fere in lineam conjunctis ad venulas gradatas, 3 grandibus ad marginem posteriorem.

Ala posterior aliquot maculis parvis notata, præter margines subtotos, aliis rarioribus ad discum.

Tomo por tipo de esta variedad un ejemplar que poseo de Cercedilla (Madrid), cogido por mí, el 20 de Junio de 1913. Se acercan a él en lo manchado de las alas otros que cogí en Ortigosa y Valvanera (Logroño), en Julio del año precedente 1912.

Familia Hemeróbidos.

5. **Hemerobius micans** Oliv. var. **conspicua** nov.

Similis var. *fuscinervi* Schn. Major.

Abdomen flavidum, leviter fusco suffusum, flavido pilosum; cercis superioribus ♂ fortibus, flavo-testaceis, stria longitudinali inferna, ramo superiore recurvo.

Alæ stigmate pallido; reticulatione flavida, venulis omnibus fusco-nigris; subcosta tota, radio ejusque sectore subtotis, venulis costalibus totis fusco-nigris.

Ala anterior membrana umbris penniformibus griseis ad venas ramosque; venis ramisque abunde fusco punctatis; venulis gradatis externis 7, internis 6; rhegmate ad venam intermediam manifesto.

Ala posterior membrana penitus hyalina; venulis gradatis externis 7, internis 2; venis fuscescentibus.

Long. corp.	♂	5,3 mm.
— al. ant.		7,7 —
— al. post.		6,5 —

Patria. Valle de Arán: Bosost, 22 de Julio de 1915.

Conviene con la variedad *fuscinervis* Schn. en el color obscuro de la subcostal y venillas costales; pero difiere manifiestamente en lo que sigue:

1.° El tamaño es mayor.

2.° El pardo negruzco se halla más extendido en muchas venas y ramos, especialmente en el radio y su sector.

3.° La membrana del *fuscinervis* es, según Mac Lachlan (*Trans. Entom. Soc. London,* 1868, p. 186) «nearly colourless», al paso que en la variedad nueva está manifiestamente sombreada, aun en el campo costal.

4.° «The pterostigma darker, brown» (l. c.) en el *fuscinervis;* nada de esto, sino pálido, en el mío.

5.° En el ala anterior hay 7 venillas gradiformes externas en el *fuscinervis,* 8 en el mío, etc.

Respecto al número de venillas gradiformes debo advertir que Mac Lachlan (l. c., p. 179), señala 8 para el tipo en la serie externa del ala anterior, «gradate veinlets... eight in the outer series, six in the inner.» Pero he recorrido los ejemplares de esta especie que poseo de España, Francia, Bélgica, Dinamarca e Inglaterra, en número de más de 30, y en todos ellos he contado 7. Sólo en un ejemplar raquítico de Montserrat hay 6. En este mismo son también 6 las venillas gradiformes de la serie interna; pero la última (radial) dista un solo espacio de la precedente. El ejemplar es ♀ y sus dimensiones son: long. 3,7 mm.; ala ant. 6,5; ala posterior 5,2 mm. Montserrat, 30 de Agosto de 1910.

6. **Hemerobius occiduus** sp. nov. (fig. 1).

Similis *lutescenti* F. Flavidus, fusco varius.

Caput stramineum; occipite ad latera fusco; oculis fuscis; stria lata ad genas ante oculos fusca; palpis stramineis, articulo ultimo elongato, fuscescente; antennis stramineis.

Thorax flavus, stramineus, superne ad latera fuscus.

Abdomen stramineum, stramineo pilosum; cercis superioribus (fig. 1) ♂ longis, parte basilari longiore quam apicali, declivi, sensim attenuata; parte apicali horizontali sive transversa, in modum baculi cum parte basilari geniculata, antice rotundata, vix prominula, postice seu apice subacuta.

Pedes straminei, albidi, albido pilosi.

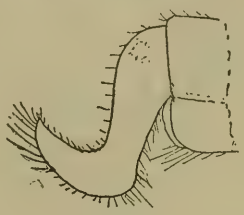


Fig. 1.
Hemerobius occiduus ♂ Nav.
Extremo del abdomen.
(Col. m.)

Alæ angustæ, apice elliptice rotundatæ, hyalinæ, fortiter irideæ; reticulatione flavida, fusco varia.

Ala anterior venis ramisque fusco punctatis, umbris griseis penniformibus limbatis; margine externo grisco vel fuscescente late marmorato; umbra majore fusca ad secundam venulam cubitalem et apicem postcubiti et sectoris cubiti; venulis gradatis 7/8, fuscis fuscoque leviter limbatis, ultima seriei internæ longe interiore quam pænultima. Area costalis ad basim lata, venulis plerisque furcatis aut ramosis, flavidis, fusco parum variis. Stigma vix sensibile, pallidum. 3-4 sectores radii.

Ala posterior venis totis stramineis; venulis gradatis 2/7, fuscescentibus. Area costalis angusta, venulis simplicibus, stramineis. Stigma elongatum, externe flavidum, interne rubellum. Sector radii 2 ramis præcipuis, anteriore prope basim cum radio puncto confluente, dein duobus ramis prædito, posteriore apice ramoso; venula recurrente inter basim sectoris et procubitum.

Long. corp.....	♂ 4	mm.	♀ 4,6	mm.
— al. ant....	7,2	—	7,6	—
— al. post...	6	—	6,5	—

Patria. Santiago, 2 de Julio de 1915, Marín (Pontevedra), 4 de Julio de 1915. (Col. m.)

7. **Sympherobius melanogaster** sp. n. (fig. 2).

Similis *venusto* Nav.

Caput piceum, clypeo fulvo, palpis fuscis, ultimo articulo labialium elongato, parum inflato, acuminato; antennis fuscis, tractu longo ad medium fulvescente, duobus primis articulis fulvis.

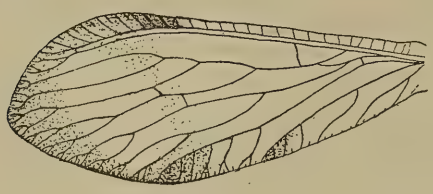


Fig. 2.
Sympherobius melanogaster Nav.
Ala posterior.
(Col. m.)

Thorax totus piceus, nitens.

Abdomen piceum, nitens, pilis fulvis longiusculis.

Pedes fulvi, coxis fuscis, femoribus intermediis ad medium fuscis; tibiis omnibus fusiformibus, compressis.

Alæ apice elliptice rotundatæ.

Ala anterior membrana hyalina, copiose fuscata, quasi in duas fascias transversas, externa præter marginem externum, interna ad medium alæ; aliis maculis in disco, ad angulum axillarem; reticulatione subtota fusca, punctis albis interrupta, aliquot rotundis hyalinis ad maculas vel fascias fuscas; area costali parum ampliata, venula recurrente cellulam oblongam claudente, venulis plerisque furcatis; duobus venulis radialibus furcæ secundi sectoris insertis; duobus sectoribus radii; procubito prope basim furcato; una venula cubitali inter utrumque ramum, seu cellula secunda cubitali aperta; venulis gradatis externis 4, mediis 5 (ultima seu radiali duobus spatiis a præcedente distante), internis 3.

Ala posterior (fig. 2) pallidior, duabus fasciis latis transversis fuscis dilutis, externa præter marginem externum, interna a stigmate ad marginem posteriorem, ad medium alæ subevanescente; reticulatione inter fascias fusca, reliquum fulva; margine costali ad stigma leviter ampliato; area costali simplici, venulis simplicibus; sectore radii 3 ramis longis; una venula radiali prope ortum sectoris; venula recurrente a sectore ad procubitum; venulis gradatis 2.

Long.	corp.	3,3	mm.
—	al. ant.	5	—
—	al. post.....	4,4	—

Patria. León, 22 de Junio de 1915, a orillas del Besnega. (Col. m.)

Es mayor que el *venustus* Nav. y otras especies análogas, más obscuro en el cuerpo, menos en el ala anterior; en la posterior el *venustus* carece de la venilla radial que posee la nueva especie.

Familia Crisópidos.

8. **Chrysopa tenella** Schn. var. **aranensis** nov.

Viridis; fascia flava dorsali in thorace et abdomine.

Antennæ flavæ, articulo primo viridi.

Prothorax duplici striola nigra laterali obliqua, altera ante sulcum, altera pone sulcum transversum.

Abdomen plerisque tergitis puncto vel striola nigra longitudinali ad utrunque latus fasciæ flavæ.

Alæ reticulatione et stigmate viridibus, venulis nigris fere ut in typo.

Ala anterior venulis gradatis 4/7 vel 6/7; venulis marginalibus posticis subtotis viridibus, solum 3, seu doubus ramis postcubiti et ramo anteriore axillaris initio nigris.

Cetera ut in typo.

Patria. Valle de Arán (Lérida). Viella, 24 de Julio de 1915. Un ejemplar notablemente distinto del tipo en el color general de un verde más franco y subido, así como en la faja dorsal de un amarillo más intenso, no blanquizca. El color de las alas es algo más pálido que el del cuerpo. Sus dimensiones son: longitud del cuerpo 7 mm.; ala ant. 10 milímetros; ala post. 10 mm.

9. **Chrysopa tenella** Schn. var. **numerosa** nov.

Pronotum striola laterali fusca obliqua pone sulcum transversum.

Abdomen superne viride, fascia longitudinali flava, inferne viridi-album.

Ala anterior venulis gradatis 6/8 nigris, venulis marginalibus posterioribus tantum 3 initio nigris, seu ramo sectoris cubiti et utroque ramo postcubiti.

Ala posterior venulis gradatis 5/7.

Cetera ut in typo.

Long.	corp.....	7	mm.
—	al. ant.....	13	—
—	al. post.....	11,5	—

Patria. La Guardia (Pontevedra), 26 de Junio de 1915. (Col. m,)

Esta variedad es algo mayor que el tipo, de un verde más acentuado, con más venillas gradiformes en ambas alas, menos negro en el ala anterior.

10. **Chrysopa tenella** Schn. var. **virens** nov.

Læte viridis, haud viridi-alba.

Caput viridi-flavum.

Thorax viridis, fascia longitudinali media superna flava.

Abdomen totum viride, sine fascia dorsali flava.

Alæ reticulatione viridi, stigmate viridi-flavo, venulis nigris fere ut in typo.

Ala anterior venulis gradatis 3/5.

Ala posterior pallidior, venulis radialibus initio tantum, ramis sectoris radii nullatenus nigris; venulis gradatis 2/5. Cetera ut in typo.

Long.	corp.....	6,8	mm.
—	al. ant.....	9,8	—
—	al. post.....	9	—

Patria. Tuy (Pontevedra), en el monte Aloya, 28 de Junio de 1915. (Col. m.)

Zaragoza, 17 de Noviembre de 1915.

XII.—Bosquejo del estudio de las mareas

(Conclusión.)

POR

EDUARDO LEÓN Y ORTIZ.

Dividido el océano en esos canales, la extensión de ellos irá disminuyendo desde el ecuador hacia los polos. Si todos tienen la misma profundidad, la onda libre correrá en todos con la misma velocidad; pero la semicircunferencia comprendida entre las cumbres opuestas diametralmente en el círculo respectivo irá disminuyendo desde el ecuador. Luego el período de onda, cociente del espacio entre las dos cumbres por la velocidad, irá disminuyendo hacia los polos, y aunque en el ecuador ese período sea mayor que medio día solar o lunar, porque la profundidad del canal sea inferior a aquella profundidad crítica de veinticuatro o veinticinco kilómetros, y a contar desde algún paralelo y desde su simétrico, el período de la onda libre será menor que el medio día solar o lunar. Luego la marea será inversa en el ecuador y en los paralelos contiguos, pero directa en esos otros paralelos más próximos a los polos.

Entre unos y otros habría un paralelo donde el período de onda libre sería de medio día solar o lunar, coincidiendo en ese canal el período de onda libre con el de onda forzada de marea; ésta tendería a ganar una altura infinita. A un lado quedarían los canales, donde bajo el sol o la luna y en el meridiano opuesto se produciría bajamar, y al otro lado las canales en que al mismo tiempo se produciría pleamar. La altura infinita queda como divisoria entre aquella bajamar y esta pleamar; pero también en ese cam-

bio de una a otra pudiera ser divisoria la altura cero. Esto es lo que sucedería si las divisiones de los canales desaparecieran y, quedando el océano enteramente libre, las partículas que vienen de Norte a Sur se encontrarán con las que proceden de Este u Oeste. No habría en ese círculo intermedio y crítico marea de altura, sino corrientes de marea en las direcciones indicadas, que no harían subir el nivel del mar.

*
* *

«Desde Newton hasta Laplace» puede titularse el período más señalado en el estudio científico de las mareas. Las dos fechas de 1687 y 1774 confinan ese período. Kepler ya había indicado la tendencia del océano a encumbrarse bajo el sol y la luna, pero carecía de medio para someter su teoría al cálculo. Galileo no se conformaba con la opinión de Kepler, no obstante el claro ingenio que en él reconocía. Parecíale que con aquella tendencia de que hablaba Kepler se reproducían las cualidades ocultas invocadas por los antiguos filósofos, y prefería explicar las mareas como efecto de la rotación de la tierra y de su revolución en torno del sol, viendo en todo ello una confirmación de la verdad del sistema astronómico de Copérnico.

Así estaban las opiniones cuando Newton, en su obra *Principios matemáticos de la filosofía natural*, sentó las leyes de la gravitación universal y echó los cimientos para la explicación verdadera del fenómeno de las mareas. En el libro primero de dicha obra supone un canal circuyendo la tierra, y estudia el influjo de la atracción de un satélite sobre el agua en el canal. Acelerado el movimiento de cualquier partícula de ella al estar en conjunción u oposición con el satélite, y retardado ese movimiento al estar dicha partícula en cuadratura, el agua en ese canal tendría una oscilación de marea.

En el libro III de la misma obra es donde por primera vez aparece calculada la fuerza de la marea debida al sol y a la luna. Suponiendo que estos astros se hallen en el ecuador, que el océano cubra toda la tierra y que en cada momento tome la forma debida de equilibrio, Newton deduce que por la atracción del sol esa forma debe ser la de un elipsoide de revolución prolongado, cuyo eje estará dirigido hacia el centro de dicho astro, y que, por la atracción de la luna, la forma de equilibrio del mar debe ser otro elipsoide análogo, más prolongado, cuyo eje está a su vez dirigido hacia el centro de este astro. En la marea debida al sol, la pleamar debe ocurrir a mediodía y media noche, y la bajamar a la salida y puesta de sol. En la marea debida a la luna la bajamar ocurrirá a la salida y puesta de este astro, y la pleamar al paso de la luna por el meridiano del lugar o por el meridiano opuesto. Prodúcense aguas vivas cuando las dos atracciones se aunan, porque los ejes de los dos elipsoides están en coincidencia, y aguas muertas cuando esas atracciones se destruyen en parte, porque dichos ejes están en cuadratura. Pero la observación prueba que mareas de agua viva ocurren día y medio después de las sicigias, y Newton equivocadamente lo atribuye a que las oscilaciones del mar durarían algún tiempo, si de pronto cesara la atracción que las produce.

Puede concertarse la teoria con la observación admitiendo que los ejes de los elipsoides ideados por Newton estén dirigidos a un sol y una luna ficticios, situados a distancia constante de los astros verdaderos, de modo que las sicigias de los dos astros ficticios ocurran cosa de un día o día y medio después que las sicigias verda deras. Esto no pasa de ser un artificio para explicar que la onda de marea engendrada en alguna parte del océano tarda en llegar a un puerto ese período llamado «edad de la marea». Además, la teoría de los dos elipsoides no concuerda con otros hechos. En puertos ecuatoriales la teoría, en las mareas de

agua viva, con cualquier declinación de los dos astros, daría casi igual altura a la pleamar primera que a la segunda; pero en puertos de otras latitudes las dos pleamares de un mismo día debieran alcanzar muy señalada diferencia de altura, y, por ejemplo, en Brest, cuando las declinaciones de los dos astros son iguales a la oblicuidad de la eclíptica y ambas declinaciones están dirigidas al Norte o al Sur, una de las dos pleamares del mismo día debiera ser ocho veces más alta que la otra; pero las dos pleamares en este puerto son en realidad casi iguales, y su mayor diferencia no llega a un treintavo de su suma.

Medio siglo después de publicada la obra de Newton, sus principios y su método en el estudio de las mareas eran aplicados por Daniel Bernouilli, Euler y Maclaurin en las Memorias que presentaron, optando en 1738 al premio ofrecido por la Academia de Ciencias, de París, proponiendo como tema de concurso el estudio de las mareas. Otra Memoria presentada, la de Cavalieri, recurría a los remolinos para la explicación de las mareas. Fué premiada como las otras tres, pero no prevalecieron las ideas del autor. En el ensayo de Maclaurin había poco de nuevo en lo relativo a mareas; pero allí estaban los teoremas concernientes a la atracción de elipsoides, enunciados después con el nombre del autor. La obra de Euler acreditaba su valor; pero su amigo y compañero de estudios, Bernouilli, desenvolvía con tal amplitud el concepto de los dos elipsoides, que comúnmente se asocia el nombre de este matemático a la llamada teoría de equilibrio de los mares. El asunto despertaba el interés de los matemáticos, y pocos años después de publicadas aquellas Memorias, D'Alembert, en 1746, escribió sobre las mareas en la atmósfera; pero este trabajo, como el de Maclaurin, no se distingue tanto por el estudio propio del tema como por otros que con el mismo se enlazan

De los dos caminos indicados por Newton para el estudio de las mareas, se había recorrido el que conduce a la

solución del problema propuesto como estático o de equilibrio, conforme se echaba de ver en las Memorias citadas, entre las cuales se distinguía la de Bernouilli. Pero el otro camino, el de la solución del problema como dinámico, estaba detenido en el canal ideado por Newton, en torno del ecuador. Laplace, en 1774, abordó el problema suponiendo que el océano cubriese toda la tierra. En la *Mecánica Celeste* da un interesante relato de cómo había sido llevado a plantear el problema como dinámico. Las ecuaciones de movimiento y la condición de continuidad sirven de punto de partida, y la potencial suministra con sus derivadas las componentes de atracción. Intervienen con este motivo en el cálculo funciones analíticas que comprenden los coeficientes de Legendre. Pero la exposición dada a la teoría por Laplace estaba complicada, sin necesidad, y hoy, en forma más sencilla, la incluyen algunos tratados de Hidrodinámica.

Con el océano cubriendo toda la tierra a igual profundidad, las dos pleamares de un mismo día debieran alcanzar en un mismo punto igual altura; pero esta consecuencia, deducida por Laplace, no está de acuerdo con lo que ocurre en muchos puntos, donde la desigualdad diurna de los mares es harto señalada. Luego para la predicción de las mareas apenas lleva ventaja a la teoría de equilibrio la teoría dinámica del océano de igual profundidad extendido por toda la tierra. La observación acredita donde quiera grandes diferencias en la profundidad de los mares, y a ello se une que éstos se hallan comprendidos entre continentes, de todo lo cual resultan oscilaciones del mar con irregularidad tan compleja que escapa al análisis matemático. Pero Laplace procura concertar la teoría con los datos de observación fundándose en el principio de que la oscilación de un sistema, en el cual las condiciones primitivas de movimiento de los cuerpos o partículas componentes han desaparecido por fricción, es coperiódica con las fuerzas que actúan sobre el sistema.

Por este principio, si se suponen diversas mareas parciales, producida cada una por una fuerza periódica expresada por un coeficiente multiplicado por el coseno de un ángulo que crece proporcionalmenfe al tiempo, la marea parcial respectiva estará expresada, a su vez, por el coseno de un ángulo que crecerá en la misma proporción; pero la fase del ángulo y el coeficiente del coseno en la expresión de la altura serán, tal vez, muy distintos de los que ocurren en el término correspondiente de la teoría del equilibrio. Los coeficientes y las constantes de los ángulos en la expresión de cada marea sólo pueden hallarse por observación. Por una serie convergente de tales términos con cosenos, cabe expresar la acción del sol y la luna, y a estos términos corresponden otras tantas mareas parciales cuyas ondas se superponen para dar la marea total en un puerto. A fin de unificar las diversas constantes de las mareas componentes, Laplace considera cada una de ellas como producida por un satélite ficticio que se mueve uniformemente sobre el ecuador.

Entre los autores que después de Laplace hicieron detenido estudio de las mareas, se distinguen sir John Lubbock y Whewell por la coordinación y análisis de copiosísima colección de datos recogidos en varios puertos, y esos mismos autores se señalan también por la construcción de fidedignas tablas de mareas y trazado de mapas cofluxivos o comareantes. Airy hizo una importante revista de toda la teoría de mareas y estudió profundamente el curso de las ondas en canales, y explicó los efectos de resistencia debidos al rozamiento en el progreso de ondas de marea y otras. Airy censuró la teoría expuesta por Laplace, pero sir William Thomson demostró después que esa teoría estaba bien fundada. Nuevo examen de la misma hizo en 1897 y 1898 S. S. Hough en las *Transacciones Filosóficas* de Londres. Su estudio es más amplio que el de Laplace, porque S. S. Hough toma en cuenta el efecto de la gravitación mu-

tua de las partículas del océano y porque halla también la índole y período de las oscilaciones libres del mar. Esta segunda adición bastaría para acreditar la importancia del nuevo estudio, porque un problema dinámico como el de las mareas no puede darse por enteramente resuelto, mientras no haya medio de discutir no sólo las oscilaciones forzadas del sistema, sino también las libres.

Otro aspecto da al problema H. Poincaré, quien en 1896, en dos artículos en el segundo tomo del mismo año del *Journal de Liouville*, estudió los principios matemáticos envueltos en el problema, cuando el océano está interrumpido por tierra, como en la realidad ocurre. No se propuso hallar resultados numéricos aplicables a ninguna configuración particular de la tierra, sino más bien señalar métodos por los cuales se pueda algún día encontrar semejante solución. Ya había sido estudiada anteriormenie la oscilación de marea en un lago; pero el problema perdía sencillez al suponer el lago de gran extensión, y la dificultad resultaba insuperable, cuando el lago se convertía en un mar, aunque éste fuese el Mediterráneo y no el Atlántico. Por esto tiene importancia el trabajo de H. Poincaré, señalando métodos de estudio en futuras investigaciones. Con todo ello se van reuniendo elementos para la solución teórica de acuerdo con la solución práctica, deducida de numerosos datos de observación, entre los cuales se cuenta como señalada adquisición experimental la medida directa de la fuerza productora de la marea por medio del llamado péndulo horizontal, semejante a hoja de ventana que oscila en torno de un quicio levemente inclinado.

Dignos son también de citarse autores que han sabido exponer la materia en forma sencilla o recapitular con discreción y acierto los estudios efectuados. Hall, en Francia, publicó en los anuarios del *Bureau des Longitudes*, de los años 1903 y 1904, una exposición elemental de las mareas, presentada con la claridad del que en obras de más empeño

había demostrado su competencia en el asunto. G. H. Darwin, hijo del célebre naturalista, es autor de los valiosísimos artículos sobre las mareas publicados en la novena edición de la *Enciclopedia Británica*, en la ampliación ó suplemento de la misma y en la décima edición de dicha enciclopedia. Hubieran bastado estos artículos para darle justo renombre como discreto expositor y comentarista de trabajos ajenos; pero hay otro motivo de fama merecida, porque G. H. Darwin tiene en la materia estudios propios, destacándose entre ellos la importancia que concede a las mareas, tal vez como factor cosmogónico. Invitado a dar en los Estados Unidos conferencias de exposición sencilla, este autor las dió allí muy interesantes, y las publicó después en un libro titulado *Mareas*. El libro responde a la fama del autor de los artículos de la *Enciclopedia Británica*.

*
* *

Motivada está en la teoría de las mareas la hipótesis de un océano cubriendo toda la tierra, porque la gran extensión que tienen los mares en el hemisferio austral del globo parece indicar que en la realidad se ajustará la marea bastante a las condiciones de la teoría. Pero en el hemisferio boreal los mares comprendidos entre continentes y archipiélagos se parecen más a grandes lagos, y es natural, por lo tanto, estudiar las mareas en ellos para acomodarse a las verdaderas condiciones geográficas. Mas este problema tampoco es sencillo, a menos que se suponga el lago estrecho de Norte a Sur, y no muy amplio de Este a Oeste, para que el agua pueda adquirir prontamente nuevo nivel, acomodándose al cambio de dirección de la gravedad debido a la variación de las fuerzas de marea. En tal caso, la superficie del lago, conservándose siempre perpendicular a esa dirección variable, produciría un balanceo que haría perceptible en los

extremos oriental y occidental la bajada y subida del agua si el lago tenía cierta extensión.

La fuerza horizontal máxima debida a la atracción de la luna está comprendida entre la onceava y doceava parte de una millonésima de la gravedad, y en un péndulo de diez metros de largo no produciría más que un desvío comprendido entre la onceava y doceava parte de una centésima de milímetro. Pero en un lago de doscientos kilómetros de largo, si la superficie suya se ha de mantener perpendicular a dicho péndulo colocado en mitad del lago, los extremos tendrán amplificado aquel desvío en la relación de cien kilómetros a diez metros, o de diez mil a uno. Luego, en el balanceo, el agua en las orillas, oriental y occidental llegaría a subir y bajar nueve milímetros, y produciría por junto la subida y la bajada una variación de diez y ocho milímetros. Pero este número aumentaría casi en una mitad, convirtiéndose en veintisiete milímetros cuando a la fuerza de marea de la luna se agregara la del sol, como sucede en las mareas de aguas vivas.

Más perceptible seria el balanceo en un lago de dos mil kilómetros. La subida y bajada del agua en las orillas oriental y occidental sería diez veces mayor que en el caso precedente, produciéndose por la marea lunar una oscilación de dieciocho centímetros, y por dicha marea, sumada con la solar en las aguas vivas, una oscilación de veintisiete centímetros. Pero aun admitiendo que en un lago de esas dimensiones pueda considerarse la marea como un sencillo balanceo, ya en otro lago mayor no sucedería lo mismo, porque el agua no tendría tiempo de amoldarse a una forma por la acción de las fuerzas de marea antes de tenerla que variar porque éstas hayan cambiado. Además, si el lago se extendiera también de Norte a Sur, la marea se complicaría, porque la corriente que viniera del Norte se desviaría hacia el Oeste y la procedente del Sur avanzaría hacia el Este.

Nuevas dificultades se originan aumentando la extensión

del lago, porque influyen entonces en el movimiento del agua la curvatura de la tierra y la figura, dimensiones y profundidad del lago. El balanceo podría convertirse entonces en vibraciones con líneas nodales, en que no habría subida ni bajada de agua, y entre las cuales se producirían las combas alternativas de elevación y depresión. Pero el cálculo matemático no ha llegado a resolver el problema de marea en esos lagos de grandes dimensiones, y, por tanto, al comparar con ellas algunas mareas hay que atenerse a los hechos o discurrir por conjeturas.

El Mediterráneo es casi un lago cerrado, porque el Estrecho de Gibraltar es angosto; mas este lago viene a quedar dividido en dos por los promontorios siciliano y tunecino. La marea es casi imperceptible en sus orillas, y, sin embargo, en Venecia, en las aguas vivas, llega a alcanzar oscilación de más de un metro, como si el Adriático actuara allí como un resonador.

Europa y Africa a un lado y América al otro lado forman como dos barreras de Norte a Sur, entre las cuales está comprendido el Atlántico. Por esta configuración el Atlántico tal vez tenga su onda de marea propia, y reciba como onda libre la de marea formada en los Océanos Pacífico e Índico, pues ésta se extiende de Este a Oeste, y entre el Cabo de Buena Esperanza y el Cabo de Hornos debe de padecer modificación para penetrar, dirigiéndose hacia el Norte, en la gran bahía o ensenada que forman Africa y América meridional. Tal onda libre avanzará con mayor ó menor velocidad, según la mayor o menor profundidad del Atlántico y ganando altura donde el mar se estreche, como entre el Brasil y Africa septentrional, o entre la costa de Labrador y el Norte de Europa. Así no es fácil calcular la hora y altura de la marea en los diferentes puntos de las costas recorridas; pero la hora debe ir creciendo hacia el Norte y tener en cada punto constante relación con la hora de la marea en la línea de entrada en la bahía atlántica.

Siguiendo con las conjeturas, con esta onda libre se compondrá la onda forzada de la marea propia del Atlántico, pero la segunda será menos importante que la primera, la cual puede llegar con bastante lentitud a las costas septentrionales del Atlántico, porque acaso una pleamar habrá apenas llegado a las del Brasil y de Africa septentrional cuando otra esté penetrando entre el Cabo de Buena Esperanza y el Cabo de Hornos. Luego tal vez en las costas de Europa y en las orientales de la América septentrional las mareas de hoy dependan menos de la acción directa de la luna en el mismo día que de la que ocurrió ayer o anteayer en el Pacífico Meridional y Océano Índico.

*
* *

Mas las dificultades con que se tropieza en la teoría matemática de las mareas no obsta para que la predicción de éstas se haga con exactitud. La observación asidua de todas las circunstancias que en un período mayor o menor puedan repetirse en la producción de un fénomeno basta para preverle. Antes de que se tuviera explicación teórica de las mareas ya se construían tablas, en que se anunciaba la hora y altura de ellas en algunos puertos en los días sucesivos. Entre ellas se citaban las de Liverpool como muy exactas. Estas fueron deducidas de una serie de observaciones practicadas por el capitán de puerto, Hutchinson, que estuvo observando allí las mareas unos veinte años, día y noche. De esas tablas, fundadas en cuatro años de dichas observaciones, fué autor un clérigo llamado Holden. Por métodos, cuyo secreto se guardaba, eran construídas esas y otras tablas; mas llegó el tiempo en que, conocida la teoría de las mareas, fundado en datos de observación el cálculo diera esas tablas sin secreto alguno.

Por método sintético se hizo hasta tiempo reciente la com-

paración de las observaciones con la teoría de las mareas y la formación de las tablas que predicen esas oscilaciones del mar. Este método fué seguido por todos los investigadores, desde Newton hasta Airy, comprendiendo a Bernouilli, Maclaurin, Laplace, Lubbock, Whewel. Proponíanse éstos representar la altura del agua por una o por dos funciones periódicas con una amplitud variable, y fundábase tal sencillez en que aparentemente había simplicidad en la semidiurna subida y bajada de la marea en los puertos de Europa, acompañada de la alteración semanal de aguas vivas y muertas, pues en dichos puertos la marea semi-diurna es apenas perceptible por ser casi iguales las dos mareas que se suceden en el mismo día; y así puede prescindirse de ella o concedérsela poca atención. Mas no puede hacerse lo mismo en otros puertos donde la marea diurna es bastante amplia, a veces, para producir una sola pleamar en vez de dos en un mismo día.

Comprendiendo todo ello, la expresión de las fuerzas productoras de marea debida ya al sol, ya a la luna, consta de tres términos que contienen la declinación y ángulo horario del astro. Uno de estos términos referentes á la marea semidiurna cumple un período dos veces por día solar o lunar; el segundo término concerniente a la marea diurna tiene período de igual duración, es decir, de un día, y el tercer término varía despacio por referirse a las mareas de largo período. Para efectuar la síntesis de las respectivas fórmulas matemáticas una sencilla tabla de esta clase basta para predicciones aproximadas del intervalo entre el paso referido y el momento de la pleamar o bajamar, con su altura correspondiente.

Pero, si se quiere mayor exactitud, han de introducirse correcciones por causa de la mayor o menor declinación o distancia angular de los dos astros al ecuador y por causa de la mayor o menor distancia lineal de dichos astros a la tierra. Con estas correcciones se complica el manejo de

la tabla general; pero aumentando el número de curvas gráficas o cuadros numéricos es posible introducir muchas de las correcciones, y, en tal caso, dicho manejo resulta comparativamente sencillo. Una tabla que dé el intervalo desde el paso de luna hasta la pleamar o bajamar en un día dado del año, envolverá las desigualdades principales de las mareas. Pero el sol se mueve pausadamente entre las estrellas; luego si una tabla de marea con la hora y altura del agua con referencia al paso de luna se calcula de diez en diez días, por ejemplo, será muy próximamente correcta para cinco días antes y cinco días después de la fecha para que fué calculada.

Cuando sólo se tiene como dato lo que se llama el establecimiento del puerto, como sucede en muchos de la China y del Océano Pacífico, la predicción de hora y altura de la marea no puede hacerse con gran exactitud, porque sólo se nos da la elevación media en las aguas vivas y muertas; pero falta la ley de variabilidad, según las fases de luna.

Con ello hay motivo de incertidumbre en la predicción de hora y altura; pero aún se padecerán errores de mayor cuantía si la marea tiene desigualdad diurna y falta este dato en la información. En tal caso, no se podrá predecir el momento de la marea, sino con incertidumbre de dos o tres horas; ni la altura de ella, sino con indecisión de algunos decímetros.

Disiparíase esta vaguedad con tablas generales de marea en los puertos referidos. Verdad es que cuesta algún trabajo calcular una tabla general, aunque su tamaño es reducido, pues no ocupa más de dos o tres páginas; pero el trabajo se hace de una vez y la tabla es útil en todo tiempo, con tal que las observaciones en que se base sean exactas. Teniendo a la vista, al llegar a un puerto, una tabla general de marea, un capitán de barco no tardaría más de cinco minutos en calcular las dos o tres mareas que pueda ne-

cesitar conocer, y la información será para él de gran importancia.

Pero estas tablas generales más bien deben calcularse para puertos de segundo orden, porque en los grandes centros de comercio convienen las otras tablas, llamadas especiales, que contienen para cada día del año los pronósticos respectivos de hora y altura de las mareas. Tales tablas las publican todos los países civilizados, para sus puertos más importantes, con un año de antelación. Las publicaciones más extensas parecen ser las de los Estados Unidos, para las costas de América del Norte, y las del gobierno inglés de la India, para los puertos del Océano Índico.

En puerto conocido, donde no escasean esos datos de observación, puede construírse una tabla general de mareas en dicho puerto, sirviendo la hora del paso de la luna por el meridiano de antecedente o argumento para las deducciones de hora de la pleamar y bajamar, con sus alturas respectivas. Pero señalar esa hora del paso de la luna por el meridiano equivale a fijar la posición respectiva del sol y de la luna, porque el paso de ella por el meridiano es a mediodía o por la tarde a las seis o a media noche, o a las seis de la mañana, según que la luna sea nueva, creciente, llena o menguante; esto es, que esté respecto del sol en conjunción en primera cuadratura, en oposición, o en segunda cuadratura. Una tabla fundada en la hora del paso de la luna por el meridiano envuelve las principales mareas semidiurnas, lunar y solar. En sitios en que las mareas sucesivas difieren poco fúndese el término semidiurno relativo a la luna con el correspondiente al sol, y otro tanto se hace con los términos diurnos y de pausada variación. Este es el método en general, pero ya desprovisto de la sencillez que ostentaba cuando sólo comprendía las mareas semidiurnas.

Bien es verdad que esta sencillez se perdía, aun en ese caso, por las correcciones que habían de introducirse para ajustarse á lo que requería nuevos datos de observación. En

efecto; de ello se desprendía que la fusión de dos funciones simples periódicas no basta para representar el estado de marea, aunque éste se limite a la altura y hora de la pleamar y bajamar, porque esa hora y altura se modifican con el cambio de declinación de los dos astros y la variación de sus distancias, indicada por sus paralajes, aparte de la influencia del movimiento del punto desde el cual se cuentan las ascensiones rectas. Nuevas correcciones se echaron de ver cuando se tuvieron medidas continuas de marea, y merced a ellas pudo alcanzar el investigador datos mucho más amplios que los de antiguas observaciones. Por ello, y porque se aspiraba, además, a un método sistemático para aprovechar todos los datos, se propuso el método analítico.

Sir W. Thomson fué quien la indicó explícitamente; pero como en principios dinámicos de este método siempre estuvieron sobreentendidos en el otro método, y a ella se recurría para el cálculo teórico de correcciones, no sorprende que Airy, y después de él Chazallón, hubieran ya usado una especie de análisis armónico para reducir las observaciones de marea. Pero no estaba todavía bien destacado este método, en el cual las fuerzas de marea de cada cuerpo perturbador se desenvuelve en una serie de términos compuesto, cada uno de ellos de una constante determinada por los elementos de la órbita del astro, multiplicada por una función periódica simple del tiempo. Cada uno de estos términos corresponde a un movimiento armónico sencillo, es decir, el movimiento que sobre un diámetro tiene la proyección del punto que se mueve uniformemente sobre la circunferencia.

Mas si esa proyección del punto móvil se verifica sobre un papel que se deslice con movimiento uniforme, conservándose perpendicular al plano de la circunferencia y paralelo a dicho diámetro, la proyección trazará la curva de onda más sencilla; esto es: la llamada curva de senos, cuya longitud de onda o distancia de cumbre a cumbre será mayor

o menor, según la velocidad con que el papel se deslice. En esa curva la subida y bajada respecto de la línea media se verificará con movimiento armónico. Curvas de esta clase forman las componentes de otras ondas más complejas. El análisis de las ondas de marea consiste en la descomposición de ellas en las ondas más sencillas que las constituyen. Efectúanse, al efecto, cuidadosas observaciones, y por el análisis armónico se determinan las constantes que rigen las diversas mareas parciales. La predicción envuelve la recomposición de todas las ondas dadas por el análisis, y, al efecto debe cuidarse de que las ondas parciales se compongan en sus propias posiciones relativas determinada por los lugares de luna y sol en el momento elegido para el comienzo de predicción.

Puede efectuarse la síntesis para ese objeto componiendo primeramente por separado cada grupo de ondas cuyos períodos y longitudes difieran poco, aunque no suceda otro tanto con las alturas. La resultante de dos de esas ondas tendrá longitudes y períodos intermedios con diversidad de alturas, pues en una parte se añadirá cumbre a cumbre de las dos componentes, y, en otra parte, a la cumbre de la onda de mayor altura se opondrá la hondonada de la componente menos alta. Del mismo modo, al componer dos mareas semidiurnas, resulta una onda única de variable altura con período aún semidiurno, aunque con leve variación. Esta nueva onda puede componerse, a su vez, con otra u otras del mismo período aproximadamente, y la resultante difinitiva será una onda semidiurna cuya altura variaría, según una ley compleja. Hácese después otra composición análoga en el grupo de ondas de marea diurna, y el resultado será una sola onda no uniforme en sus alturas, pero de período diurno con leve diferencia. Compónense luego las dos ondas semidiurna y diurna halladas en las dos síntesis anteriores, y la resultante final tendrá gran variedad en período y altura si la diurna tenía gran amplitud. Nueva com-

posición se efectuaría agregando las mareas de más largo período.

Las variaciones principales en las posiciones relativas de las ondas parciales de marea están dadas por las fases de luna que señalan la posición relativa de este astro y el sol, en conjunción u oposición o en cuadratura, y por la época del año, con la cual cambian la situación de los dos astros, respecto del ecuador y sus distancias a la tierra. A cada coordinación de las ondas parciales corresponde una forma definida de la onda resultante única. Para formar una tabla general de marea hay que determinar todos los períodos posibles y alturas de la onda resultante, a fin de consignar con los intervalos transcurridos desde el paso de luna hasta la pleamar y bajamar su elevación y descenso respectivo. De esta tabla general puede deducirse otra especial, donde para cada día del año estén dadas las horas y alturas de las oscilaciones del mar. Pero la tarea es laboriosa, porque en el transcurso del año hay 1.400 altas y bajas mareas. Afortunadamente es factible calcular la tabla especial de marea por método gráfico muy ingenioso que salva las dificultades del cálculo. Esta invención mecánica fué ideada por Sir William Thomson (lord Kelvin, después). El Sr. Edward Roberts contribuyó mucho á la realización práctica de esa máquina, y bajo su inspección fué construído por los señores Légé un predictor de marea para utilizarlo en las posesiones inglesas de la India.

Una polea fija, otra móvil, a la cual va unida una escuadra en forma de T invertida con una hendidura longitudinal en el travesaño, un cordón que pasa por de bajo de la polea móvil y por encima de la polea fija, y un eje horizontal en torno del cual gira uniformemente un manubrio con una clavija que puede ajustarse en él a mayor o menor distancia del eje y que corre por la citada hendidura, a parte de un engranaje adecuado para que el manubrio gire con una velocidad dada, tales son los elementos que en el mecanismo

indicado sirven para trazar cada marea componente. Representa la clavija el punto móvil, que describe con movimiento uniforme una circunferencia y viene á ser la hendidura la recta que proyecta ese punto sobre la vertical. Así la polea móvil, que sólo puede oscilar verticalmente por medio de guía a propósito, recibe un movimiento armónico en la subida y bajada, y este movimiento también es el de cualquier punto del trozo colgante del cordón que pasa por ambas poleas. Luego si ese movimiento se inscribe en el papel arrollado sobre un cilindro que gire uniformemente en torno de un eje vertical, resultará trazada la curva de onda más sencilla. Su amplitud de oscilación será doble de la que tenga la polea móvil, que es la misma que tendrá la clavija ajustada en el manubrio.

El engranaje que hace girar cada manubrio es movido a su vez por el cilindro que lleva el papel, y la velocidad de cada manubrio guarda con la del cilindro la relación debida por distribución adecuada del número de dientes en las ruedas enlazadas. Por eso, mientras el cilindro invierte un día en dar la vuelta, da en el mismo tiempo dos vueltas el manubrio que interviene en el trazado de la marea solar semidiurna y no llega a dar dos vueltas completas, sino una y y una cierta fracción próxima a la unidad el otro manubrio que corresponde al trazado de la marea semidiurna lunar. La clavija en cada manubrio se ajusta a la distancia requerida por la escala de reducción adoptada para representar la altura de las mareas. Por ejemplo, si la escala de reducción es de una quinta parte y la oscilación de marea de cinco decímetros, la clavija debe ajustarse a dos centímetros y medio, con lo cual la polea móvil respectiva oscila medio decímetro y el cordón colgante oscilará un decímetro por consecuencia del movimiento de dicha polea. El cordón que pasa alternativamente por las poleas fijas y las móviles está fijo por un extremo, y lleva en el otro la pluma o lápiz, que traza en el papel la onda resultante de las mareas componentes.

Trazaríase cada una de estas aisladamente si el cordón pasara sólo por las dos poleas respectivas, móvil y fija; pero recorriendo el cordón todas las poleas, la pluma o lápiz no traza ninguna onda componente, sino la resultante de todas ellas, las cuales deben tener en cada momento la situación que le corresponde, aunque no aparezcan trazadas. No basta, por lo tanto, que las clavijas o los manubrios indiquen la amplitud de cada marea componente, ni que los engranajes respectivos del cilindro con los manubrios estén proporcionados a las longitudes de onda o distancia de cumbre a cumbre de cada una de dichas componentes. Requiérese un tercer dato; a saber: la altura, que en el momento de empezar el movimiento del mecanismo tendrá cada onda componente, a fin de dar al manubrio que la representa la inclinación adecuada. Después de hecho esto es cuando ya se dejan montados los engranajes, y el mecanismo es impelido por un peso que desciende. Automáticamente se va extendiendo el papel sobre el cilindro, y queda arrollado después sobre un segundo cilindro, con la curva de madera trazada en él, mientras estuvo en el primero. Sólo hay que cuidarse de ver si el papel corre por igual en ambos cilindros y escribir de vez en cuando la fecha en dicho papel según va pasando, a fin de evitar alguna confusión posible al identificar los días. Invierte el mecanismo unas cuantas horas en trazar las mareas de todo un año. La exactitud es grande, porque el ajuste de las clavijas en los manubrios a las distancias debidas y la inclinación adecuada de estos manubrios en el momento de partida se efectúa con suma atención y escrupulosidad.

Compone el mecanismo hasta veinticuatro mareas parciales, incluyendo en ellas todas las desigualdades periódicas astronómicas o metereológicas que, en forma de ondas simples o elementales, descubre el análisis en la onda resultante. Aprovéchase anualmente la última revisión de las constantes de marea para diferentes puertos del Océano Índico. Con estos datos se traza para cada puerto la curva de pre-

dicción, poniendo el mecanismo en posición de partida para el mediodía de un 1.° de Enero futuro, y haciéndole funcionar hasta que trace la curva de todo el año. Midiendo después la curva se hallan la hora y altura de cada pleamar y cada bajamar, y estos datos se consignan en tablas numéricas que se publican con bastante antelación y se venden a precios módicos.

. . . . . .

. . . . . .

. . . . . .

XIII. — La presion osmótica y las disoluciones ideales.

(Conclusión.)

Por Rafael Luna Nogueras

Comparemos antes de exponer resultados esta ecuación, o lo que es igual, la [II], con la utilizada por Morse en el cálculo de las presiones osmóticas, y después con la de van't Hoff, y veremos cómo no difiere sensiblemente de la primera y contiene a la segunda. En efecto: Morse, como sabemos, calcula la presión en función de la concentración, que estima igual al cociente de dividir el número de moléculas de substancia disuelta por el de moléculas de disolvente. Expresando ese cociente bajo la forma $\frac{x}{1-x}$, resulta para valor de la presión, siempre que conservemos como volumen el molecular del disolvente,

$$P = \frac{RT}{V_m} \cdot \frac{x}{1-x},$$

o lo que es igual, verificando el cociente que el segundo factor expresa:

$$P = \frac{RT}{V_m} (x + x^2 + x^3 + \ldots)$$

que, como se ve, coincide con la [II] en la parte fundamental. Puede afirmarse, desde luego, que las presiones osmóticas calculadas por ambas fórmulas serán sensiblemente iguales para pequeños valores. Las diferencias se manifestarán con más intensidad a medida que la concentración aumenta, resultando siempre algo mayores las calculadas por el método Morse.

Que la ecuación termodinámica de las disoluciones ideales contiene a la de van't Hoff, se demuestra por un sencillo

razonamiento, que al mismo tiempo manifiesta con claridad las simplificaciones que implican las hipótesis del expresado sabio, y los motivos que determinan las discrepancias cuando su fórmula se aplica al cálculo de las presiones osmóticas de disoluciones fuertes, en razón de la notable influencia que ejercen los factores que en ella no se tienen en cuenta.

Representando x en la ecuación [II] la razón molecular, que también puede expresarse bajo la forma $\frac{n}{N+n}$ si llamamos n al número de moleculas de substancia disuelta y N a las del disolvente, se podrá escribir:

$$P = \frac{RT}{V_m}\left[\frac{n}{N+n} + \frac{1}{2}\left(\frac{n}{N+n}\right)^2 + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{3}\left(\frac{n}{N+n}\right)^3 + \dots\right].$$

Para una disolución extremadamente diluída, la diferencia entre N y N + n será escasa, y, por tanto, la razón $\frac{n}{N+n}$ se aproximará a $\frac{n}{N}$. Por otra parte, si n es muy pequeño con relación a N, la razón $\frac{n}{N+n}$ será también muy pequeña, y como las potencias sucesivas de esta fracción darán cantidades cada vez más pequeñas, que podrán despreciarse sin error sensible, la ecuación termodinámica queda en consecuencia reducida en el caso de disoluciones diluídas a

$$P = \frac{RT}{V_m} \cdot \frac{n}{N}.$$

Pero como el producto $V_m N$ representa el volumen de agua de la disolución, y en el caso de ser muy diluída puede considerarse ese volumen igual al que presenta la disolución misma, que llamamos V, la ecuación se reduce a

$$P = \frac{RT}{V} n \quad \text{o} \quad PV = RTn$$

que es la propia de van't Hoff.

Queda demostrada la mayor generalidad de la ecuación termodinámica de las disoluciones ideales, ya que encierra como caso particular a la que en un principio se creyó resumía toda la teoría general de las disoluciones.

Si pasamos ahora a comparar los números calculados por medio de la ecuación de que se trata con los suministrados con la experiencia, incluyendo también para mayor ilustración los deducidos con la fórmula de van't Hoff y los procedentes del método Morse, obtendremos para el azúcar de caña a 25° C. un cuadro cuya inspección manifiesta desde luego, cómo los valores calculados con la fórmula [III], aunque se sostienen constantemente bajos, se aproximan más a los experimentales que los suministrados por la de van't Hoff.

Azúcar en 1000 gramos de agua.	Presión osmótica observada.	Presión calculada, ecuación [III]. R = 81,6.	Presión calculada según van't Hoff	Presión calculada según Morse.
34,2 grms.	2,59 atms.	2,38 atms.	2,34 atms.	2,39 atms.
68,4 —	5,06 —	4,76 —	4,59 —	4,78 —
102,6 —	7,61 —	7,14 —	6,74 —	7,17 —
136,8 —	10,14 —	9,51 —	8,82 —	9,56 —
171,0 —	12,75 —	11,87 —	10,81 —	11,95 —
205,2 —	15,39 —	14,24 —	12,72 —	14,34 —
239,4 —	18,13 —	16,59 —	14,58 —	16,73 —
273,6 —	20,91 —	18,94 —	16,36 —	19,12 —
307,8 —	23,72 —	21,29 —	18,08 —	21,51 —
342,0 —	26,64 —	23,64 —	19,73 —	23,90 —

La causa de esta baja, que llega a 3 atmósferas cuando la concentración alcanza la normal en peso

$$(C_{12} H_{22} O_{11} = 342),$$

puede explicarse, en principio, admitiendo que en las diso-

luciones de azúcar, piedra de toque de todos los experimentadores, debido sin duda a la perfecta semi-permeabilidad que para tal substancia se ha encontrado en la membrana de ferrocianuro de cobre, no se cumple alguna o algunas de las suposiciones hechas para deducir la ecuación termodinámica; es decir, las disoluciones acuosas de azúcar de caña y para concentraciones que varían desde $\frac{1}{10}$ normal a la normal en peso, lejos de conducirse como las ideales que se han concebido, fallan en alguna de las condiciones a ellas impuestas y no introducidas en la fórmula para su mayor simplicidad. Un análisis bien conducido puede llevar al conocimiento de la supuesta causa, y entonces será posible proceder al examen de las consecuencias de su introducción en la fórmula.

Desde luego la compresibilidad de la disolución no es nula en ningún caso; pero sus efectos, dado el escaso coeficiente que al agua corresponde, no determinaría desviaciones sensibles en los resultados numéricos de la ecuación, hasta alcanzar presiones muy superiores a las consideradas.

El efecto térmico producida por la dilución, debida al paso del agua a través de la membrana, debe ser nulo en armonía con el principio general, tratándose de disoluciones como las estudiadas, siempre que no se produzcan asociaciones ni disociaciones moleculares. En efecto: haciendo $U = 0$ en la ecuación termodinámica general

$$A - U = T \frac{dA}{dT}, \qquad [IV]$$

resulta,

$$A = T \frac{dA}{dT},$$

e integrando,

$$A = T \times \text{const.}$$

y, por tanto, A es proporcional a T, es decir, el trabajo

máximo representado por la dilución es proporcional a la temperatura absoluta. Pero, como por otra parte,

$$A = P V,$$

porque este producto, llamado también *trabajo osmótico,* es equivalente a la energía necesaria para separar de una manera isoterma y reversible de una disolución con presión osmótica P, un volumen V de disolvente, por medio de una membrana semi-permeable, resulta que la presión osmótica es también proporcional a la temperatura absoluta (deducción que la experiencia comprueba), lo que exige que el calor de dilución sea nulo. Habiendo asociaciones o disociaciones (1), si se forman nuevos complejos moleculares o se descomponen los que existían, el calor de dilución tiene un valor positivo o negativo, y la experiencia demuestra que no hay proporcionalidad entre la presión osmótica y la temperatura absoluta; pero puede calcularse el coeficiente de temperatura por medio de la ecuación [IV], que toma la forma

$$P - q = T \frac{d P}{d T},$$

en donde q representa el calor de dilución, que los métodos calorimétricos ordinarios permiten medir con gran exactitud.

Examinando la asociación, y más especialmente la que pudiera producirse entre las moléculas del agua, disolvente utilizado en el caso que se estudia, obligaría, caso de existir, a modificar la ecuación [III], introduciendo en el volu-

(1) Pueden proceder de la acción mutua entre las moléculas del disolvente; entre las del cuerpo disuelto, o de ambos orígenes simultáneamente. Las causas más importantes de los efectos térmicos, son los cambios moleculares que la dilución determina entre las combinaciones de antemano contraídas por el disolvente y materia disuelta.

men molecular el factor de asociación. Pero la influencia de este factor no modificaría realmente el estado de cosas, pues adoptando para él un valor crecido, y efectuando cálculos, se obtienen números próximos a los hallados sin su intervención.

Resta por examinar entre las condiciones impuestas a las disoluciones ideales, y que pueda servir para explicar las discrepancias que venimos estudiando, el caso de una combinación entre disolvente y materia disuelta. Admitida desde luego, y suponiendo que cada molécula de azúcar se combina con k moléculas del disolvente, debe sustituirse en la [III] el factor $\frac{g}{55{,}5 + g}$ por $\frac{g'}{55{,}5 + g - kg'}$ en donde g', representante de la concentración, expresa en este caso la correspondiente a las moléculas hidratadas. Para $k = 5$, se encuentran por el cálculo números que presentan aproximación aceptable con las experimentales hasta las presiones correspondientes a disoluciones normales de azúcar, y según ha demostrado Callendar se pueden obtener, basándose en las mismas suposiciones, valores de la presión osmótica, que concuerdan perfectamente con las experimentales, aun a las fuertes presiones que Berkeley y Hartley han conseguido alcanzar siguiendo el método de trabajo propuesto por Tammam (1) y utilizando osmómetros con mem-

(1) Consiste en someter la disolución, separada del disolvente por la membrana semi-permeable, a una presión graduada y creciente hasta conseguir la posición de equilibrio determinada por el momento que no entra agua en el osmómetro ni sale de él. La presión ejercida sobre la disolución se considera como equivalente a la osmótica.

La membrana de ferrocianuro, en los aparatos utilizados por Berkeley y Hartley. se encuentra en el exterior del tubo de porcelana porosa por ofrecer así mayores garantías de resistencia, dada la estructura del conjunto y la dirección de la presión ejercida por una bomba especial que compensa a la osmótica. Pueden utilizarse hasta presiones de 120 a 125 atmósferas.

branas de ferrocianuro de cobre, preparadas por el método eléctrico de Morse y Horn (1).

Pero como se ve, no estamos seguros de haber agotado todos los factores que pueden ejercer influencia sensible dentro de los límites que la experimentación comprende, y el número de correcciones aumenta complicando la fórmula, a pesar de entender en un caso sencillo y con materia como el azúcar, cuyas disoluciones, desde el punto de vista osmótico, han sido siempre preferidas y estudiadas. No es aventurado suponer que para otras substancias nuevas modificaciones surgirían, y, en último término, parece habría de llegarse a fórmulas concretas para cada caso, auque ostentaran el marchamo de origen común. Y cabe preguntar: ¿Es que la teoría de las disoluciones ideales representa tan sólo un intento más que aumentará el legajo de lo que ya a la Historia pertenece o es utilizable en el estado actual de la ciencia?

Antes de contestar a esta pregunta, que de parecida manera podría formularse en gran número de cuestiones, hay que poner a contribución los recursos e intentar su verificación experimental por todos los medios, huyendo, desde luego, por un lado, de las medidas directas de la presión osmótica y buscando, por otro, sistemas líquidos sin asociaciones, perfectamente mixcibles e incapaces para contraer combinación, o por lo menos, con una probabilidad muy re-

---

(1) Siguiendo este procedimiento, una vez formada la membrana de ferrocianuro sobre la pared del vaso poroso, según la técnica de Pfeffer, y mejoras en ella introducidas, se termina colocando en el interior y exterior del vaso eléctrodos de platino, uniendo el sumergido en el ferrocianuro con el polo negativo. Haciendo pasar una corriente de 100 o más voltios, se produce por cataforesis un trasporte de las disoluciones, que refuerza los puntos más débiles y cierra las pequeñas hendiduras que pudieran existir. La medida de la resistencia al paso de la corriente permite seguir el proceso de formación de la membrana, que no debe darse por terminada hasta que la resistencia sea superior a 100000 ohmios.

mota de que tal suceda. Esta circunstancia, como es natural, obliga a prescindir de disoluciones acuosas, únicas que hasta hace pocos años han sido utilizadas para las medidas directas, ya que demostrado está que, si el agua como disolvente no goza de ningún privilegio para los efectos que interesan a la química-física, en cambio presenta inconvenientes variados que no siempre es dado obviar.

Por cuanto se refiere a las medidas directas de la presión osmótica debe consignarse que, ciertamente el método propuesto por Morse y Horn para la preparación de células artificiales significa un gran progreso; pero a causa de los errores que presentan las medidas efectuadas a las fuertes presiones que con ellas pueden alcanzarse, sólo suministran valores de confianza con presiones inferiores a 20 atmósferas. Además, si comprobada está la perfecta semi-permeabilidad de la membrana de ferrocianuro de cobre para el azúcar de caña, sabido es no se conduce como tal ante otras substancias, y como lo mismo puede decirse de las membranas que con otros materiales se construyan (hidrato férrico, fosfato cálcico, sílice, silicatos de niquel y cobalto, ferrocianuros de níquel, cobalto y cinc, cobalticianuros, gelatina β con ácido tánico, etc.), porque la semi-permeabilidad es propiedad específica, las medidas directas de la presión osmótica cuando de conceptos generales se trata, como sucede al verificar la ecuación termodinámica que venimos discutiendo, no son aceptables, y se impone acudir a las indirectas, que por otra parte son de técnica más fácil y rápida, al mismo tiempo que permiten determinaciones precisas con disolventes diversos a todas las concentraciones y dentro de una gran escala de temperaturas.

Como es sabido, los métodos indirectos para evaluar presiones osmóticas están fundados en el trabajo necesario para separar el cuerpo disuelto del disolvente, ya que la presión osmótica es la medida directa de este trabajo. Son varios los métodos que se conocen; pero para nuestro ob-

jeto, conviene fijar la atención en el que consigue la separación del disolvente por vaporización, utilizando para la medida las diferencias $p - p'$ que se observan a una temperatura determinada, entre las tensiones de vapor del disolvente puro y de la disolución.

La presión osmótica viene dada en atmósferas por la fórmula

$$P = \frac{p - p'}{p'} \cdot \frac{0{,}082\,T \cdot 1000\,D}{M}, \qquad [V]$$

deducida por Arrhenins y van't Hoff, independientemente, en donde D expresa la densidad de la disolución y M el peso molecular del disolvente. Pero como en esta fórmula la relación fundamental entre la presión osmótica y la tensión del vapor, sólo se encuentra verificada en los casos de disoluciones muy diluídas, por suponerse en ella que $p - p'$ es cantidad pequeña, es decir, una débil fracción de p, ha sido necesario deducir, echando mano de los conceptos termodinámicos, una fórmula más exacta y general, independiente de la concentración, que relacione, en una palabra, la presión osmótica con la tensión del vapor en el caso de las disoluciones ideales.

Considerando que el trabajo necesario para separar de una disolución un volumen dado de disolvente, ejerciendo presión con un pistón semi-permeable, es igual al que representa el mismo volumen separado por una destilación isoterma, se ha llegado a deducir, no teniendo en cuenta la compresibilidad de la disolución y suponiendo que el vapor obedece a las leyes de los gases, la siguiente fórmula:

$$P = \frac{RT}{V_m} \operatorname{Lg} \frac{p}{p'} \qquad [VI]$$

Pero como el volumen molecular V_m es igual al producto del peso molecular M por el volumen específico V_e, y éste a su vez es el inverso de la densidad D, tendremos:

$$V_m = V_e \cdot M = \frac{M}{D},$$

valor que, sustituído en la [VI], conduce a

$$P = \frac{D}{M} R T \cdot Lg \frac{p}{p'}$$

o bien, dispuesta para el cálculo en atmósferas,

$$P = \frac{1000\,D}{M} 0{,}082 \cdot T \cdot Lg \frac{p}{p'}, \qquad [VII]$$

Demuestra la aproximación que existe entre los resultados obtenidos por este procedimiento de hallar la presión osmótica y los calculados con la ecuación termodinámica de las disoluciones ideales, la serie de determinaciones efectuadas por Lewis con mezclas de bromuros de etileno y propileno (1), líquidos mixcibles que no presentan asociaciones, ni actúan entre sí produciendo reacciones químicas, así como los valores conseguidos con un número considerable de mezclas obtenidas con líquidos completamente normales desde el punto de vista de la integridad molecular.

Bromuros de propileno y etileno a 85° (2)

Fracción molecular.	Presión osmótica. Ecuación [VII].	Presión osmótica. Ecuación [I].
0,147	55 atms.	51 atms.
0,298	114 —	113 —
0,526	240 —	241 —
0,720	414 —	412 —
0,860	649 —	640 —
0,915	827 —	806 —

Es cierto que se presentan casos frecuentes de marcada anomalía; pero admitiendo sean debidas, como es de presu-

(1) Densidad 2,19 a 11° y 1,93 a 18°, respectivamente. Temperatura de ebullición 131°,5 y 141° 6.

(2) Las ecuaciones de van't Hoff y Morse, aplicadas al presente caso, conducen a resultados tan discrepantes que prueban una vez

mir, al incumplimiento de alguna de las condiciones impuestas a las disoluciones ideales y que afectan al estado de equilibrio, nada impide pueda tomarse la ecuación para ellas propuesta como fundamento de una teoría general de las disoluciones, sin que alcancen a los conceptos expuestos las observaciones que se han formulado respecto a la imperfección de las membranas semi-permeables y de la influencia que a los septum se debe en la producción de los fenómenos osmóticos.

En efecto: si en un principio fué indispensable la concepción de tales membranas, pueda en la actualidad desarrollarse la teoría de las disoluciones prescindiendo de la presión osmótica misma y en general de los fenómenos de ósmosis. Basta partir de la noción del potencial termodinámico y sentar el razonamiento sobre el hecho positivo que representa la diferencia de energía que se observa entre el disolvente y la disolución, y de cuya diferencia la presión osmótica, lo mismo que las modificaciones de las constantes físicas de los disolventes, son simples manifestaciones que la evidencian.

Ignoramos el porvenir, no sabemos el alcance que la marcha emprendida con los rumbos bosquejados pueda tener. Es casi seguro no encontrarán aplicación general la teoría de las disoluciones ideales y la ecuación correspondiente; pero es innegable suponen tan interesante progreso en el estudio de las disoluciones concentradas, como representó la concepción de van't Hoff en el de las diluídas. Marca una orientación, puede prestar valiosos servicios; pero en esta época de revisión nada puede considerarse como definitivo. Los fenómenos rara vez se presentan con

---

más la imposibilidad de su admisión en cuanto las concentraciones adquieren algún valor. Así, calculando con la primera de ellas la presión correspondiente a los dos últimos casos que figuran en este cuadro, se obtiene 232 y 241 atmósferas, y con la segunda 1960 y 3440, números que constituyen la negación más rotunda.

tan admirable sencillez como teóricamente pueden concebirse; son de interpretación difícil, y cuando creemos poseer el secreto de la producción, nuevos hechos vienen a demostrar que distamos mucho de su conocimiento. Así, hoy, no es posible dar una explicación de la ósmosis que satisfaga en absoluto, ni se sabe tampoco el mecanismo de la disolución con ser fenómeno tan vulgar y frecuente, cuyo conocimiento se pierde en la historia de los tiempos. Hipótesis en crecido número han sido emitidas respecto del particular, y los nombres de otros tantos investigadores animosos e incansables aparecen aportando datos y resultados, que aumentan el arsenal de los humanos conocimientos. Pero ya lo dijo Echegaray: «La Naturaleza sólo se entrega en pedazos al que tenazmente la investiga», y bien se puede agregar que el tamaño de éstos, no es superior al que representa una gota de agua comparada con la inmensidad de los Océanos.

Valladolid-Octubre-1915.

BIBLIOGRAFIA

CHROUSTCHOFF. — *Introduction a l'etude des equilibres chimiques.*

CHWOLSON. — *Traide de Physique.*

CLAUDE. — *Air liquide-Oxygène-Azote.*

FINDLAY. — *Osmotic pressure and the theory of solutions.* (Scientia-1-VII-912).

FLUSING. — *Du role chimique de la membrane dans les phenoménes ostomiques.*

GIRARD — *La presion osmotique et le mécanisme de l'osmose.*

HAMBURGER. — *Osmotischer Druck und Ionenlehre in den Medicinischen Wissenschaften.*

HENRI. — *Cours de Chimie Physique.*

HOBER. — *Physikalische Chemie der Zelle und der Gewele.*

NERNST. — *Theoretische Chemie.*

WURTZ. — *Dictionaire de Chimie.*

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

IX.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia quinta 201

X.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia sexta 226

XI.—Neurópteros nuevos de España, por el *R. P. Longinos Navás, S. J.* (Primera serie)..... 245

XII.—Bosquejo del estudio de las mareas (conclusión), por *Eduardo León y Ortiz*..... 254

XIII.—La presión osmótica y las disoluciones ideales (conclusión), por *Rafael Luna Nogueras*..... 274

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XIV.—NÚMERO 6.
DICIEMBRE DE 1915

FEB 7 1926

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1915

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XIV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia séptima.

SEÑORES:

Ya lo dijimos al terminar la conferencia anterior: Debemos empezar en ésta el segundo ejemplo de la serie de ejemplos, que a modo de capítulos distintos han de constituír la teoría de los gases en el presente curso.

No la teoría de los gases como flúidos continuos, sino, por el contrario, como sistemas discontinuos de átomos o moléculas en perpetuo estado de agitación.

Hasta aquí hemos presentado el ejemplo más sencillo posible: sustituíamos al gas un sistema de esferillas sumamente pequeñas, de igual radio, de igual masa, y en cada una de ellas suponíamos una distribución uniforme de materia.

Hasta aquí el primer ejemplo. Pasemos al

Segundo ejemplo.—El gas suponemos que está compuesto, no de un sistema, sino de dos sistemas distintos de esferillas elásticas que, mezcladas entre sí, se agitan y chocan.

El primer sistema admitimos que se compone de un número N de esferillas, todas ellas iguales entre sí, por tamaño y densidad, y en que la masa de cada una es m.

El segundo sistema se compone análogamente de un número N' de esferillas, también elásticas, pero de distinto radio que las anteriores y de masa m'.

Según hemos demostrado ya en otra conferencia, aun suponiendo que en un instante dado (y exceptuando distribuciones especialísimas en espacios de forma de paralelepí-

pedo rectangular) las velocidades de las esferillas fueran iguales, al cabo de algún tiempo, por los choques desordenados de unas con otras, las velocidades serían distintas; y se trata de averiguar, y éste es el problema, según qué ley deberán distribuirse las velocidades para que la mezcla de estos dos sistemas de esferillas permanezca constante *en su movimiento de agitación.*

Se trata, pues, de determinar las condiciones de un estado permanente; y si se nos permite esta manera de expresarnos, de *constancia en el desorden* de la agitación respecto a la distribución de velocidades.

Es decir, que si en un instante dado hay próximamente

N_1 esferillas con la velocidad c_1
N_2 ..... con la velocidad c_2
N_3 ..... con la velocidad c_3
.....

en otro instante cualquiera ha de existir en el flúido la misma distribución en cuanto al número de cada velocidad:

N_1 para c_1
N_2 para c_2
N_3 para c_3
..... .

Claro es que nosotros no hemos dicho nunca, ni vamos a decir ahora, que hay, por ejemplo,

N_1 esferillas precisamente con la velocidad c_1

Nos hemos de valer de un artificio tomado de la teoría de la continuidad, lo cual facilita la solución del problema, aunque para tales soluciones debamos siempre tener presentes las reservas que hemos hecho, en cuanto al atrevimiento qne revela aplicar a cuestiones *de lo discontinuo* principios y fórmulas *de la continuidad.*

No diremos, pues, vuelvo a repetirlo: Número de esferi-

llas para las que las componentes de la velocidad son u, v, w; sino número de esferillas para las cuales las componentes de la velocidad están comprendidas entre

$$\begin{array}{lll} u & \text{y} & u+\partial u \\ v & \text{y} & v+\partial v \\ w & \text{y} & w+\partial w. \end{array}$$

Para abreviar la explicación, y según hemos hecho otras veces, a estas últimas condiciones las representaremos abreviadamente por l, y hasta simbólicamente podremos escribir:

$$l=\left\{\begin{array}{ll} u & u+\partial u \\ v & v+\partial v \\ w & w+\partial w \end{array}\right\}$$

Y con esto hemos planteado el problema principal, que nos proponemos resolver en este segundo ejemplo, que es análogo al que hemos resuelto en el primero, y puede condensarse de este modo: Distribución de velocidades, de suerte que esta distribución no se altere por los choques repetidos de ambos sistemas.

Pero este problema es más complicado que el primero, porque en el primero no había más que esferillas de una clase y no había más que choques de una clase tampoco, y en este segundo ejemplo hay dos clases de esferillas, que llamaremos e y e'.

Y puede haber tres clases de choques:

Choques entre las esferillas e,

Choques entre las esferillas e',

Choques entre las esferillas e y las e'.

Y es preciso buscar una fórmula para la distribución de velocidades tal, que por ninguna de estas tres clases de choques se altere la distribución de las velocidades.

Lo mismo que hacíamos en el primer problema, supon-

dremos que nunca una esferilla choca con dos o más al mismo tiempo.

Podrá un intervalo de tiempo entre uno y otro choque ser tan pequeño como se quiera; pero nunca igual a cero.

Es una cuestión de probabilidades, y si las esferillas son sumamente pequeñas se admite que la probabilidad de estos choques simultáneos, o sea de tres esferillas, es tan pequeña que puede despreciarse.

Y es forzoso que mis alumnos se acostumbren a esta clase de afirmaciones en la teoría que vamos estudiando.

Por el pronto vamos a estudiar el choque, o mejor dicho, las consecuencias del choque de una esferilla e con una esferilla e'.

***

Fijemos una vez más las notaciones para poder hacer más breve la explicación.

La letra l determinada por la ecuación simbólica

$$l = \left\{ \begin{array}{l} u \ldots u + \partial u \\ v \ldots v + \partial v \\ w \ldots w + \partial w \end{array} \right\}$$

significará que consideramos todas las velocidades cuyas componentes están comprendidas entre u y $u + \partial u$, v y $v + \partial v$, w y $w + \partial w$; y al *primer sistema* de esferillas e de masa m y en número N le llamaremos *primer sistema*, o abreviadamente 1.er S.

Análogamente la letra l' expresada por la ecuación simbólica

$$l' = \left\{ \begin{array}{l} u' \ldots u' + \partial u' \\ v' \ldots v' + \partial v' \\ w' \ldots w' + \partial w' \end{array} \right\}$$

querrá decir que se consideran todas las esferillas e', cuyas componentes están comprendidas entre u' y $u' + \partial u'$, v' y $v' + \partial v'$ y w' y $w' + \partial w'$.

Y el *segundo sistema* de esferillas e', de masa m' y en número N' lo designaremos con el nombre de *segundo sistema*, o abreviadamente 2.º S., que corresponde a las letras acentuadas.

Cuando queramos significar, que dos esferillas e y e' de ambos sistemas están situadas de tal modo que la distancia entre sus centros es tal que las componentes de dichas distancias se hallan entre x y $x + \partial x$, y e $y + \partial y$ y z y $z + \partial z$, emplearemos la letra griega Δ, definida por la ecuación simbólica

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} x \ldots x + \partial x \\ y \ldots y + \partial y \\ z \ldots z + \partial z \end{array} \right\}$$

Y ahora pasemos a determinar las condiciones necesarias para que los choques no alteren el estado de distribución de las velocidades en ambos sistemas *primero* y *segundo* cuando dichos choques se verifican entre esferillas de estos dos sistemas.

*
* *

El opúsculo del autor inglés Walton, que, como hemos dicho, nos va a servir de guía en buena parte en el presente curso, es muy breve, apenas pasa de 80 páginas de tamaño reducido. Es a veces muy conciso, y acaso un tanto árido para el lector. No ha sido una obra de la importancia y de los desarrollos de la ya citada de Boltzmann; pero tiene, a nuestro entender, entre otros méritos el de una *unidad perfecta*; pudiéramos decir, el de una unidad sistemática, que es importantísima para la enseñanza.

Unidad *de idea,* unidad *de método;* en lo posible, unidad *de desarrollo.*

Con estudiar cualquier alumno el primer ejemplo queda perfectamente orientado para el resto del opúsculo.

Y esto explica y justifica nuestra elección.

Claro es que a nuestra manera hemos de desarrollar y de exponer las diferentes teorías; pero serán esos desarrollos como variaciones sobre un mismo tema, valga la palabra.

Y vamos a comprobar lo que acabamos de exponer, siguiendo en este *segundo ejemplo* paso a paso la marcha que hemos seguido en el primero, y que podemos enumerar con todo rigor en esta serie:

1.° Expresión que da el número de esferillas e del primer sistema cuyas velocidades están comprendidas en el límite l.

2.° Expresión del número de esferillas e' del segundo sistema cuyas velocidades están comprendidas en el límite l'.

3.° Número de pares eficaces para nuestro objeto, compuestos de esferillas e del primer sistema cuyas velocidades están en los límites l y de esferillas e' del segundo sistema cuyas velocidades se hallan en los límites l', y tales además que cada dos esferillas de un par tienen sus centros a distancias que corresponden a los límites Δ.

4.° Reducción de los límites Δ del caso general x, $x + \partial x$, y, $y + \partial y$ y z, $z + \partial z$ al caso

$$\left\{ \begin{array}{cc} 0 & \partial y \\ 0 & \partial z \\ r + r' & r + r' + (u - u')\partial t \end{array} \right\},$$

siendo r y r' los radios de ambas esferillas.

5.° Estudio del choque de cada dos esferillas e, e' y cálculo de las nuevas componentes de la velocidad, paralelas al eje de las x, de ambas esferillas después de verificarse el choque.

6.° Igualdad entre el número de pares eficaces antes del choque y el número de pares análogos a los transformados después del choque.

7.° Determinación de la ecuación que resulta para determinar las funciones χ, expresando esta función la densidad de las velocidades.

8.° Método para deducir de la ecuación resultante la expresión de la densidad de velocidades en forma exponencial.

9.° Aplicación de estas fórmulas a la determinación de velocidades y de otras cantidades medias.

***

Lo que acabamos de recordar es el índice de cuanto hemos explicado en el primer ejemplo, y es a la vez el índice de cuanto hemos de desarrollar en este segundo ejemplo, dentro siempre de estos números de orden; y para cada uno de ellos la marcha y las demostraciones parciales serán idénticas á las del caso anterior.

***

1.° El número de esferillas cuyas velocidades están comprendidas en los límites l para el primer sistema, es evidentemente

$$\chi(u^1 + v^2 + w^2)\,\partial u\,\partial v\,\partial w$$

o representando por c la velocidad resultante y poniendo

$$\chi(c^2) = \psi(c)\ldots$$

$$\psi(c)\,\partial u\,\partial v\,\partial w$$

Hemos empleado el adverbio *evidentemente*, y algunos autores como cosa evidente consideran la expresión anterior; pero, a decir verdad, no es evidente: hay que demostrarla, y se demuestra por medio del diagrama de velocidades del paralelepípedo elemental $\partial u \cdot \partial v \cdot \partial w$, y de la densidad de velocidades representada por la función $\chi(u, v, w)$, que luego se transforma en $\psi(c)$.

Pero la demostración es inútil en este momento, porque ya la hemos dado en el primer ejemplo con toda clase de pormenores.

2.° Asimismo el número de esferillas e' del segundo sistema estará determinado por la expresión

$$\psi_1(c')\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'.$$

3.° El número de pares de esferillas, compuesto cada par de una esferilla e del primer sistema y otra esferilla e' del segundo, y lo mismo da decir pares de esferillas que pares de velocidades de uno y otro sistema, cumpliendo cada elemento del par con las siguientes condiciones: que la primera esferilla e, no sólo pertenece al primer sistema, sino que la componente de su velocidad está en los límites l; que la segunda esferilla del par e' tiene, a su vez, las componentes de su velocidad en los límites l'; que es como decir que la esferilla e pertenece al grupo de los límites l o primer grupo, y que la segunda esferilla e' pertenece a los límites l', o sea del segundo grupo, y que, además, la distancia entre los centros satisface a los límites Δ; que el número de pares, repetimos, que cumplen con estas tres condiciones estará dado por la expresión

$$C\,\psi(c)\,\psi_1(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

siendo C una constante.

Este número tiene exactamente la misma forma que el

número análogo que estudiamos en el primer ejemplo, con la diferencia de que lo que allí llamábamos u_1, v_1, w_1 y u_2, v_2, w_2, aquí lo representamos por u, v, w, y u', v', w'.

Si hubiéramos de dar la demostración de la expresión precedente, tendriamos que repetir palabra por palabra lo que allí dijimos: Tomaríamos, desde luego, una esferilla del primer grupo, formaríamos pares de esferillas con ella y con esferillas del segundo grupo comprendidas en el paralelepípedo $\partial x\, \partial y\, \partial z$.

El número de estas últimas esferillas lo determinaríamos comparándolo con el de esferillas de este segundo grupo comprendidas en el paralelepípedo de unidad de volumen, con lo cual introduciríamos la constante C, que marcaría la homogeneidad estadística del sistema, y, por último, multiplicaríamos este resultado obtenido para una esferilla del primer grupo por el número de todas las esferillas de dicho grupo.

Observaríamos, por último, que esta constante C es una constante del sistema en su estado permanente, y aun repetiríamos lo que allí dijimos: Que el autor inglés habla de *cantidades proporcionales*, y nosotros procuramos establecer el número absoluto, no números proporcionales, mediante la introducción de la constante C.

Estos razonamientos parecen rigurosos, y como tales pudieran considerarse, si el problema fuera un problema de continuidad; pero tratándose de un sistema discontinuo, alguna observación haremos en breve.

4.° Tenemos ahora que estrechar el paralelepípedo $\partial x\, \partial y\, \partial z$ para aproximar todas las esferillas e' en él contenidas a la esferilla e, con el objeto, por decirlo de este modo, de tener en cuenta los choques que se verifiquen entre los pares eficaces de esferillas.

Y repitiendo cuanto dijimos en el primer ejemplo, convertiremos la expresión del número anterior en la siguiente:

$$C\psi(c)\psi_1(c')\partial u\, \partial v\, \partial w\, \partial u'\, \partial v'\, \partial w'\, \partial y\, \partial z\, (u - u')\, \partial t.$$

El nuevo paralelepípedo correspondiente a Δ (o a los límites de los centros) tiene ahora por dimensiones

$$\partial y, \partial z, (u' - u)\, \partial t.$$

Es, por decirlo de este modo, un paralelepípedo largo y estrecho, tan estrecho que tiende a confundirse con un trozo del eje de las x.

Lo cual quiere decir, que todas las esferillas e' del segundo sistema y segundo grupo, o están en una paralela al eje de las x, o sus centros están a distancias muy pequeñas del eje del paralelepípedo paralelo a las x, distancias del orden ∂y, ∂z; y además en sus movimientos, o trazan paralelas al eje de las x, o rectas que casi son paralelas al expresado eje.

De suerte que se comprende, que las esferillas encerradas en este paralelepípedo largo y estrecho y además muy próximas entre sí porque sus distancias son menores que

$$(u - u')\, \partial t,$$

en el intervalo ∂t chocarán unas con otras, y estos son los choques que ahora debemos tener en cuenta; pues para provocar estos choques, si vale la palabra, hemos reducido las dimensiones del paralelepípedo ∂x, ∂y, ∂z.

Esto respecto al paralelepípedo del diagrama que hubiéramos podido construír para los límites del cuadro Δ.

Pero nos falta todavía algo por explorar, y es la posición de la esferilla e con relación a las e' que están dentro del paralelepípedo.

Todo esto lo dijimos en el primer ejemplo; pero es punto tan importante de la demostración, que no estará de más repetir aquellos razonamientos y aun afinarlos más, si vale la expresión.

Todo lo que ahora vamos a decir, en rigor entonces de-

bimos decirlo; pero en una primera intuición de las cosas casi es perjudicial descender a ciertos pormenores y hacer alarde de ciertos escrúpulos.

Mas dada la demostración en el primer ejemplo en conjunto, no estará de sobra que en este segundo ejemplo apuremos el análisis.

Y el análisis tal como quisiéramos hacerlo presenta algunas dificultades, que son inherentes a este género de problemas.

En los problemas estadísticos, o sea de mecánica estadística, en los cálculos de probabilidades y en general en todos aquellos en que domina la discontinuidad y en que se trata de grandes números, no es fácil ver los problemas materialmente *con los sentidos,* por decirlo de esta manera, o con la imaginación manejando figuras geométricas.

Así, viniendo a nuestro asunto, el razonamiento que empleamos parecía claro. Tratábamos de determinar el número de pares útiles de esferillas o de velocidades correspondientes a estas esferillas, y tomábamos un elemento (esferilla o velocidad) del par en el primer grupo y lo combinábamos con todos los elementos del segundo grupo contenidos en el paralelepípedo de volumen $\partial x\, \partial y\, \partial z$, de modo que resultarían tantos pares útiles como elementos del segundo grupo contiene dicho paralelepípedo.

Y este número era el que resultaba de multiplicar el número de elementos del segundo grupo contenidos en la unidad de volumen por el volumen anterior $\partial x\, \partial y\, \partial z$, o sea una constante multiplicada por este volumen y multiplicada por el número de elementos del segundo grupo.

La constante expresaría la relación entre el número de los elementos comprendidos en la unidad de volumen y el número total.

Y repitiendo esto para todos los elementos del primer grupo, tendremos la fórmula que obtuvimos en el primer

ejemplo, que hemos repetido en éste, y que se componía de cuatro factores:

La constante,

El número total de elementos del primer grupo,

El número total de elementos del segundo grupo,

Y el volumen del paralelepípedo $\partial x\, \partial y\, \partial z$.

Fórmula que, de golpe, si vale la palabra, puede escribirse, porque instintivamente se ve que el número de pares útiles será proporcional al número de elementos de cada grupo, y, por lo tanto, al producto de estos dos números, y que será mayor o menor según sea el volumen $\partial x\, \partial y\, \partial z$.

Esto se desprende de la homogeneidad estadística del sistema.

Y hasta aquí el razonamiento, dada la naturaleza del problema, satisface por completo.

Pero este razonamiento satisface cuando se trata de grandes números: un número muy grande, el de elementos del primer grupo; otro número muy grande, el de elementos del segundo grupo; un número muy grande también, el de elementos del segundo grupo contenidos en la unidad de volumen, y un número muy grande de elementos, finalmente, el de elementos en el paralelepípedo $\partial x\, \partial y\, \partial z$.

Y hasta aquí la crítica no se rebela.

Pero al pasar del paralelepípedo $\partial x\, \partial y\, \partial z$, que corresponde a los límites para los centros de las esferillas

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{l} x \;\ldots\; x + \partial x \\ y \;\ldots\; y + \partial y \\ z \;\ldots\; z + \partial z \end{array} \right\}$$

al paralelepípedo que corresponde a estos límites mucho más estrechos

$$\Delta = \left\{ \begin{array}{c} r + r' \ldots r + r' + (u - u')\,\partial t \\ 0 \quad \partial y \\ 0 \quad \partial z \end{array} \right\},$$

límites que son necesarios para provocar los choques, es decir, para estudiar las regiones en que los choques se producen, la argumentación empieza a flaquear y aparecen dudas, y hasta el trazado de las figuras para este caso resulta incierto.

Y las dudas puede decirse que son tres.

¿Este nuevo paralelepípedo, prolongado paralelamente al eje de las x, a pesar de que sus dimensiones son muy pequeñas $((u - u')\,\partial t, \partial y, \partial z)$, contiene un gran número de esferillas, o no contiene más que una esferilla del segundo grupo?

Precisamente la que ha de chocar con la esferilla del primer grupo que agrupábamos con este paralelepípedo, a fin de constituír los pares útiles para el choque de elementos del primero y segundo grupo.

Si es una sola esferilla la proporcionalidad entre el número de esferillas del paralelepípedo cuyo volumen es la unidad y el número de esferillas del paralelepípedo reducido

$$(u - u')\,\partial x \cdot \partial y \cdot \partial z,$$

ya es indeterminada.

No lo sería tratándose de cantidades continuas; lo es tratándose de cantidades discontinuas, porque a una esferilla única corresponden muchos volúmenes, repitiendo la crítica que se hace de la densidad de un cuerpo en un punto cualquiera de un volumen cuando la distribución de la masa es discontinua; y puede consultarse a este propósito la admirable labor de M. Perrin sobre los átomos.

Vengamos ahora a la segunda duda.

Si admitimos que el paralelepípedo reducido

$$(u' - u)\,\partial t\,\partial y\,\partial z$$

contiene muchas esferillas, ¿en el tiempo ∂t con cuál de ellas va a chocar la esferilla exterior e que está agrupada con el expresado paralelepípedo, según la demostración,

para formar tantos pares útiles en el choque como esferillas hay en el expresado paralelepípedo?

Según la demostración, con todas. Pero aquí la imaginación se confunde al esforzarse *por ver*, y no hay manera de representarse en el tiempo ∂t esta serie de choques.

Demos relieve a este punto dudoso con la figura 18, puramente esquemática.

Supongamos que el paralelepípedo reducido, cuyas dimen-

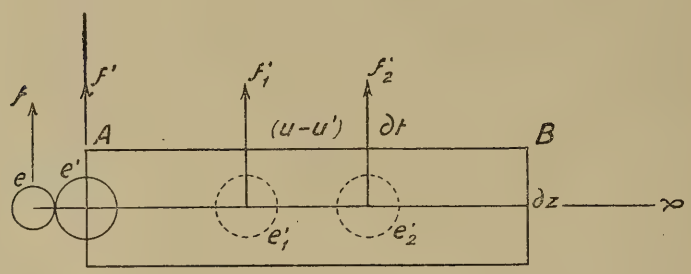


Figura 18.

siones son $(u - u')\,\partial t$, ∂y, ∂z, se proyecta en $A\,B$ sobre un plano paralelo al de las x, z.

La proyección será un rectángulo en que el lado $A\,B$, paralelo al eje de las x, será $(u - u')\,\partial t$; la dimensión perpendicular en la figura a x, es decir, la altura, será ∂z, y la dimensión perpendicular al plano de la figura será ∂y.

Según nuestro sistema de demostración, la primera esferilla del segundo sistema la suponemos en el borde, por decirlo así, del paralelepípedo, y además hay otras muchas esferas del segundo grupo del segundo sistema e'_1, e'_2.

La esferilla e del primer grupo perteneciente al primer sistema, que ha de formar pares útiles con todas las esferillas del paralelepípedo, la hemos representado en e.

Y no olvidemos las notaciones, para evitar toda confusión.

Llamamos primer sistema a todas las esferillas e cuyas velocidades son u, v, w . . .

Llamamos primer grupo del primer sistema a todas las esferillas cuyas velocidades están comprendidas en los límites l.

Asimismo llamamos segundo sistema a todas las esferillas e' de masa m' y de radio r'.

Y, por último, llamamos segundo grupo del segundo sistema a todas las esferillas e' cuyas velocidades están en los límites l'.

Y en la demostración formamos pares útiles para el choque con la esferilla e, y cada una de las esferillas

$$e', e'_1, e'_2 \ldots$$

contenidas en el paralelepípedo reducido $A\,B$.

Si cada par de esferillas representa un choque, e tiene que chocar con e' y con e'_1 y con e'_2, porque si no no hay tantos choques como pares útiles de esferillas.

Pero esto, físicamente, no se comprende. Podrá chocar e con e' nada más en la figura 18, y e con e' en la figura 18 bis,

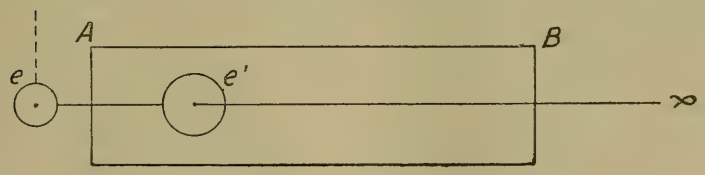


Figura 18 bis.

y e con e', todavía, en la figura 18 ter, y así sucesivamente;

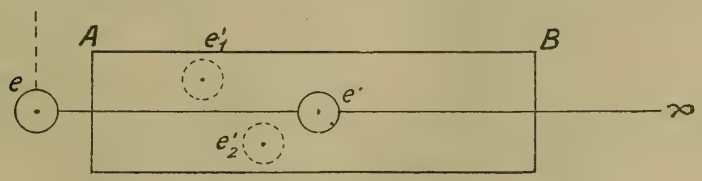


Figura 18 ter.

pero volviendo a la figura 18, es imposible que e choque

con e'_1 ni con e'_2, y resulta aquí una *imposibilidad* física o una *confusión*, que a primera vista no puede aclararse.

Y la demostración que hemos dado resulta una demostración idealista, sin consistencia real.

Pero vengamos a la tercera duda, y sigamos teniendo presentes las tres figuras anteriores.

No solamente la esferilla e después de chocar con e' (figura 18) no puede chocar con e'_1 directamente, porque e' es una barrera entre ambas, sino que hay otra dificultad mayor.

Al fin y al cabo la duda precedente pudiera atenuarse suponiendo que las esferillas no tuvieran sus centros rigorosamente sobre la recta paralela al eje de las x, como aparecen en la figura 18 ter e'_1 y e'_2, y que pasasen unas esferas por debajo de otras, si puedo emplear estos términos vulgares. Al fin y al cabo, si no trazaban líneas rigorosamente paralelas al eje de las x, trazarían líneas formando ángulos muy agudos con dicho eje, y siempre suponemos que los radios de las esferas son muy pequeños en comparación con las dimensiones del paralelepípedo, por pequeñas que sean.

Pero esta tercera duda que examinamos ahora es mucho más grave, porque las esferillas e, e' (figura 18) después del choque constituyen un par que tienen las velocidades posteriores al choque; de suerte que e ya no es una esferilla del primer grupo que pueda combinarse con e'_1, porque, volvemos a repetirlo, no pertenece al primer grupo; no tiene la velocidad u, sino la velocidad paralela al eje de las x que el choque la haya comunicado. Luego no es lícito combinarla con e'_1 ni con e'_2 como pares útiles posteriores al choque.

Todo esto prueba que la demostración que dimos en el primer ejemplo, y que en el primer momento parecía clara, no lo es tanto, y requiere explicaciones y aclaraciones.

Mister Walton no las da, sino que plantea la fórmula final, y aun las que dan otros autores no están exentas de dudas.

Todas estas dudas, no nos cansaremos de repetirlo, proceden de aplicar los métodos rigorosos de la lógica, propios del principio de continuidad, a problemas en que entran sistemas discontinuos.

En estos últimos ha de acudirse con mucha más frecuencia que en los primeros a lo que el filósofo Bergson, muy especialmente, y el eminente Poincaré, llaman la *intuición*. Procedimiento distinto de los principios de la lógica deductiva, aunque a veces poderoso auxiliar de ésta.

***

Procuremos ser breves para no interrumpir por más tiempo la marcha regular de la teoría.

No olvidemos que todas las esferillas $e \ldots e' \ldots$, no sólo tienen velocidades paralelas al eje de las x, o casi paralelas, aunque nos fijamos en éstas porque son las que cambian por el choque, sino que tienen velocidades perpendiculares a este eje, que representamos esquemáticamente por las flechas $f, f'_1, f'_2 \ldots$, velocidades que no son otras que las

$$v, w; \; v', w', v'_1, w'_1, \ldots .$$

Pues esta circunstancia puede servirnos como *paliativo* a las dudas precedentes.

Porque estas velocidades transversales en el intervalo ∂t *quitan de en medio, quitan de donde estorban*, si se nos dispensa esta manera vulgar de expresarnos, a unas y otras esferillas en el acto de verificarse el choque; y por la permanencia que suponemos para el movimiento del sistema, otras esferillas de refresco (y seguimos empleando términos vulgares, pero expresivos) en condiciones anteriores al choque y equivalentes a las ya utilizadas, vienen a ocupar, y se comprende que puedan venir a ocupar, el lugar de éstas.

Más claro. Después de haber chocado la esferilla e con e',

como en la figura 18, o con la esferilla e' de la figura 18 bis, o con la e' de la figura 18 ter, empleando períodos de tiempo en llegar al choque 0, $\partial t'$, $\partial t''$ ... menores que ∂t, que sería el tiempo correspondiente al choque de e con la esferilla colocada al extremo B del paralelepípedo elemental, este par de esferillas, que tienen ya velocidades paralelas al eje x, que no son las anteriores, sino las posteriores al choque; este par de esferillas, repetimos, transportadas por sus velocidades f, f', f'', dejan el campo libre, por decirlo de esta manera, a otras dos esferillas, constituyendo un par anterior al choque.

Y no se diga que habrá una esferilla menos en el primer sistema y en el primer grupo y otra menos también en el segundo sistema y en el segundo grupo, porque dada la permanencia del movimiento de algún punto del flúido habrán venido dos esferillas a suplir la falta de las anteriores: una e y otra e'.

En todo caso esta especie de *renovación transversal* y la disminución de los pares que antes enumerábamos, se ve que pueden tenerse en cuenta en el coeficiente C de la fórmula: basta reducir su valor.

Bien comprendo que estas ideas aparecerán un tanto vagas, pero no puedo analizar tan minuciosamente el problema como hubiera querido.

Diré, como resumen, que todas estas observaciones combinadas conducirían a multiplicar el número de esferillas del primer grupo por una cierta constante k y el número de esferillas del segundo grupo por otra constante k', ambas menores que la unidad.

Pero ambas constantes estarán comprendidas en la constante C.

Y con tal que las contantes C, k y k' puedan considerarse idénticas para el conjunto de pares antes y después del choque, la fórmula establecida podrá considerarse como suficientemente exacta.

Advirtamos, por último, que todo lo que acabamos de decir para un punto del flúido es aplicable a otro punto cualquiera.

Y con lo expuesto, y con el propósito de no insistir más sobre esta materia, que es excesivamente sutil, cuando *se pone empeño en crear una forma sensible* para la serie confusa de choques, estableceremos definitivamente la fórmula

$$C\psi(c)\psi_1(c')\partial u\partial v\partial w\partial u'\partial v'\partial w'\partial y\partial z(u'-u)\partial t,$$

que representará el número de pares útiles para los choques entre las esferillas e del primer grupo del primer sistema y las esferillas e' del segundo grupo del segundo sistema, estando comprendidas las componentes de las primeras en los límites l, las componentes de la segunda en los límites l' y las componentes de las distancias entre los centros de unas y otras en los límites Δ.

En la conferencia próxima, siguiendo rigorosamente el orden que hemos seguido en el primer ejemplo, empezaremos a tratar la materia correspondiente al número cuarto de la enumeración que en esta conferencia hemos establecido como patrón constante en casi todos los problemas que vamos a resolver.

XV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia octava.

SEÑORES:

Empezaremos recordando la fórmula que establecimos al final de la conferencia precedente, a saber:

$$C\,\psi\,(c)\,\psi_1\,(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'\,\partial y\,\partial z\,(u-u')\,\partial t.$$

Y esta fórmula, mejor dicho, esta expresión, representa, según dijimos, el número de pares útiles para los choques entre las esferillas e del primer grupo del primer sistema y las esferillas e' del segundo grupo del segundo sistema, estando comprendidas las componentes de las primeras en los límites l; las componentes de las segundas, en los límites l', y las componentes de las distancias entre los centros de unas y otras, en los límites Δ.

No vamos a insistir en las minuciosas observaciones que expusimos en la última conferencia.

Pero como esta expresión y otras análogas son frecuentísimas y fundamentales en la teoría cinemática de los gases, recordaremos en breves palabras una especie de demostración sintética, o mejor dijera, una interpretación de dicha fórmula.

Dijimos: si un grupo de esferillas e choca con otro grupo de esferillas e' en las condiciones de los límites l, l', Δ, y en un flúido en equilibrio estadístico y de uniformidad estadística también, la *intuición* de la realidad y aun el *sentido*

común nos dice que, cuanto mayor sea el número de esferillas de la primera clase y mayor sea el número de esferillas de la segunda clase, mayor será el número de choques en un espacio de tiempo ∂t.

Y aun la uniformidad del sistema nos da la idea de que el número de choques será *proporcional* al número de esferillas e y al número de esferillas e'. Es decir, que será proporcional a

$$\psi(c)\,\partial u\,\partial v\,\partial w$$

y a

$$\psi_1(c')\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'.$$

y, por lo tanto, a su producto

$$\psi(c)\,\psi_1(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'.$$

Pero como para que choquen las esferillas es preciso que estén comprendidas cada dos, y en cada choque, en un paralelepípedo suficientemente pequeño, el número total de choques dependerá del volumen de dicho paralelepípedo, y a dicho volumen puede suponerse que es proporcional: si es grande, habrá más choques; si es pequeño, habrá menos, en razón a dicho volumen.

Luego, multiplicando la expresión anterior por

$$\partial x\,\partial y\,\partial z,$$

la fórmula

$$\psi(c)\,\psi(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'\,\partial x\,\partial y\,\partial z$$

será proporcional al número de choques en el tiempo ∂t, o si se quiere al número de pares que han de producir los choques.

Por último, si reducimos el paralelepípedo $\partial x\,\partial y\,\partial z$ a este otro

$$\partial y\,\partial z\,(u - u')\,\partial t,$$

aún podremos seguir empleando el mismo argumento que nos ha servido para los demás factores de la expresión total.

Así diremos: cuanto mayor sea la sección $\partial y \partial z$, mayor número de filetes (démosles este nombre) contendrá dicho paralelepípedo paralelos al eje de las x, y más probables serán los choques.

Podemos, pues, introducirlos como factor *admitiendo la proporcionalidad;* y, por otra parte, a igualdad de las demás condiciones y en un tiempo dado, ∂t, el número del choque será tanto mayor cuanto mayor sea la velocidad relativa $(u - u')$.

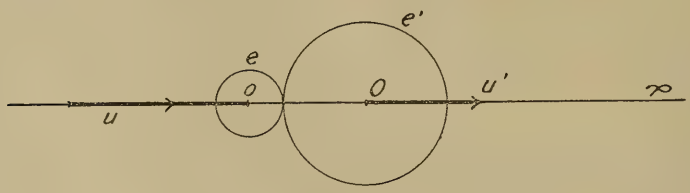


Figura 19

Si la velocidad relativa fuese nula, las dos esferillas no podrían chocar jamás, y en un gran conjunto de esferillas, o si se quiere de filetes, o, dicho con más propiedad, de filas de esferillas, cuanto mayor sea esta velocidad relativa más se precipitarán los choques.

Y en todo caso, cuanto mayor sea el intervalo ∂t, dada la uniformidad estadística del movimiento, el número de choques será proporcional a dicho intervalo de tiempo ∂t que hayamos elegido.

En suma, podemos establecer la fórmula que, con estas o aquellas variantes, hemos de reproducir constantemente en la teoría cinemática de los gases

$$C \psi(c) \psi_1(c') \partial u \partial v \partial w \partial u' \partial v' \partial w' \partial y \partial z (u - u') \partial t.$$

Como la serie de los anteriores productos no da más que

una cantidad proporcional al número de pares útiles o de choques, hay que agregar el factor constante C.

Y ahora establecido lo que precede, debemos estudiar en este segundo ejemplo el choque de dos esferillas, e, e'.

5.° En el primer ejemplo, el choque de dos esferillas iguales e y e, del mismo volumen y de la misma masa, por lo tanto homogéneas, elásticas y sin rozamiento ni adherencia entre las superficies, era bien sencillo: las esferillas cambiaban de velocidad.

La que iba detrás y alcanzaba a la segunda, por ser mayor su velocidad, tomaba la velocidad de ésta y le comunicaba la suya propia.

En este segundo ejemplo el problema es algo más complicado, aunque elemental.

Hay que partir de las mismas dos ecuaciones que empleamos la primera vez, que tratamos este problema.

Estas ecuaciones son: la que expresa la constancia de la fuerza viva en el sistema y la que expresa la constancia de

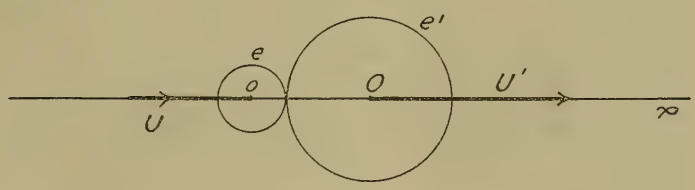


Figura 19 bis

las cantidades de movimiento paralelamente a la línea de los choques.

Sean e, e' las dos esferillas que chocan (fig. 19).

La esferilla e lleva una velocidad u superior a la velocidad u' de la esferilla e', y por eso la alcanza.

Y es claro, que lo que acabamos de decir es general para todos los signos y valores de u y u'.

Hemos tomado, en cierto modo, un tipo de choque para la explicación.

Después del choque las velocidades de las dos esferillas serán distintas: la representaremos por las mismas letras, pero mayúsculas.

La velocidad de e la representaremos por U; la de e', por U' (fig. 19 bis).

Las dos ecuaciones del problema serán, como hemos dicho,

$$m u^2 + m' u'^2 = m U^2 + m' U'^2,$$
$$m u + m' u' = m U + m' U'.$$

La primera expresa la constancia de la fuerza viva del sistema, antes y después del choque. El primer miembro es la suma de las fuerzas vivas de las masas m y m' que tenían las velocidades u y u'.

El segundo miembro es, asimismo, la suma de las fuerzas vivas de estas dos masas. La m tiene la velocidad U; la m', la velocidad U'.

La segunda ecuación expresa análogamente la suma de las cantidades de movimiento de las dos esferillas: en los dos momentos anterior y posterior al choque.

Claro es que no necesitamos tener en cuenta las velocidades perpendiculares á la línea de los choques. Es decir, paralelas a los ejes y, z, porque estas velocidades quedan inalterables.

Antes del choque

las de e eran v, w,

las de e' ... v', w'

Después del choque seguirán siendo las mismas.

De modo que, si por armonía en la notación las representamos por letras mayúsculas, tendremos:
componentes de la velocidad de e paralelas a y, z,

$$V = v, \quad W = w,$$

y las de e'

$$V' = v', \; W' = w'.$$

Advertiremos, como ya hemos hecho otras veces, que si bien pudiera creerse, que al considerar la línea de los choques paralela al eje de las x sólo estudiábamos un caso particular, como en virtud de la homogeneidad estadística del sistema, cualquier línea del espacio puede considerarse como eje de las x, para cualquier dirección y sea cual fuere la de la línea de los centros de dos esferillas, que es la del choque, puede tomarse como eje de las x.

Las dos ecuaciones que acabamos de escribir se demuestran en todos los tratados de Mecánica, y la demostración fácilmente la recuerdan mis alumnos.

La primera, es decir, la de las fuerzas vivas es evidente, porque en el choque, las fuerzas elásticas que se desarrollan en una y en otra esferilla, dada la elasticidad perfecta de las esferillas en cuestión, ejecutan trabajos iguales y contrarios y, por lo tanto, la suma de las fuerzas vivas no puede variar.

En cuanto a la segunda ecuación, inmediatamente se reduce de las ecuaciones generales de la Dinámica con sólo sumarlas é integrar el resultado con relación al tiempo.

Sea el punto e de masa m sobre el cual actúa otro punto to e' de masa m' con cierta fuerza f.

Y sobre este punto e' de masa m' actuará, en la misma línea, la masa m, con una fuerza igual y contraria á la anterior, es decir, $-f$.

Tendremos

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = f \qquad m' \frac{\partial^2 x'}{\partial t^2} = -f,$$

o bien,

$$m \frac{\partial u}{\partial t} = f \qquad m' \frac{\partial u'}{\partial t} = f$$

Sumando, tendremos

$$m \frac{\partial u}{\partial t} + m' \frac{\partial u'}{\partial t} = 0,$$

e integrando,

$$mu + m'u' = \text{constante}.$$

Este, es en efecto, el caso, porque las fuerzas elásticas se destruyen en el instante del choque, y, por lo tanto, se tiene

$$m\,u + m'\,u' = m\,U + m'\,U'.$$

Consideraciones análogas podrían emplearse para demostrar la constancia de la suma de las fuerzas vivas.

Ahora bien, las dos ecuaciones citadas

$$mu^2 + m'u'^2 = mU^2 + m'U'^2$$
$$mu + m'u' = mU + m'U'$$

nos dan inmediatamente los valores U, U' de las velocidades de las dos esferillas e y e' paralelas al eje de las x y posteriores al choque.

Para despejar estas incógnitas puede emplearse la siguiente transformación elemental.

Poniendo ambas ecuaciones bajo la forma,

$$m\,(u^2 - U^2) = m'\,(U'^2 - u'^2)$$
$$m\,(u - U) = m'\,(U' - u'),$$

y dividiendo una por otra, resultará

$$u + U = U' + u',$$

o bien,

$$u - u' = U' - U.$$

Esta ecuación nos demuestra que las *velocidades relativas*

son iguales, aunque de signo contrario, y además tendremos dos ecuaciones de primer grado:

$$mu + m'u' = mU + m'U'$$
$$u - u' = U' - U,$$

de donde podrán despejarse inmediatamente U y U'.

Y hallaremos

$$U = u - \frac{2m'}{m + m'}(u - u')$$
$$U' = u' + \frac{2m}{m + m'}(u - u').$$

Dichas fórmulas demuestran desde luego, que la velocidad relativa de cada dos esferillas que chocan se conserva después de haberse verificado el choque aunque, con signo contrario, es decir,

$$u - u' = U' - U$$

o sea,

$$u - u' = -(U - U'),$$

lo cual es natural, puesto que la última ecuación es una de las que nos han servido para determinar U y U'.

Esta ecuación demuestra, además, que si se tiene

$$u > u'$$

se tendrá

$$U < U'$$

puesto que para que la diferencia $U - U'$ sea igual a $u - u'$ hay que cambiar de signo. Luego $U - U'$ debe ser negativa si $u - u'$ es positiva.

6.° Pasemos al punto siguiente:

En él hay que demostrar la igualdad entre dos fórmulas: *una* para las letras minúsculas, *otra* para las letras mayúsculas; permitásenos expresarnos de este modo abreviado.

En uno de los pares la esferilla e (fig. 20) tenía una velocidad c cuyas componentes eran u, v, w, y la esferilla del segundo grupo e' tenía asimismo una velocidad c' a la cual correspondían las componentes de velocidad u', v', w'.

Representando, como antes dijimos, las nuevas componentes de las velocidades por las mismas letras, pero mayúsculas, las camponentes de la velocidad de e serán U, V, W y U', V', W' después del choque (fig. 20 bis)

Esto lo hemos representado en las figuras 20 y 20 bis, reproducción de otras análogas que trazamos para el primer ejemplo.

En ellas aparecen, no solamente las componentes, sino las resultantes c, c' antes del choque, y C, C' después del mismo.

Además no ha de olvidarse que las componentes perpendiculares a la dirección del choque permanecen constantes. Así:

$$v = V,\ w = W$$
$$v' = V',\ w' = W'.$$

Porque u es mayor que u', la esferilla e alcanzó a e' en el primer par; en el segundo (fig. 20 bis) U, como he-

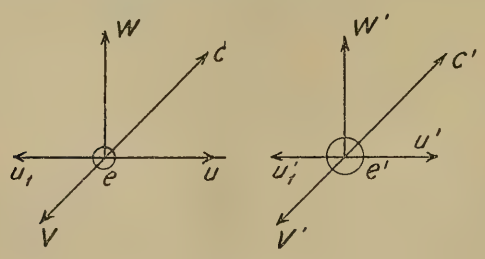


Figura 20

mos visto, es menor que U' y ya no podrá alcanzar e a e'.

Si para algún punto de la demostración necesitásemos tener en cuenta el choque de e, e', en esta figura, 20 bis,

deberíamos considerar, no un choque que va a verificarse en el intervalo ∂t, sino el choque que ya se ha verificado, o bien, como hace el autor inglés, cambiaríamos los signos de U y U'; pero nosotros, como recordarán mis alumnos, le damos a este cambio una significación distinta.

Y entonces sí: la esferilla e' chocará con la e.

Pero observemos que las velocidades C y la C' de la figura 20 ter tienen distinta dirección de las C y C' en la figura 20 bis.

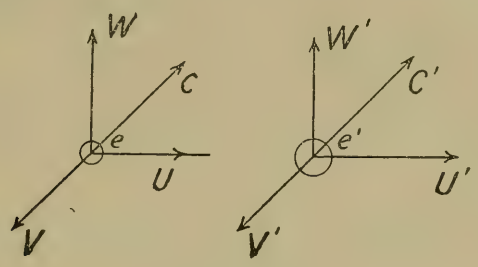


Figura 20 bis

Son, por decirlo así, unas y otras simétricas con relación a los planos paralelos al de la y, z que pasan por e y e', aunque las magnitudes son las mismas.

Ahora podemos repetir, casi palabra por palabra, el razonamiento que empleábamos en el primer ejemplo.

La fórmula

$$K\,\phi\,(c)\,\phi_1\,(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'\,\partial y\,\partial z\,(u-u')\,\partial t \ldots \quad [A]$$

expresa, como sabemos, el número de choques efectivos entre el primer grupo del primer sistema de esferillas y el segundo grupo de esferillas correspondientes al segundo sistema.

El coeficiente numérico K es el coeficiente de reducción; por él tenemos que multiplicar el número total de pares a fin de obtener el número efectivo de choques.

Para simplificar la explicación, en vez de decir: *esferillas*

o *velocidades* del primer grupo del primer sistema, como están representadas dichas velocidades por letras minúsculas sin acento, nos limitaremos a decir: *magnitudes minúsculas sin acento.*

Análogamente, en vez de decir: masas y velocidades del segundo sistema antes del choque, diremos: *magnitudes minúsculas con acento.*

Y para dichas magnitudes después del choque usaremos denominaciones análogas diciendo: *magnitudes mayúsculas o letras mayúsculas, sin acento o con acento*, según se trate del primer sistema de esferillas o del segundo.

Claro es, además, que respecto a las masas, como éstas son invariables, no habrá que distinguirlas antes y después del choque: siempre serán minúsculas, sin acento o con acento, para ambos sistemas.

Y dicho esto sólo con el objeto de evitar las explicaciones, resumamos la demostración ya dada en el primer ejemplo.

Formemos una expresión análoga a la que acabamos de

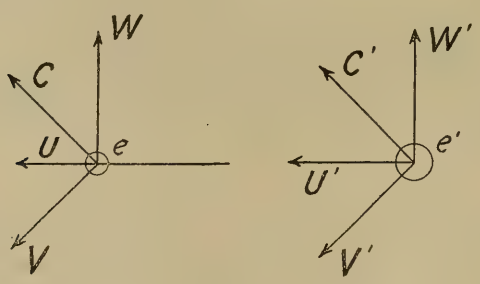


Figura 20 ter

escribir, pero con letras mayúsculas para las velocidades, y será esta:

$$K\,\phi(C)\,\phi_1(C')\,\partial U\,\partial V\,\partial W\,dU'\,\partial V'\,\partial W'\,\partial y\,\partial z\,(U'-U)\,\partial t \ldots \quad (A')$$

Por ser la forma idéntica a la anterior, su interpretación

es bien sencilla: expresará evidentemente el número de choques efectivos entre un grupo del primer sistema cuyas velocidades tengan los límites:

$$L = \left\{ \begin{array}{l} U \ldots U + \partial U \\ V \ldots V + \partial V \\ W \ldots W + \partial W \end{array} \right\}$$

y otro grupo del segundo sistema cuyas velocidades estén comprendidas en los límites

$$L' = \left\{ \begin{array}{l} U' \ldots U' + \partial U' \\ V' \ldots V' + \partial V' \\ W' \ldots W' + \partial W' \end{array} \right\}$$

y en que además los centros de las esferillas de cada par están dentro del paralelepípedo

$$\partial y \, \partial z \, (U' - U) \, \partial t.$$

En cuanto al coeficiente K suponemos que es el mismo que para la primera fórmula; pero sobre este punto ya volveremos más adelante.

Demos un paso más. Observemos que si se les cambia de signo a todas estas velocidades, la fórmula subsiste; luego dicha fórmula expresará el número de choques efectivos de dos grupos de letras mayúsculas en que se ha cambiado el sentido de la velocidad.

En cuanto a las tres dimensiones del paralelepípedo suponemos que son esencialmente positivas, lo cual resulta evidentemente cuando cambiamos el signo de las U, porque, como las fórmulas del choque dan que las velocidades relativas son iguales y de signo contrario, se tiene evidentemente

$$u - u' = -(U' - U),$$

y hemos supuesto, para fijar las ideas, que $u - u'$ es positiva.

Y ahora continuemos la demostración.

Puesto que admitimos que las esferillas tienen todas las velocidades, desde la más pequeña a la mayor, y aun forzando el razonamiento, como si se tratara de cantidades continuas, desde cero a infinito, es claro que en el gas encontraremos dos sistemas de esferillas correspondietes a las letras mayúsculas con el signo cambiado.

Luego existírian en el sistema, en el momento del choque, dos grupos de esferillas de ambos sistemas, correspondientes a las letras mayúsculas con signos negativos, y éstas, evidentemente, chocarían y como esto equivale, según lo hemos explicado minuciosamente, a cambiar los signos de las velocidades y deshacer el choque, obtendríamos los pares de esferillas de las velocidades correspondientes a letras minúsculas.

Y así (A) expresa las velocidades minúsculas perdidas por el primer sistema de choques y que se convierten en mayúsculas (permítasenos este modo de explicarnos). Y en cambio la fórmula (A') expresa el número de velocidades mayúsculas perdidas y que se convierten en minúsculas por efecto de los segundos choques simultáneos con los primeros, pero en otros grupos.

Claro es que la condición necesaria y suficiente para que la distribucion de velocidades no se altere será: que el número de choques que representa (A) que son velocidades minúsculas perdidas, sea igual al número de choques que representa (A') que son velocidades minúsculas ganadas.

Y por fin, la condición necesaria y suficiente para la constancia en la distribución de velocidades será la ecuación

$$K\psi(c)\,\psi_1(c')\,\partial u\,\partial v\,\partial w\,\partial u'\,\partial v'\,\partial w'\,\partial y\,\partial z\,(u-u')\,\partial t =$$
$$= K\psi(C)\,\psi_1(C')\,\partial U\,\partial V\,\partial W\,\partial U'\,\partial V'\,\partial W'\,\partial y\,\partial z\,(U'-U)\,\partial t.$$

En esta ecuación suponemos que la constante K es la misma para ambos miembros, y, en rigor, esta es una hipótesis, hipótesis natural, pero hipótesis al fin, que míster Watson ni siquiera enuncia, empleando, como ya hemos dicho otras veces al aplicar esta fórmula, la palabra *proporcionalidad.*

La identidad de la constante K para ambos miembros se desprende, sin embargo, de la regularidad estadística del movimiento.

Si en los choques de los átomos e con los e' sólo se aprovechan los pares que representa la constante K, en el segundo sistema de choques, que son como choques inversos, parece natural que el coeficiente de reducción sea el mismo, porque en rigor es como si los primeros choques se deshicieran invirtiendo las velocidades, y además, las dimensiones del paralelepípedo son idénticas, e idéntica es la velocidad relativa de la cual depende en el tiempo ∂t el número de choques.

Obtenida ya la ecuación precedente veamos cómo partiendo de ella puede determinarse, según hicimos en el primer ejemplo, la forma de las funciones ψ.

7.° La ecuación anterior puede simplicarse suprimiendo factores comunes de ambos miembros.

Puede suprimirse, en primer lugar, la constante K, porque en la demostración de esta fórmula hemos admitido, como parece natural, dada la permanencia del movimiento, que esta constante es la misma para los choques inversos, por decirlo así, que para los choques directos.

Además, puesto que las componentes de la velocidad de cada esferilla paralelas á los ejes y, z no varían, de las igualdades que establecimos,

$$v = V, w = W, v' = V', w' = W',$$

se deduce inmediatamente

$$\partial v = \partial V, \partial w = \partial W, \partial' v' = \partial V', \partial w' = \partial W',$$

y estos factores también podrán suprimirse en ambos miembros.

Por último, ∂y ∂z son las mismas antes y después del choque, y suprimiendo estos siete factores comunes y además ∂t, la última ecuación se reduce á la siguiente:

$$\phi(c)\,\phi_1(c')\,\partial u\,\partial u'\,(u - u') = \phi(c)\,\phi_1(c')\,\partial U\,\partial U'\,(U' - U).$$

En el primer ejemplo, como en el choque, las esferillas no hacían más que cambiar de velocidades paralelas al eje de las x; las diferenciales de estas velocidades eran las mismas, y podía, por lo tanto, suprimirse

$$\begin{gathered} \partial u.\ \partial u' \\ \partial U.\ \partial U' \\ u - u',\ U - U'; \end{gathered}$$

pero en el ejemplo actual esta supresión no puede efectuarse inmediatamente, porque las componentes paralelas al eje de las x, una y otra, han cambiado de valor.

Esta circunstancia, no obstante, no hace más que retardar un momento la simplificación indicada; porque si nosotros admitimos que pueden aplicarse á las cantidades muy pequeñas que entran en esta ecuación las teorías de las diferenciales propiamente dichas de los problema en que domina el principio de continuidad, la ecuación precedente puede interpretarse en el sentido de que en el primer miembro se ha efectuado un cambio de variables, sustituyendo á las variables u, u' las nuevas variables U, U', con lo cual resulta el segundo miembro.

En suma, vamos á aplicar el principio del cambio de variables, y pueden ver mis alumnos en las conferencias del curso de 1910 á 1911, páginas 136 y siguientes, que este cambio se efectúa introduciendo *la determinante funcional*

de las nuevas variables con relación á las primeras. De suerte que tendremos

$$\partial U \, \partial U' = \partial u \, \partial u' \begin{vmatrix} \dfrac{\partial U}{\partial u'} & \dfrac{\partial U}{\partial u} \\ \dfrac{\partial U'}{\partial u'} & \dfrac{\partial U'}{\partial u} \end{vmatrix},$$

o bien,

$$\partial U \, \partial U' = \partial u \, \partial u' \left(\frac{\partial U}{\partial u'} \frac{\partial U'}{\partial u} - \frac{\partial U}{\partial u} \frac{\partial U'}{\partial u'} \right),$$

Y aquí no hay que advertir, como hacíamos al tratar por primera vez esta cuestión, nada respecto al signo de la determinante, porque tal como la hemos escrito veremos que resulta positivo.

Calculemos, pues, el valor de dicha determinante, recordando los valores que hemos hallado en el estudio del choque, para U y U', que eran los siguientes:

$$U = u - \frac{2 \; m'}{m + m'} (u - u')$$

$$U' = u' + \frac{2m}{m + m'} (u - u')$$

y resultan como valores de los coeficientes diferenciales que entran en la determinante,

$$\frac{\partial U}{\partial u'} = \frac{2m'}{m + m'} \; \frac{\partial u'}{\partial u'} = \frac{2m'}{m + m'}, \; \frac{\partial U'}{\partial u} = \frac{2m}{m + m'},$$

$$\frac{\partial U}{\partial u} = 1 - \frac{2m'}{m + m'} = \frac{m - m'}{m + m'},$$

$$\frac{\partial U'}{\partial u'} = 1 - \frac{2m}{m + m'} = \frac{m' - m}{m + m'},$$

y sustituyendo estos cuatro valores en la determinante tendremos:

$$\frac{4mm'}{(m+m')^2} - \frac{(m-m')(m'-m)}{(m+m')^2} =$$

$$= \frac{4mm' + (m-m')^2}{(m+m')^2} = \frac{(m+m')^2}{(m+m')^2} = 1.$$

Siendo la unidad el valor de dicha determinante, resulta

$$\partial U \partial U' = \partial u \partial u',$$

luego también podremos suprimir estos factores en ambos miembros de la ecuación fundamental, así como $u - u'$ y $U' - U$ que vimos, no hace mucho, que eran iguales, pues ambas expresaban la igualdad numérica de las velocidades relativas.

Efectuando estas supresiones, la condición de donde hemos de deducir ϕ se reduce a la siguiente:

$$\phi(c)\,\phi_1(c') = \phi(C)\,\phi_1(C'),$$

que tiene la misma forma que la que obtuvimos en el primer ejemplo.

Claro es que si $\phi(c)$ es una función de c, también será una función de c^2, porque se puede poner bajo esta forma:

$$\phi(c) = \phi\left(\sqrt{c^2}\right),$$

y conservando la misma notación ϕ (ya que aquí no cabe duda) para expresar otra función $\phi(\sqrt{\ })$ de c^2, y haciendo lo mismo para los otros tres factores, podremos escribir:

$$\phi(c^2)\,\phi_1(c'^2) = \phi(C^2)\,\phi_1(C'^2)$$

Pasemos ahora al *punto siguiente*, es decir, a escribir esta condición bajo forma diferencial y a integrar la ecuación que resulta.

8.° Las c, c', C, C' no son independientes: están enlazadas por la ecuación de las fuerzas vivas, de suerte que

para determinar la forma de ψ debemos tener en cuenta estas dos ecuaciones:

$$\psi(c^2)\,\psi_1(c'^2) = \psi(C')\,\psi_1(C'^2),$$
$$mc^2 + m'c'^2 = mC^2 + m'C'^2.$$

Y hay que determinar la forma de la función desconocida ψ, que en cierto modo, como dijimos, representa la densidad de velocidades, de suerte que la primera ecuación se convierta en una identidad, teniendo en cuenta que c, c', C, C' han de satisfacer a la segunda ecuación.

Pero una ligera duda pudiera ocurrir a mis alumnos, y debe desvanecerse.

¿Por qué se acude a la ecuación de las fuerzas vivas y no a la de las cantidades de movimiento?

¿No daría ésta el mismo resultado?

Sin insistir sobre este punto observaremos, que en la ecuación de las fuerzas vivas entra el cuadrado de la velocidad, cantidad eminentemente positiva y que se verifica para todas las orientaciones por la uniformidad estadística del movimiento, y que la de las cantidades de movimiento se refiere a un eje y tanto al sentido positivo como al negativo.

Son, pues, condiciones de distinta naturaleza.

Y pasemos adelante.

El método que para determinar ψ empleamos será exactamente el mismo, que el que seguimos en el primer ejemplo, aunque suprimiendo algunas notaciones auxiliares.

Las dos ecuaciones de que hemos de partir hemos dicho que son éstas:

$$\psi(c^2)\,\psi_1(c'^2) = \psi(C^2)\,\psi_1(C'^2)$$
$$mc^2 + m'c'^2 = mC^2 + m'C'^2;$$

y fundándonos en ellas hemos de determinar la forma de

cada una de las funciones ψ y ψ_1, de suerte que la función primera quede reducida a una identidad, sean cuales fueren los valores de c, c', C, C', con tal que estas velocidades satisfagan a la segunda ecuación.

En rigor, de estas cuatro cantidades no hay más que tres independientes, y podemos hacer una de dos cosas: o considerar en la primera a una de estas cuatro cantidades como función de las otras tres, que serán las verdaderas variables independiente, porque no hay más que una ecuación que las enlaza, que es la segunda, pues la primera ha de ser una identidad, o bien podemos efectuar en la primera ecuación la eliminación material de una de las cuatro variables, por ejemplo: la C' en función de c, c' y C.

Para simplificar las fórmulas en la escritura emplearemos el primer método, y, por ejemplo, para determinar la forma de ψ, vamos a diferenciar la ecuación primera con relación a c, o para simplificar aún más, con relación a c^2.

Esta diferenciación no es un capricho de cálculo: es un procedimiento lógico.

Puesto que las variables están, por decirlo así, separadas en las dos funciones, ocurre que, por la diferenciación, dos de ellas quedarán invariables: las que contienen c' y C; y que entre la ecuación dada y la diferencial podremos eliminar una de las funciones, con lo cual no quedará más que la otra.

Y si el problema fuera más complicado, aun nos ocurriría diferenciar más veces; pero en nuestro caso basta con una.

Diferenciemos, pues, según hemos dicho, con relación a c^2, considerando invariables c' y C, que pueden considerarse como las otras dos variables independientes, y considerando a C'^2 como una función de c^2 mediante la ecuación segunda.

Diferenciando los dos miembros de la que ha de ser una

identidad y el segundo miembro como una función de función, resultará:

$$\frac{\partial \psi(c^2)}{\partial (c^2)} \psi_1 (c'^2) = \psi (C^2) \frac{\partial \psi_1 (C'^2)}{\partial (C'^2)} \frac{\partial (C'^2)}{\partial (c^2)}.$$

El coeficiente diferencial $\frac{\partial (C'^2)}{\partial (c^2)}$ lo deduciremos, según antes indicamos, de la ecuación

$$mc^2 + m' c'^2 = m C^2 + m' C'^2,$$

y nos dará

$$m\partial(c^2) = m'\partial(C'^2),$$

de donde,

$$\frac{\partial (C'^2)}{\partial (c^2)} = \frac{m}{m'};$$

y sustituyendo este valor en la ecuación diferenciada

$$\frac{\partial \psi (c^2)}{\partial (c^2)} \psi_1 (c'^2) = \psi (C^2) \frac{\partial \psi_1 (C'^2)}{\partial (C^2)} \frac{m}{m'},$$

y dividiendo esta ecuación miembro a miembro por la primitiva

$$\psi (c^2) \psi_1 (c'^2) = \psi (C^2) \psi_1 (C'^2)$$

tendremos:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi (c^2)}{\partial (c^2)}}{\psi (c^2)} = \frac{\dfrac{\partial \psi_1 (C'^2)}{\partial (C^2)}}{\psi_1 (C'^2)} \frac{m}{m'}$$

que puede escribirse bajo una una forma más simétrica, pasando m at primer miembro, con lo cual tenemos:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi (c^2)}{m \partial (c^2)}}{\psi (c^2)} = \frac{\dfrac{\partial \psi_1 (C'^2)}{m' \partial (C'^2)}}{\psi_1 (C'^2)}$$

Como c es independiente de C' en la anterior identidad, dejando esta última invariable tomará el primer miembro diferentes valores para diferentes valores de c y todos serán iguales entre sí, porque serán iguales al segundo miembro, que no ha variado; de suerte que el primer miembro podemos igualarlo a una constante, que será, a la vez, el valor del segundo miembro. Y como respecto al segundo podemos hacer la misma consideración, comparado con el primero, resulta que uno y otro debemos igualarlo a la misma constante.

O de otro modo, como la ecuación precedente ha de ser una *identidad*, sean cuales fueren los valores de c y C', llamando H al valor constante de uno y otro, tendremos estas dos ecuaciones, que serán dos ecuaciones diferenciales ordinarias:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(c^2)}{m\,\partial(c^2)}}{\psi(c^2)} = H, \qquad \frac{\dfrac{\partial \psi_1(C'^2)}{m'\,\partial(C'^2)}}{\psi_1(C'^2)} = H.$$

Ahora bien, para más claridad en los resultados que vamos a obtener, no hay inconveniente en dar a H la forma $-\frac{1}{2}h$, y fijándonos por el pronto en la primera de las dos ecuaciones, tendremos:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(c^2)}{m\partial(c^2)}}{\psi(c^2)} = -\frac{1}{2}h.$$

Integrando, sin olvidar que la variable de la diferenciación es c^2, que hubiéramos podido representar por una sola letra, como hicimos en el primer ejemplo y no lo hemos hecho así por evitar nuevas notaciones, se obtiene

$$\frac{\partial \psi(c^2)}{\psi(c^2)} = -\frac{1}{2}hm\partial(c^2);$$

e integrando y dando a la constante de la integración la forma de un logaritmo, como siempre podemos hacer, resultará:

$$\log [\psi(c^2)] = -\frac{1}{2} hmc^2 + \log A$$

o bien,

$$\log [\psi(c^2)] - \log A = -\frac{1}{2} hmc^2,$$

que equivale a

$$\log \frac{\psi(c^2)}{A} = -\frac{1}{2} hmc^2.$$

Pasando de los logaritmos a las exponenciales,

$$\frac{\psi(c^2)}{A} = e^{-h\frac{mc^2}{2}},$$

de donde obtendremos for fin la forma de la función ψ, que será

$$\psi(c^2) = Ae^{-h\frac{mc^2}{2}}.$$

Podemos repetir un cálculo semejante para la segunda ecuación

$$\frac{\frac{\partial\psi_1(C'^2)}{m'\partial(C'^2)}}{\psi_1(C'^2)} = H = -\frac{1}{2} h,$$

y obtendríamos un resultado análogo al precedente.

Y, como por otra parte, lo que buscamos es la forma de la función ψ_1, que corresponde al segundo grupo de esferillas e', lo mismo da que bajo el signo función entre C' que c'. Así hallaremos:

$$\psi_1(c'^2) = A'e^{-h\frac{m'c'^2}{2}}$$

siendo A' la nueva constante.

La forma ψ corresponde á las esferillas e del primer sistema para que se conserve el equilibrio estadístico por la permanencia del movimiento.

La forma ψ_1 corresponde, asimismo, á las esferillas e' del segundo sistema.

Todo lo demás sería repetir los cálculos diferenciando con relación á C'^2.

Asimismo es fácil comprobar que las formas obtenidas para ψ y ψ_1 convierten la ecuación de condición

$$\psi(c^2)\,\psi_1(c'^2) = \psi(C^2)\,\psi_1(C'^2)$$

en una identidad.

No hay más que sustituir en esta condición las expresiones que hemos obtenido para ψ y ψ_1, y resultará:

$$A e^{-h\frac{mc^2}{2}} \times A' e^{-h\frac{m'c'^2}{2}} = A e^{-h\frac{mC^2}{2}} \times A' e^{-h\frac{m'C'^2}{2}},$$

ó bien,

$$e^{-\frac{h}{2}(mc^2+m'c'^2)} = e^{-\frac{h}{2}(mC^2+m'C'^2)},$$

que es, en efecto, una identidad puesto que la constancia de las fuerzas vivas, antes y después del choque, nos manifiesta que se tiene, como antes vimos,

$$mc^2 + m'c'^2 = mC^2 + m'C'^2.$$

En rigor sólo hemos probado que el choque de las esferillas e del primer sistema con las esferillas e' del segundo no alteran el estado del movimiento interno del flúido.

Pero estas mismas fórmulas nos demuestran, que tampoco se alteraría dicho estado del sistema, si chocasen entre sí las esferillas e del primer sistema con otras esferillas del mismo.

Porque vimos en el primer ejemplo que la fórmula de ψ

necesaria y suficiente para la permanencia de dicho estado de movimiento era

$$\psi(c^2) = Ae^{-hc^2}$$

y esta es la misma forma

$$\psi = Ae^{-h\frac{mc^2}{2}},$$

No hay más diferencia que la constante h del primer ejemplo es en este caso $-h\frac{m}{2}$; pero el valor de la constante que multiplica a c^2 importa poco para que la condición obtenida entre las densidades de velocidades se convierta en identidad.

Lo único que prueba esta diferencia es que la constante h del primer ejemplo está sustituída por $-h\frac{m}{2}$.

Es decir, que esta h no tiene la misma significación en el último ejemplo que en el primero.

En suma, puesto que lo dicho para las esferillas e podemos repetirlo para las esferillas e', es lógico afirmar, que las formas obtenidas para ψ y ψ_1, a saber,

$$\psi(c^2) = Ae^{-h\frac{mc^2}{2}},\ \psi_1(c'^2) = A'e^{-h\frac{mc'^2}{2}},$$

en que c y c' representan cualesquiera de las velocidades que adquieren las esferillas e y e', aseguran la permanencia en el estado del movimiento del flúido y demuestran que dicho estado no se perturba por los choques, ya se verifiquen éstos:

1.° Entre las esferillas e del primer sistema;
2.° Entre las esferillas e' del segundo sistema;
3.° Entre las esferillas e y e' de ambos sistemas.

O sea, en todos los choques que pueden verificarse.

Claro es, por último, que estas fórmulas pueden genera-

lizarse para un número cualquiera de sistemas, que es como si dijéramos para un número cualquiera de gases mezclados entre sí, que nosotros los representaremos por esferillas e homogéneas de masa m y de igual volumen:

Por esferillas e' homogéneas de masa m' y de igual volumen entre sí;

Por esferillas e'' homogéneas de masa m'' y de igual volumen; y así sucesivamente.

Con tal que las funciones ψ, ψ_1, ψ_2 ... que representan lo que hemos llamado densidad de velocidades estén definidas por las fórmulas

$$\psi(c^2) = A e^{-h\frac{mc^2}{2}}, \psi_1(c'^2) = A' e^{-h\frac{m'c'^2}{2}}, \psi_2(c''^2) = \\ = A'' e^{-h\frac{m''c''^2}{2}} \ldots$$

el sistema completo tendrá un estado permanente de movimiento y las velocidades en cada sistema estarán distribuídas de la misma manera.

O, de otro modo, en cada sistema serán distintas; pero la ley de variación será la ley exponencial que indican las fórmulas, y el número de cada clase de velocidades que, como sabemos, depende de dicha exponencial no se alterará en ningún momento.

De todos los puntos que comprendía el problema no nos queda por exponer más que el último, es decir, el noveno, y este será el objeto de la conferencia inmediata.

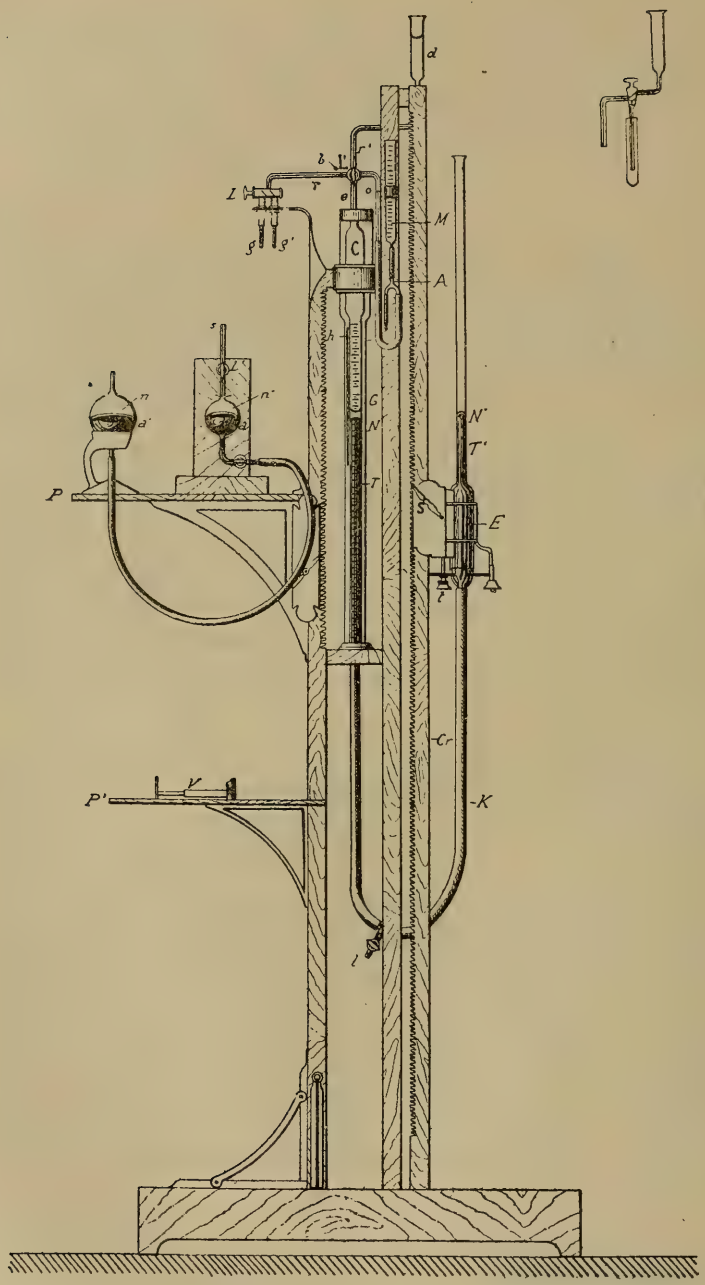
XVI.—Aparato de medición para análisis de gases.

POR ENRIQUE HAUSER

El aparato que vamos a describir, destinado a efectuar las medidas necesarias en el análisis de los gases operando a presión constante, sólo tiene modificaciones de detalle sobre los ya conocidos, con las ventajas, sín embargo, aparte de su fácil manejo, de permitir operar con un volumen de gas relativamente grande (unos 150 cm.^{3}), de carecer en absoluto de espacio perjudicial y de estar el gas que se trata de analizar constantemente saturado de vapor de agua; condiciones que, reunidas, permiten alcanzar una gran exactitud en los análisis, razón por la cual me he decidido a publicar la descripción de este aparato, a pesar de que, como he dicho, las novedades que le caracterizan sólo son de detalle.

Descripción del aparato.—Consta éste, como en los aparatos Hempel, de una bureta de vidrio *C*, destinada a contener el gas que se va a medir, la cual se prolonga por su parte inferior en un tubo *T* de 1 cm.^{2} de sección, dividido de 0 a 100 en cm.^{3} y décimas de cc.; el volumen de la bureta, cuidadosamente contrastado, resulta contener de 0 a 150 cc. un volumen real de 150,12 cc. (1). Dicho tubo está conectado, por su parte inferior, por medio de un grueso tubo de caucho desulfurado *K*, con otro paralelo a él *T'*, provisto de un ensanchamiento *E;* el tubo *T'* puede mantenerse más ó menos alto mediante la cremallera *Cr* y el estribo *S*. Un tornillo *t* permite hacer con lentitud pequeños

(1) Pudiera sustituirse esta bureta por otra más apropiada á un estudio determinado.


d
b
r'
r
e
o
L
g
g'
C
M
A
h
G
N'
T
s
n
n'
a'
a
P
N'
T'
S
E
t
Cr
K
P'
V
l

cambios de altura de dicho tubo. El tubo *K* de conexión, así como parte de los *T* y *T'*, están llenos de mercurio, cuyo nivel puede verse en éstos en *N* y *N'*. El menisco cóncavo que se ve por encima del convexo que marca el nivel del mercurio en *N*, indica el de un poco de agua que hay que dejar sobre el mercurio en el tubo *T*. La presencia de esta agua en ligero exceso evita las dificultades de lectura y de apreciación de volumen sobre el mercurio húmedo, la existencia de pequeñas burbujas de aire u otro gas entre el mercurio y las paredes de la bureta, y, por último, la exticción o fricción eléctrica entre ambos, si el mercurio estuviera seco.

Una llave *l* colocada en el tubo *K* permite vaciar el mercurio del aparato en caso necesario.

La bureta de vidrio *C* se prolonga por su parte superior en un tubo casi capilar *e* (de unos dos milímetros de diámetro interior), que se trifurca, yendo una de sus ramificaciones *r* a la llave de dos vías *L*, que comunica, según los casos, con *g* o con *g'*, por donde penetra, en el aparato, el gas que se trata de medir para el análisis; la otra ramificación *r'* va a parar a un pequeño depósito de agua *d*, o indistíntamente a una vasija de desagüe, mediante una llave de dos vías, lo que claramente pone de manifiesto la figura de la derecha; por último, la otra ramificación, o sea el tubo *o*, va a parar al aparato manométrico *A*, de que ahora hablaremos. La llave *L'*, que es de dos vías en ángulo recto, permíte poner en comunicación, en un momento dado solamente, dos de los tubos que allí afluyen. El aparato *A* es sencillamente un manómetro de agua tipo Schöndorff, destinado a dar al gas que se mide en la bureta una sobrepresión o depresión equivalente a sus variaciones de volumen por las de temperatura y presión.

La bureta *C* y su prolongación *T* están rodeadas de una envolvente *G* para colocar agua entre ambos, cuya temperatura se mide con el termómetro *h;* finalmente, todas las partes del aparato se mantienen en la posición que les co-

rresponde mediante una armazón de madera y los tirantes necesarios, no representados en la figura.

Las lecturas en la bureta se hacen, apreciando a vista la décima de división, o sea la décima de milímetro lineal, es decir, la centésima de cc., mediante un visor portátil formado por dos tubos concéntricos de sección elíptica, que deslizan uno dentro del otro, y de los cuales uno lleva el verdadero visor formado por una placa metálica perforada y el otro una placa semicilíndrica, que puede adaptarse a la envolvente de la bureta y en la que va señalado el nivel correspondiente al orificio del visor. Sobre la palomilla *P'* del aparato va representado el visor *V*, que se supone colocado allí de momento.

El aparato que se ve a la izquierda del dibujo, sobre la palomilla móvil *P*, es la pipeta Hempel-Pfeiffer, que sirve para contener el gas que se va á medir.

Práctica de la operación.—La operación se comienza poniendo la llave *L'* de modo que haga comunicar a *C* con *M* y elevando éste hasta que el agua contenida en *M* llegue a penetrar en el orificio de la llave *L'*, expulsando así todo el aire del espacio perjudicial, operación que sólo es necesaria para los análisis más exactos. Para conseguir esto más fácilmente, se oprime entre los dedos el tubo de goma del manómetro por debajo del tubo índice y se aplasta hasta que el agua llegue, como hemos dicho, al orificio de la llave *L'*. Hecho esto, se da a esta llave un giro de 90° para que haga comunicar *e* con *r*, y en seguida se eleva el tubo *T'*, lo cual hace que el nivel del mercurio vaya elevándose en *N* y expulsando el aire de la bureta *C*. Haciendo esto hasta que la expulsión sea completa, es decir, hasta que el mercurio llegue a la llave *L'*. Conseguido el objeto, se hace que la llave *L* obstruya la comunicación y se hace girar *L'* otros 90° para que haga comunicar *r* con *r'*; en seguida se abre otra vez *L* y entonces el agua o el mercurio del depósito *d* desciende por su peso y llena completamente el tubo *r*, y

mediante la comunicación conveniente los g y g', cerrando otra vez la llave L cuando se ha conseguido esto. También puede llenarse el tubo r colocando un tubo de ensayo corto o un vasito con agua o mercurio bajo los tubos g y g' y aspirando por descenso del tubo T' después de haber hecho salir el aire del aparato a través de ellos. Por cualquiera de estos medios se consigue que no haya en todo el aparato algún espacio que encierre aire. Procede, pues, ahora introducir el gas que se va á medir, que, como hemos dicho, está contenido en la bola a de la pipeta Hempel-Pfeiffer dibujada a la izquierda.

Para ello se conecta al tubo de salida del gas s un tubo de goma y se llena éste de agua o mercurio mediante una pipeta afilada. El extremo libre del tubo de goma se conecta con g, y puesta la llave L' de modo que haga comunicarse r con e se pone la llave L de modo que comunique g con r. Se abre entonces la llave L'' de la pipeta, procurando al hacer esto que haya una sobrepresión en n' que obligue al gas a pasar a la bureta, y elevando convenientemente a' y descendiendo T' se consigue introducir en el aparato todo el gas contenido en la pipeta, haciendo llegar el mercurio húmedo de ésta hasta la marca b junto a L', cero de la graduación. Claro está que encima del mercurio en N quedará toda el agua contenida en r y g, que es la medida de la que generalmente se deja sobre el mercurio. Cuando no se quiere introducir en el aparato todo el gas de la pipeta, o se la trasvasa de un recipiente en que haya mucha mayor cantidad de la que se quiere medir, se opera una vez que N y N' ocupan aproximadamente la posición indicada en la figura, cerrando L, desconectando en g, introduciendo g' en un vasito con agua o mercurio, y después de hacer que el nivel N esté ligeramente más alto que el N', haciendo comunicar g' con r.

Si la diferencia de nivel es la conveniente y se mueve cuidadosamente el vasito, se consigue que el líquido de éste llegue en r a la señal de entrada b, y entonces se cierra otra

vez la llave *L*. El empleo, en este caso, de agua en vez de mercurio no tiene gran importancia, pues si después de hacer la lectura con las precauciones que vamos a indicar se pone el tubo *g* en comunicación con la pipeta Hempel llena de mercurio y se da un poco de presión a éste de manera que el agua contenida en *r* llegue a asomar por el orificio interior de la llave *L'* y en este momento se gira ésta de 90° de manera que *r* comunique con *d*, será expulsada hacia éste toda el agua que llenaba el tubo *r*, a excepción de algunas centésimas de cc., y si cuando asoma el mercurio por el orificio superior de la llave de ángulo L' giramos nuevamente hacia abajo de 90° esta llave y abrimos la *L*, quedará la bureta en comunicación con la pipeta Hempel sin haber añadido más que una pequeñísima cantidad de agua.

Sea como fuere, que cerremos la columna de gas con agua o con mercurio, el ajuste del volumen del gas al cero del aparato una vez hecho, se da un poco de presión a *N'* sobre *N* y se gira la llave *L'* para poner en comunicación el gas con el manómetro a fin de leer el volumen de aquél a una presión y temperatura determinadas.

El manómetro, que se maneja subiendo o bajando el tubo *M*, va lleno de agua hasta próximamente la mitad de su volumen, y se coloca de modo que el cero de su escala grabada en el mismo, coincida con el borde de la anilla que le sujeta al soporte, y por la cual desliza, moviendo entonces el tubo *T'* de manera que el agua en el tubo casi capilar del manómetro enrase en la señal *o*, haciéndose entonces la lectura del volumen en el tubo *T* conforme ya indicamos. En el aparato que utilizo, al número leído hay que añadir 0,12 cc. como corrección debida al volumen de gas que hay entre *b* y *L'* por su parte interior, y 0,33 cc. por el gas que hay entre *L'* por su parte exterior y el nivel de señal del manómetro en 0.

Una vez medido el gas, procede extraerlo del aparato de medición para llevarle al de explosión, en el cual también hago la absorción, lo cual se verifica del modo que hemos

descrito al principio para poder extraer el aire del aparato, sin más que hacer el trasvase con toda precaución.

Verificada la explosión o absorción, vuelve a introducirse el gas en el aparato de la manera indicada. El termómetro *h* marcará ahora una temperatura distinta que antes, de la que se toma nota, deduciendo su diferencia con la anterior, haciendo también la lectura de la presión atmosférica en el barómetro y anotando la variación correspondiente. En relación con estas variaciones de presión y temperatura habrá que dar al gas una sobrecarga equivalente. Esto se consigue elevando el tubo *M*, que está dividido en centímetros y en milímetros, una altura equivalente en milímetros de agua a la sobrecarga que haya que dar (1).

Si una vez hecha esta lectura se comprende que después de la absorción siguiente no va a alcanzar el gas un volumen suficiente para quedar dentro de la parte graduada de la bureta *C*, y, por tanto, que no sería posible hacer la lectura de su volumen, se mezcla al gas antes de hacer dicha absorción un volumen de aire que se determinará por diferencia, midiéndolo después en la misma bureta.

Por último, diremos que cuando en la explosión se produce adhidrido carbónico hay que conocer exactamente el volumen del agua que hay encima del mercurio en *N* para deducir el de CO_2 en ella disuelto (2). Se consigue esto fácilmente tomando la diferencia de las lecturas entre los dos meniscos, el de agua y el del mercurio, al que se añade el volumen ocupado por dichos meniscos.

Resultados obtenidos.—Para que pueda juzgarse de la exactitud alcanzada con este aparato, voy a exponer a con-

(1) Los fundamentos de este manómetro de corrección los he descrito en mi segunda Conferencia experimental: «El Grisú en las minas de carbón», 1908, pág. 53, y su aplicación en otra forma a mi grisúmetro, en los Anales de la Sociedad Española de Física y Química.—1914, Febrero, pág. 160-61.

(2) Esta agua hay que agitarla en la pipeta, con el gas resultante de la explosión, para que el cálculo del CO_2 disuelto resulte exacto.

tinuación algunos de los resultados obtenidos en varios casos, completando con dichos ejemplos la descripción que acabo de hacer de su manejo.

Primer caso. No se produce ácido carbónico en la explosión; mezcla oxhídrica.

De este caso puedo presentar resultados de mezclas conteniendo cerca de 20 por 100 de $H_2 + O$, y operando dos veces con la misma muestra para no atribuir al aparato los errores de preparación de ésta.

	Volumen.	Temperatura.	Presión.	OBSERVACIONES
	c c.	°c.	mm.	Las lecturas indicadas después de la explosión representan el volumen reducido a la temperatura y presión primitivas, mediante el manómetro Schondorff a que se hace referencia en la descripción.
Antes de la explosión.....	142,00	10°15	705,1	
Después de la explosión.....	114,44	10°55	705,0	
Contracción..	27,56	+ 0°40	— 0,1	

Al volumen de gas medido hay que añadir, para hallar la ley de la mezcla, el volumen del espacio comprendido entre el nivel de agua del manómetro y el orificio exterior de la llave de ángulo (0,33 cc. en nuestro caso), más el volumen de la bureta en exceso sobre la medida indicada, etc. (0,12 centímetros en nuestro caso), ó sea 0,45 cc. en total.

$$\text{Ley centesimal de la mezcla} = \frac{27,56}{142 + 0,45} = 19,33 \text{ por } 100.$$

Repetición de ensayo.

	Volumen. c. c.	Temperatura. °c.	Presión. mm.
Antes de la explosión. ...	140,93	11°05	704,60
Después de la explosión...	113,61	11°25	704,40
Contracción.....	27,32	+ 0°20	— 0,20

$$\text{Ley centesimal de la mezcla} = \frac{27,32}{141,38} = 19,33 \text{ por } 100.$$

Puedo citar los siguientes resultados obtenidos dos á dos con la misma muestra cada par:

19,38 — 19,40; 19,48 — 19,48; 19,50 — 19,50;
19,63 — 19,63.

Segundo caso. Mezclas cuya combustión produce anhidrido carbónico. Gas natural muy rico en metano.

Presentaré como antes varios resultados, operando dos veces con una misma mezcla. A continuación el detalle de las operaciones en un caso:

	Volumen.	Temperatura.	Presión.	OBSERVACIONES
	c. c.	°c.	mm.	Se desprecia en estos ensayos la difusión de la mezcla gaseosa en el volumen de aire que queda en el espacio capilar del manómetro.
ntes de la explosión.....	144,28	23°35	708,5	
Después de la explosión.....	121,69	23°50	708,5	
Contracción medida.....	22,59	+ 0°15	0,0	
CO_2 disuelto.....	0,07			
ontracción real.	22,52			
Metano.....	11,26			

Cálculo del volumen de agua existente sobre el mercurio.

Lectura al nivel del mercurio.....	144,95
Lectura al nivel del agua	144,28
	0,67
Volumen de los dos meniscos.....	0,15
TOTAL c.c.....	0,82

Cálculo del ácido carbónico disuelto en este volumen de agua = x.

En el caso del metano, $CO_2 = \frac{\text{Contracción} + x}{2}$; pero como x es muy pequeño, podremos admitir sin dificultad para el cálculo de la presión parcial que

$$CO_2 = \frac{\text{Contracción medida}}{2} = 11{,}295.$$

$$\text{Presión parcial del } CO_2 = \frac{11{,}295}{121{,}69 + 0{,}12} = 0{,}095.$$

Solubilidad del CO_2 en el agua a 23°50 (volumen estimado a 0°) = 0,81.

Relación del volumen de ácido carbónico a 23°50 con relación al del mismo gas a 0° = 1,085.

Volumen del gas disuelto =

$$= 0{,}82 \times 0{,}095 \times 1{,}085 \times 0{,}81 = 0{,}069.$$

Relación de la contracción al volumen de la mezcla = = 22,52: (144,28 + 0,12) = 15,59 por 100.

Repetición del ensayo.

	Volumen. c. c.	Temperatura. °c.	Presión. m m.
Antes de la explosión.....	144,10	23°75	708,5
Después de la explosión....	121,52	23°90	708,5
Contracción medida.	22,58	+ 0°15	0,0
CO_2 disuelto.....	0,07		
Contracción real....	22,51		
Metano.....	11,255		

Volumen de agua existente sobre el mercurio:

Nivel del mercurio.....	144,80
Nivel del agua.....	144,10
	0,70
Volumen de los dos meniscos.....	0,15
TOTAL c. c.....	0,85

Volumen de anhidrido carbónico disuelto en este agua:

$$\text{Presión parcial del } CO_2 = \frac{11,26}{121,64} = 0,0925.$$

Solubilidad del CO_2 en el agua a 23°90 (volumen estimado a 0°) = 0,79.

Relación del volumen del CO_2 de 23°90 a 0° = 1,087.

Volumen del CO_2 disuelto:

$$= 0,85 \times 0,0925 \times 0,79 \times 1,087 = 0,067.$$

Relación de la contracción al volumen de la mezcla:

$$= \frac{22,51}{144,22} = 15,59 \text{ por } 100.$$

***

Otros resultados puedo consignar para los valores de las contracciones relativas deducidas después de haber hecho el descuento correspondiente al CO_2 disuelto en el agua que cubre al mercurio, y que son los que siguen, para mezclas de distinta ley:

15,81 — 15,75; 13,70 — 13,76; 17,70 — 17,73.

Si en el gas examinado no conociésemos desde luego el volumen del anhidrido carbónico correspondiente a la contracción, el cálculo del CO_2 disuelto se haría, después de

conocer el volumen total de éste, mediante su absorción por la potasa, al que se añadiría luego un volumen igual al que se reste a la contracción.

Tercer caso.—La contracción es tan grande que hay temor de que, después de la absorción del CO_2, el volumen de gas que quede en la bureta sea inferior a 100 cc., y, por tanto, resulte imposible hacer su lectura por quedar fuera de la graduación; este caso puede también presentarse cuando, después de haber medido el CO_2, queramos conocer el volumen de oxígeno sobrante de la combustión para deducir el consumido en la misma.

En estos casos es necesario añadir al residuo gaseoso, antes de hacer dichas medidas, un volumen de aire próximamente conocido, contenido en una bureta con llave en la parte superior, la que se conecta debidamente a una de las entradas *g* o *g'* de la llave *L*, y el que se hace pasar al aparato de medición.

Para comprender bien este caso, pongo a continuación un ejemplo, en el que suprimo las indicaciones de temperatura y presión para mayor claridad:

	Volumen	Diferencias
Aire oxigenado..... ..c. c.	123,83	
Después de añadir el gas combustible... ...	148,28	
Gas añadido.....		24,45
Después de la explosión.....	109,28	
Contracción bruta.....		39,00
Después de añadir aire...	127,95	
Aire añadido.....		18,67
Después de la potasa....	110,47	
CO_2 absorbido.....		17,48

Cálculo del CO_2 *disuelto:*

Agua existente sobre el mercurio = 2,07 cc.

Presión parcial del CO_2 = 17,48 : 109,40 (*) = 0,16.

(*) 109,40 = 109,28 + 0,12.

Solubilidad del CO_2 a 14° C. = 1,05.
Relación de los volúmenes a 14° y a 0° = 1,051.
CO_2 disuelto = 2,07 × 0,16 × 1,05 × 1,051 = 0,366.

Volumen del CO_2 resultante de la explosión = 17,48 + 0,366 = 17,846
Contracción real ídem ídem = 39,00 – 0,366 = 38,634

Aún podríamos hacer una pequeña modificación, aunque de poca importancia, en el cálculo del anhidrido carbónico en este tercer caso; es decir, cuando antes de hacer su absorción hemos introducido un cierto volumen de aire. En efecto, por esta operación la presión parcial del anhidrido carbónico disminuye, y un poco de CO_2 disuelto después de la explosión se desprende al añadir aire, siendo entonces absorbido por la potasa.

El cálculo sería el siguiente:

$$\text{Presión parcial} = \frac{17{,}46\ (CO_2 \text{ medido})}{127{,}95 + 0{,}12} = \frac{17{,}48}{128{,}07} = 0{,}137$$

y, en consecuencia, el CO_2 disuelto sería igual

$$2{,}07 \times 1{,}05 \times 1{,}051 \times 0{,}137 = 0{,}314;$$

y el volumen del anhidrido carbónico sería entonces

$$17{,}48 + 0{,}314 = 17{,}794,$$

inferior en 0,052 cc. al calculado antes (1).

---

(1) En realidad, en los cinco minutos que dura una lectura no hay tiempo para que se mezcle, por difusión, al gas de la bureta, el aire añadido ni a que se desprenda en total esa pequeña cantidad de CO_2 disuelto para restablecer el equilibrio de su presión parcial, de modo que la *variación* del CO_2 disuelto se reduce probablemente a la mitad de lo calculado, es decir, a un valor prácticamente despreciable.

En cambio, la cantidad de ácido carbónico existente en el gas después de la explosión y antes de introducir el aire, sería algo menor que la absorbida por la potasa en la cantidad que se ha desprendido luego, y el volumen del CO_2 sería en ese instante

$$17{,}48 - (0{,}366 - 0{,}314) = 17{,}48 - 0{,}052 = 17{,}428.$$

Pero esta diferencia tendría muy poca influencia en la presión parcial correspondiente, que sería entonces

$$17{,}428 : 109{,}40 = 0{,}159$$

en vez de 0,1595 hallado antes, por lo cual no se alteraría sensiblemente el valor que se dedujo para la contracción por el primer cálculo, como dijimos antes.

Con estas explicaciones creo haber indicado claramente el manejo del nuevo aparato y el modo de utilizar sus ventajas.

(Laboratorio de Investigaciones Científicas de la Escuela de Minas de Madrid.)

XVII. — Consideraciones sobre la clasificación mineralógica.

Por Lucas Fernández Navarro

SUMARIO: Importancia de la clasificación.—La especie en Mineralogía y los grupos de la clasificación mineralógica.—Principales clasificaciones antiguas.—Leymerie.—Fundamentos de las clasificaciones modernas y ejemplos de las mismas.—La clasificación genética.—Estado actual de la sistemática mineralógica.

Fueron casi siempre nuestros libros de Mineralogía reflejos de obras extranjeras, sobre todo francesas; ahí están el Dufrenoy y el Leymerie, inspiradores de todos los Manuales y Tratados que se publicaron en el cuarto final del pasado siglo. En los últimos veinticinco años se ha dejado sentir bastante el influjo de obras de lengua alemana (Tschermack, Naumann-Zirkel, Groth), y aun norteamericanas (el clásico Dana); pero todavía es francés un libro de gran influencia en los tratadistas españoles, el *Cours de Minéralogie*, de Lapparent. *Los Minerales de España*, del profesor Calderón, indican recientemente una plausible tendencia a ir haciendo Mineralogía española, que, en verdad, no carece de tradición, como acaso demostraremos algún día.

Si ahora recordamos estos hechos, es para explicar el criterio que en cuanto a la importancia de la clasificación mineralógica parece haber predominado entre los naturalistas españoles. En efecto, a una preocupación excesiva de *las clasificaciones* que atiborraba de cuadros sinópticos hasta a los estudiantes del Instituto, ha seguido un desprecio tal de *la clasificación,* que aun en los cursos superiores de la Universidad es costumbre muy generalizada la de limitarse a exponer una clave, la del sistema adoptado, sin desarrollar sus fundamentos ni exponer las razones por que se adopta. Es sencillamente, que si a fines del siglo pasado se imitaban los

libros clásicos franceses (no siempre los mejores), hoy se reflejan los tratados puramente descriptivos alemanes. Como siempre, la razón está en un criterio ecléctico, en un término medio, así como en un concepto claro de lo que la clasificación puede significar en cada caso.

Para el mineralogista práctico, como para el principiante en estos estudios, la clasificación no es sino un medio de poder encontrar un mineral por caminos rápidos y sencillos, de reconocerle cuando la naturaleza se le ofrezca. Así considerada, la mejor clasificación es un sistema sencillo, fácil de aplicar, que ni siquiera necesita comprender en su clave a todos los minerales, sino a los más frecuentes o a los que interesan especialmente a un grupo de técnicos. En este caso huelga estudiar los fundamentos de la sistemática, ni buscar lo más moderno o lo más perfecto, científicamente considerado. Nosotros mismos propusimos hace ya bastantes años un cuadro de clasificación de esta índole, especialmente aplicable para el caso de los alumnos que estudian la Historia Natural en los Institutos de segunda enseñanza (1).

Pero si la clasificación ha de expresar, como en las demás ramas de la Historia Natural, las relaciones naturales entre los seres clasificados; si ha de pasar de «sistema» a «método», según las expresiones consagradas, entonces lo que era un medio debe ser un fin, puesto que todo el estudio de los minerales, desde el punto de vista puramente científico, tiende a poner en claro, no sus propiedades escuetas, ni las aplicaciones que de ellas derivan, sino la evolución del reino inorgánico, la *vida* de los minerales, que también la tienen, aunque por la lentitud de su proceso y por la extensión de sus fenómenos sea difícil de reducir a términos concretos.

---

(1) L. Fernández Navarro: *Notas sobre la clasificación mineralógica.* Actas de la Sociedad Española de Historia Natural. Madrid, 1897.

Considerada de este modo la clasificación, adquiere para el mineralogista una importancia capital, puesto que la más perfecta que en un momento dado sea posible representará el estado de la Mineralogía en aquel momento. Por eso la historia de las clasificaciones es la historia del progreso en cualquiera rama de los conocimientos histórico-naturales, y en la clasificación, mejor que en ningún otro concepto, se reflejan las fases porque su desarrollo fué pasando.

Así veremos que los primeros naturalistas, que en absoluto carecen de ideas acerca de la complejidad de los minerales, los dividen tan sólo por sus propiedades externas, y aun así consiguen formar grandes grupos no exentos de naturalidad. Aristóteles (trescientos años antes de Jesucristo), distingue los *fósiles* que son divisibles por el martillo de los *metálicos* o maleables; esto no es sino esbozar las clases de los minerales pétreos y de los metálicos, que, más o menos subdivididas, llegan hasta nosotros en algunas de las clasificaciones que más tarde señalaremos. Aún fué más adelante en esta vía su discípulo Teofrasto, distinguiendo entre los fósiles (1) las *tierras* y las *piedras*, como había de hacer algún naturalista veinte siglos después.

Cuando perdida la buena tradición de observar la Naturaleza se quiere teorizar sin base para ello, se viene a parar en las clasificaciones estrambóticas o disparatadas que inicia Dioscórides (setenta y cinco años antes de Jesucristo), con su división de los minerales en marinos y terrestres. Así prosigue la Mineralogía durante el largo eclipse que para las Ciencias naturales representa la Edad Media; y cuando ya bien entrada la Moderna se inicia su renacimiento, las clasificaciones reflejan generalmente puntos de vista puramente personales, como en el sistema físico de Mohs, o la

---

(1) La palabra *fósil*, que hoy tiene una significación restringida, fué durante la Edad Antigua y gran parte de la Media, sinónima de lo que hoy llamamos *mineral*.

preocupación de los conocimientos dominantes, como en los sistemas químicos de Berzelius o Beudant. Los métodos eclécticos, genialmente vislumbrados en plena Edad Media por el cordobés Avicena, vuelven modernamente a estar en auge, si bien predomina en ellos el carácter químico, por ser el que a más precisas y justificadas conclusiones puede llevarnos en la actualidad.

Concretando nuestra opinión, en virtud de lo que llevamos expuesto, creemos que para el mineralogista científico, como para el botánico o el zoólogo, el estudio de las clasificaciones debe ser objeto de mucha atención, si quiere profundizar en el conocimiento de su ciencia. Claro que para el que mira ésta desde un punto de vista muy elemental o puramente técnico, la teoría de la clasificación tiene un valor muy relativo y no habrá de tomar de ella sino lo indispensable para sus fines. Pero en las Universidades, por ejemplo, donde con un objeto exclusivamente científico y ajeno a toda preocupación tecnicista se prepara a los futuros maestros e investigadores, la sistemática de ésta, como de las demás ramas de la Historia Natural, merece que se la dedique alguna atención.

Hechas a manera de preámbulo las consideraciones que anteceden, en las páginas siguientes intentaremos exponer con un criterio, a la vez histórico y analítico, el estado actual de la cuestión.

*
* *

Al estudiar la clasificación mineralógica y compararla, como involuntariamente se hace siempre, con las botánicas y zoológicas, échase de ver en seguida su atraso y lo poco que en su perfeccionamiento puede conseguirse. Apenas existen unos cuantos pequeños grupos naturales por todos reconocidos, que después no hay modo de distribuír en di-

visiones de categoría superior. La causa de semejante estado radica en el hecho de que el grupo fundamental de toda clasificación, la especie, es muy difícil de precisar en Mineralogía, como vamos a ver.

El concepto de especie es una abstracción deducida del conocimiento del individuo. Pero faltando aquí el criterio de la filiación directa que en las ramas biológicas de la Historia Natural sirve para caracterizar a los individuos de cada especie, el concepto de individualidad ha de ser buscado por otros medios. Han pretendido algunos que el individuo inorgánico sea el cristal; pero este criterio no resiste al más ligero análisis, puesto que la individualidad subsiste en el mineral no cristalizado (aunque sí cristalino), y en el fragmento de cristal, lo que hasta en el sentido etimológico está reñido con el concepto de individualidad. Esta no se pierde por acciones mecánicas, ni aun físicas, y sólo es destruída al destruirse el edificio atómico elemental, es decir, la molécula, definida en la moderna teoría atómica por un poliedro geométrico de forma, dimensiones, orientación y número de átomos constante. Llegamos, pues, a la conclusión de que el individuo será la molécula química, y como a ésta no la conocemos aislada, no sabemos en realidad los caracteres que la determinan o individualizan, que serán las constantes características de la especie. Sabemos, sí, que todo lo que no esté en el poliedro molecular es extraño a la especie, y que los caracteres específicos serán los que resulten de la composición y forma del mencionado poliedro molecular.

El individuo orgánico, con su forma y dimensiones determinadas dentro de ciertos límites que nos son conocidos, constituye un edificio molecular y es, por lo tanto, mucho más complejo que el individuo inorgánico. Este posee, sin duda, también dimensiones y formas fijas, acaso aún más que el orgánico, pero no pueden sernos conocidas porque nunca existe aislado, sino agrupado con otros en edificios cuyo equilibrio sólo puede ser roto por acciones externas.

Recuérdese que este equilibrio intermolecular no implica el reposo de los diversos individuos o moléculas: vibran éstas alrededor de su centro de gravedad en el cuerpo sólido, giran en el líquido y se trasladan vertiginosamente dentro de ciertos límites en el gas.

Queda, pues, definida la especie química por el poliedro molecular, y diremos que pertenecen a una misma especie todos aquellos cuerpos en que sean idénticos los poliedros moleculares. Ahora bien, como la disposición y número de los átomos en cada molécula es siempre hipotética, hipotética será también la especificación inorgánica. Esto sin contar con que existen fenómenos de condensación molecular bien conocidos, que demuestran que la molécula no es un dominio invariable sino para un conjunto de circunstancias determinado.

Pero aun con todo este proceso mental, habremos llegado tan sólo a la especie química inorgánica, y no a la mineralógica. Una cosa es la materia inorgánica que podemos producir en el laboratorio y otra el mineral que la Naturaleza forma por sus particulares procesos. Ya Leymerie expresó esta idea diciendo que mineral y sustancia eran conceptos distintos, y que esta última era «el material empleado por la Naturaleza para construír los minerales». Por olvidar este criterio histórico-natural, los químicos que lo fueron antes de estudiar Mineralogía han hecho siempre malos mineralogistas; han multiplicado hasta lo infinito las especies y han ideado los sistemas de clasificación más antinaturales; han convertido, en suma, la Mineralogía, en un capítulo de la Química, cuando ésta para el mineralogista no debe ser más que un medio, un instrumento de trabajo.

El concepto de especie química, fundado en la identidad del poliedro molecular, es demasiado rígido. La variedad y gradación que la Naturaleza nos presenta, exigen normas de mayor flexibilidad, tolerancias en la composición y constitución de las especies, incompatibles con el criterio y las le-

yes químicas. Tomemos por ejemplo un caso, el de las mezclas de sílices anhidra e hidratada, que constituyen los minerales llamados pedernal, resinita, calcedonia, ágatas, jaspes, etc., considerados universalmente como variedades criptocristalinas de sílice. Entra en todos estos cuerpos, además de la sílice anhidra en variadas modalidades (cuarcina, lutecita, calcedonita, cuarzo propiamente dicho, lusatita, etcétera), una cantidad variable de ópalo, o sea sílice amorfa, que a su vez puede llevar agua de impregnación en proporciones muy diversas. Se comprende que un químico, atento tan sólo a los resultados de sus análisis y acaso a los de una observación más o menos detenida con el microscopio polarizante, haría tantas especies como ejemplares cayeran en sus manos.

El mineralogista procede con otro criterio. Admite un corto número de especies que caracteriza por su composición cuantitativa y su clase de simetría, y a las mezclas de unas con otras, a los cuerpos de variable composición, los asimila a la especie dominante o cuyos caracteres preponderan en la mezcla, haciendo con ellos variedades de dicha especie cuando sus caracteres son constantes y pueden considerarse como de cierta importancia. Así, para el mineralogista, pedernales, jaspes, calcedonias y ágatas, no son sino *variedades* del cuarzo, como la resinita lo es del ópalo.

Vese, pues, que la especie mineralógica es la misma especie química, pero con cierta tolerancia, que sólo un criterio bien formado de naturalista puede regular. Esta tolerancia no deberá llegar a lo que consiente el criterio del petrógrafo que, por ejemplo, dentro de la especie granito, admite, no sólo rocas en que los tres elementos fundamentales, cuarzo, ortosa, biotita, pueden encontrarse en muy variables proporciones, sino en que la ortosa puede estar total o parcialmente sustituída por otro feldespato; la biotita puede ir acompañada de moscovita o ser sustituída por otro mineral ferro-magnesiano; puede haber elementos no esenciales

(granate, turmalina, fibrolita...), en cantidad muy considerable. La especie mineralógica es, en suma, algo intermedio entre la especie química y la petrográfica, algo muy impreciso, cuyo concepto sólo puede ser completamente comprendido por un naturalista. La razón de esta diferencia entre las especies mineralógica y petrográfica puede residir en que la Geología busca en las rocas, sobre todo, el secreto de su origen; mientras que la Mineralogía se preocupa principalmente de la constitución, y así, el concepto de especie tiene que ser mucho más vago en la primera.

La identidad del poliedro molecular, que, como hemos visto, es lo que caracteriza a la especie, implica dos condiciones; igual composición cuantitativa e igual estructura cristalina, puesto que la distribución de las moléculas en el espacio depende, según las teorías cristalográficas, de los elementos simétricos de la molécula. Pero la arquitectura del edificio cristalino suele no acusarse al exterior; de una parte, lo más general es que los minerales no se presenten en cristales perfectos; otras veces, su simetría aparente es superior a la real, y se necesitan procedimientos muy delicados, corrosiones, figuras de percusión, ensayo de propiedades térmicas, fenómenos polares, etc., etc., para saber cuál es la simetría real de la sustancia.

Sirva de ejemplo la leucita que, a pesar de presentarse en cristales voluminosos y perfectos, anda errante por todos los sistemas cristalinos y aún no ha dejado reconocer su verdadera simetría. Creyóse en un principio que cristalizaba en trapezoedros regulares (regular holosimétrica); interpretóse más tarde como combinación de una pirámide tetragonal con otra ditetragonal (bipiramidal ditetragonal), y se ha reconocido, por último, que está formada por un entrecruzamiento de laminillas diversamente orientadas, que son rómbicas para unos (Klein), mientras que según otros (Mallard), pertenecen al sistema triclínico.

El carácter cristalográfico más constante, que es el cru-

cero, no denota casi siempre, sino de una manera incompleta, la simetría del mineral no perfectamente cristalizado. Las propiedades ópticas, más difíciles de apreciar, no tienen aplicación en un gran número de minerales que, como los metálicos, son opacos. El ensayo de otras propiedades físicas y aun químicas que podrían delatar la estructura cristalina, es siempre una operación larga y delicada.

Nos queda, pues, como último recurso siempre aplicable, el análisis cuantitativo, lo que más especialmente se llamaba antes el carácter químico. El análisis, y aun simplemente el ensayo mineralógico en muchos casos, nos servirán como medio de determinar la especie. Así podremos reconocer la identidad específica de un espato de Islandia y una creta, tan diferentes por su aspecto externo. Por el contrario, nos permitirá separar el mismo espato de una dolomita, la panabasa de la tenantita, la cobaltina de la esmaltina, la baritina de la celestina, etc., minerales que presentan gran parecido entre sí.

A esta *composición elemental* podremos llegar siempre, pero no a la *constitución química,* que es de la que dependen, sin duda, todas las propiedades de la especie. Tendremos que marchar, pues, por tanteos, algo empíricamente, para establecer analogías y diferencias entre los minerales, sirviéndonos para ello de las demás propiedades, o sea de los que se han llamado caracteres físicos, y muy principalmente la densidad y la dureza, el valor de los índices de refracción y de la birrefringencia, la fusibilidad, la solubilidad en los líquidos neutros, la resistencia a la corrosión y otros menos importantes.

Todos estos caracteres no tienen el mismo valor determinativo, y aun podrá ocurrir que un carácter sea más de tenerse en cuenta en unos casos y otro en otros. La importancia de un carácter depende, sobre todo, de su universalidad y de su constancia, así como de la facilidad con que pueda ser exactamente apreciado. Así, la densidad ha sido

siempre carácter importantísimo, como lo es hoy para todos los cuerpos transparentes el índice de refracción y para los anisótropos la birrefringencia, que pueden ser apreciados con gran exactitud y facilidad. De todas maneras, es imposible establecer en Mineralogía una verdadera subordinación de caracteres, como puede hacerse en Zoología o en Botánica.

El afán de asimilar las clasificaciones mineralógicas a las biológicas, nos ha llevado a denominar los grupos con los términos ya consagrados en estas últimas. Semejante costumbre es perjudicial, pues inconscientemente damos a las palabras igual valor en uno y otro caso, con lo cual cometemos errores gravísimos. Sin embargo, inventar ahora nombres nuevos sería más nocivo por la perturbación que llevaría a la nomenclatura, aparte de que no habría en la ciencia autoridad alguna capaz de imponerlos. Limitémonos, pues, a ver cómo las especies se agrupan naturalmente, y a comentar los nombres que se aplican a las divisiones superiores.

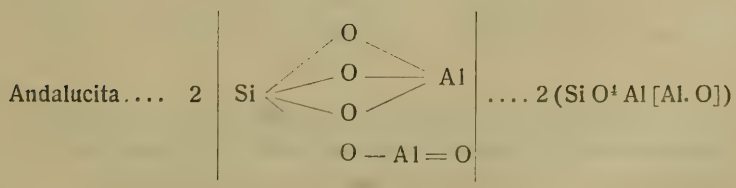
La analogía de composición empírica y de propiedades físicas, delatoras éstas de una estructura cristalina muy semejante, ha llevado a reunir ciertas especies en unos primeros grupos, entre los que acaso se encuentran los únicos verdaderamente naturales de la clasificación mineralógica. Sirva como ejemplo bien conocido la serie de los carbonatos romboédricos.

Estos grupos no tienen un nombre sancionado en la clasificación, pues el de *géneros* que alguno quiso aplicarles ha tenido significados muy diversos. Para los antiguos era el género un grupo mucho más extenso y antinatural, en el que unos comprendían las especies de igual catión (elemento electro-positivo, que entonces se decía), y otros las del mismo anión (elemento electro-negativo); decíase por los primeros, género cal, género plomo, etc., y por los segundos, género borato, género cloruro, etc. Algún autor moderno, como Tschermack, ha resucitado el género, pero dándole una significación mucho más restringida, que en ciertos

casos es equivalente a lo que se admite por la generalidad como especie; género turmalina, género wernerita, etc.

Estos grupos naturales, los únicos trozos del método conocidos, según decíamos, son muy poco numerosos. En muchos casos, la agrupación de especies, por simple analogía de composición, nos llevaría a constituír grupos completamente artificiales. Nada más análogo, por ejemplo, como fórmula empírica, que la pirita ($Fe\ S^2$), la marcasita ($Fe\ S^2$) y la hauerita ($Mn\ S^2$). Sin embargo, el último debe separarse de los dos primeros por su distinto papel en la naturaleza, y aquéllos se diferencian entre sí profundamente por su simetría cristalina; un grupo formado por estos tres minerales, sería completamente artificial. Pero aún hay más. Pueden señalarse minerales completamente distintos por su simetría, por sus caracteres y hasta por lo que pudiéramos llamar su función geológica y que tienen una composición química idéntica; tales son, por ejemplo, la anortita y el granate grosularia, ortosilicatos ambos de alúmina y cal.

El ejemplo de la andalucita, la silimanita y la distena, es muy característico. Las tres son silicatos de alúmina de fórmula $Si\ O^5\ Al^2$, rómbicas las dos primeras y triclínica la distena; pero sin duda de muy distinta constitución, por lo cual hay que darlas fórmulas desarrolladas diferentes. Suele admitirse que la andalucita es polímera de las otras dos y que tiene como la silimanita la constitución de un ortosilicato, mientras que se considera a la distena como derivada de un ácido metasilícico. En suma, podrían representarse estos minerales en fórmulas desarrolladas del modo siguiente:



Silimanita ..... Si < O, O, O — Al, O — Al = O .... $SiO^4Al[Al.O]$

Distena..... O = Si < O — Al = O, O — Al = O .... $SiO^3[Al.O]^2$

Aun cabría escribir de maneras diferentes dichas fórmulas; y este caso de cuerpos tan sencillos demuestra la inseguridad de las fórmulas desarrolladas. Se deduce también que pudiendo la fórmula empírica ser traducida de muy diversas maneras y demostrando este ejemplo y otros muchos que la constitución química será a veces muy distinta para una misma composición cuantitativa, la fórmula empírica no da el verdadero carácter químico de la especie y no puede servir para establecer analogías próximas. Semejante papel está reservado a las fórmulas racionales, pero solo cuando a consecuencia de palpables analogías hayan podido ser establecidas de una manera segura; por desgracia, este es el caso menos frecuente entre los minerales.

Los pequeños grupos naturales que por una primera aproximación de especies pueden formarse, son difíciles de reunir en otros de categoría poco superior y deben permanecer casi siempre aislados dentro del que la tiene mayor, o sea la «clase». No se ha dejado de intentar la formación de «géneros» y «familias», recurriendo para ello a caracteres de composición, pero llegando siempre a resultados poco satisfactorios (1). El «orden» se admite todavía como una subdivisión de la clase en las más modernas clasificaciones. En cuanto a la familia como grupo intermedio en la clasifi-

(1) Sobre el valor relativo de los grupos, género y familia, ha habido criterios distintos, siendo el más general el de considerar a la familia, como en Biología, grupo más extenso que el género.

cación mineralógica, ha desaparecido casi por completo. Solía fundarse en la comunidad de un solo elemento (electronegativo), y tenía que producir, por lo tanto, las más extrañas aproximaciones. Sirva como ejemplo la familia *sulfúridos*, con sus géneros *azufre, sulfuro y sulfato*, o aquella otra de los *carbónidos*, que comprendía los géneros *carburo* (hidrocarburos, petróleo, betunes, etc.), *melato* (melita), *humato* (pigotita, humiferrita), *oxalato* (oxalita, whewelita) y *carbonato* (natron, calcita, malaquita, etc.). En cuanto a la clase, que es el grupo más extenso de las clasificaciones mineralógicas, es admitido en todas ellas, antiguas y modernas; le sirven de fundamento las analogías y relaciones de composición empírica, habiéndose llegado en él a ciertas agrupaciones bastante naturales, aunque no lo son todas.

El esquema siguiente indica la subordinación de grupos que se admiten (letra ordinaria), o han admitido (*bastardilla*), en la clasificación mineralógica:

Clase.
Orden?
Suborden?
Familia.
Género.
Serie (grupo natural de especies).
Especie.
Variedad.

Respecto a las variedades, la libertad de criterio es absota y queda a la discreción del mineralogista el fijar su número y los caracteres en que deben fundarse. En las especies frecuentes se ha llegado, sin embargo, a reconocer un cierto número de variedades universalmente aceptadas.

*
* *

Para poder apreciar cumplidamente la lentitud y dificultad con que se realiza el progreso de la sistemática mineralógica, vamos a exponer, compendiadamente y en lo posible

por orden cronológico, las clasificaciones más importantes, por su originalidad, o por el favor de que han gozado. Las dividiremos en antiguas y modernas, entendiendo que estas últimas empiezan con la de Leymerie, fundamento, en gran parte, de las que hoy tienen mayor aceptación.

Clasificaciones antiguas.—Después de las clasificaciones de los naturalistas de la Edad Antigua, entre las que hemos mencionado las de Aristóteles, Teofrasto y Dioscórides, sólo merece recordarse durante la Edad Media la del cordobés Avicena, publicada a principios del siglo XI. Esta clasificación, como fundada en el conjunto de caracteres, es bastante buena, excelente para su tiempo, explicándose así el que reinara hasta fines del siglo XVIII. Dividía los minerales en los cuatro grandes grupos siguientes:

Piedras (lapídeos, no solubles).
Sales (lapídeos o terrosos, solubles).
Metales (pesados, con brillo metálico).
Combustibles (susceptibles de arder).

Aunque casi idéntica en sus grandes grupos a la clasificación de Avicena, la de Werner representa sobre ella un considerable adelanto como corresponde a la época (1792) y como era de esperar de la alta mentalidad del famoso maestro de Freyberg, gran sistematizador y gran impulsor de los estudios mineralógicos. Hay que llegar a las clasificaciones que hemos llamado modernas para encontrar algo que realmente supere al método werneriano.

Las clases en éste son cuatro: 1.ª Tierras y piedras; 2.ª Sales; 3.ª Combustibles; 4.ª Metales. La novedad de esta clasificación consiste en que después subdivide cada clase en géneros fundados en la composición química, y luego cada género en especies, que unas veces permanecen aisladas dentro de él, pero que cuando las analogías lo permiten se agrupan en varias familias. El lugar de cada especie dentro de la familia o del género correspondiente está determinado por el elemento característico, es decir, el que más

influye en las propiedades físicas, que unas veces será el electro-positivo y otras el electro-negativo, y aun podrá no ser siquiera el dominante. Como se ve, aunque con tendencia química, inevitable en la clasificación mineralógica, el método de Werner es realmente ecléctico. Ese fué el gran acierto de su autor, y en ello estriba el valor y la persistencia de la clasificación werneriana, a cuyo detalle no es preciso descender.

Muy distinto juicio hemos de hacer de la clasificación de Mohs (1832), discípulo y sucesor de Werner en la Cátedra. Enamorado de los caracteres exteriores, cuyo estudio llevó a un adelanto extraordinario, este mineralogista ideó una clasificación poco natural que tuvo gran boga en Alemania y fué aceptada por Haidinger, de Edimburgo, y que merece ser mencionada como ejemplo de sistema exclusivamente físico. Sus grandes grupos eran tres, caracterizados del modo siguiente:

I. Minerales de densidad superior a 1,8, sin olor bituminoso y que, cuando son sólidos, tienen sabor.
II. Minerales de densidad superior a 1,8, insípidos.
III. Minerales de densidad inferior a 1,8, que cuando son flúidos tienen olor bituminoso y cuando son sólidos no tienen sabor.

A la vista salta la escasa importancia de los caracteres utilizados y la heterogeneidad de los grupos con ellos constituídos. Las subdivisiones de las clases se fundan, asimismo, en caracteres secundarios, y resultan igualmente arbitrarias.

En 1822 publicaba Haüy su *Traité de Minéralogie,* donde desarrolla por completo una clasificación ideada algunos años antes, y a la cual, más que a su bondad intrínseca, dió valor la autoridad del autor. Las clases en que divide los minerales son las siguientes:

1.ª Acidos libres.
2.ª Metales heterópsidos (sin aspecto metálico).
3.ª Metales autópsidos (o propiamente dichos).
4.ª Combustibles no metálicos.

Este sabio creador de la Cristalografía, apenas parece dar importancia al carácter cristalográfico. Su primera clase no tiene razón de ser y no ha pasado a ninguna clasificación posterior. En la segunda clase tiene el acierto de separar el extenso grupo de los silicatos; pero no le da la debida importancia, pues le incluye en un apéndice con la sílice, que sin razonarlo separa de los demás ácidos. Las otras dos clases son las mismas de Werner, agregando a la última un apéndice: «sustancias fitógenas», en que se comprenden los minerales supuestos de origen orgánico. En resumen, esta clasificación no responde a lo que de su autor pudiera esperarse, y sin ser tan equivocada como la de Mohs, que la sigue cronológicamente, no señala adelanto con relación a la de Werner.

La clasificación de Beudant (1824), puede servir como de ejemplo de las fundadas exclusivamente en el llamado caracter químico, siendo, por lo tanto, poco natural. Divide los minerales en tres grandes clases y cada una de éstas en familias, géneros, subgéneros y especies, atendiendo para ello al principio electro-negativo. Las clases son:

1.ª Gazolitos. Sustancias cuyo principio electro-negativo es gaseoso a la temperatura y presión media de la atmósfera o susceptible de formar combinaciones gaseosas con el oxígeno, el hidrógeno o el fluor;

2.ª Leucolitos. Sustancias cuyo principio electro-negativo es sólido, no forma combinaciones gaseosas y da con los ácidos combinaciones blancas (incoloras);

3.ª Croicolitos. Sustancias cuyo principio electro-negativo es sólido, no forma combinaciones gaseosas y da con los ácidos disoluciones coloreadas.

En verdad que nadie diría que estos son los grupos de una clasificación mineralógica, no obstante lo cual, la de Beudant fué muy seguida en su tiempo.

Aun había exagerado más esta tendencia química Berzelius (1815), quien separa dos grandes grupos: el de los minerales compuestos «a la manera de las sustancias inorgá-

nicas», y el de los compuestos «a la manera de las sustancias orgánicas, de donde pueden proceder». Separados éstos, que son los combustibles de los autores eclécticos, divide los restantes en 18 familias puramente químicas, caracterizadas cada una por un elemento: familia del hierro, familia del cobre, familia del bismuto, etc. Las familias 16 (del azufre) y 17 (del oxígeno), comprenden por sí solas la inmensa mayoría de los minerales.

La clasificación de Brogniart, aunque también debe ponerse entre los sistemas químicos, tiene cierta tendencia al eclecticismo, tanto en la formación de los grandes grupos, como en la subdivisión de los mismos, en que no se atiene a una pauta fija. He aquí la clave de esta clasificación:

I. Cuerpos inorgánicos:
  Clase 1.ª: Gazolitos.
  Clase 2.ª: Metales autópsidos (subdivididos atendiendo al metal).
  Clase 3.ª: Metales heterópsidos (subdivididos por el metaloide).
II. Cuerpos orgánicos:
  (Acidíferos, hidrocarburos y carbones.)

Después de la serie de los sistemas exclusivamente químicos tan en boga durante algún tiempo, la clasificación de Dufrenoy (1844), volvió por los fueros del método ecléctico, en mala hora abandonado. Este sabio, cuyo *Tratado de Mineralogía* ha sido tan popular en España, dividía los minerales en las seis clases siguientes:

1.ª Cuerpos simples.
2.ª Alcalis.
3.ª Tierras alcalinas y Tierras.
4.ª Metales.
5.ª Silicatos.
6.ª Combustibles de origen orgánico.

Estas clases son divididas en 52 géneros, atendiendo casi siempre al elemento básico o electro-positivo. Conservando las clases de los metales y de los combustibles que desde

Avicena son consideradas como grupos naturales, establece por primera vez la de los silicatos, reconociendo a este grupo la naturalidad e importancia que hoy universalmente se le concede. También aparece en esta clasificación el grupo elementos, que aunque poco natural, como luego diremos, es admitido en todas las clasificaciones actuales.

Del mismo tipo ecléctico, aunque acaso menos acertada, fué la clasificación de Delafosse (1846), quien dividía los minerales primeramente en dos reinos: el atmosférico y el mineral. Comprendía el primero los gases y era dividido el segundo en tres clases: 1.ª Minerales inflamables o combustibles; 2.ª Minerales metálicos o metales; 3.ª Minerales litoides o piedras. En realidad, esta clasificación, a pesar del favor que por un momento gozara, más bien representa un retroceso que un adelanto.

*
* *

Si nos fijamos en la marcha progresiva de las clasificaciones, pronto echaremos de ver que en las verdaderamente naturales no se hace otra cosa que ampliar y mejorar el método werneriano. Los mejoramientos consisten, sobre todo, en la afirmación y limitación de ciertos grupos primarios. Cuando los mineralogistas apartan su vista del conjunto de caracteres, idean sistemas disparatados como el de Mohs o los de los quimistas, y dan lugar a un retroceso en la teoría de las clasificaciones. Leymerie, que estudió detenidamente todo lo que habían producido los mineralogistas anteriores a 1860, hizo ya notar estos hechos, y aprovechando la experiencia adquirida, ideó un método en que se consolidan todas las conquistas logradas hasta entonces en el campo de la sistemática mineralógica. La clasificación de Leymerie, base y punto de partida para todas las posterio-

res, debe ser expuesta en este lugar. Su cuadro de grandes grupos es el siguiente:

I. Minerales inorgánicos:

1.ª clase: Gases (aire, grisú y ácido carbónico).

2.ª clase: Hálidos. { Halógenos (sassolina y agua). Sales (sal gema, bórax, etc.).

3.ª clase: Piedras. { Haloides (yeso, calcita, etc.). Piedras propiamente dichas (cuarzo, ortosa, etc.).

4.ª clase: Metales (arsénico, casiterita, galena, etc.).

II. Minerales orgánicos:

(Melita, succino, hulla, etc.)

*
* *

Durante la segunda mitad del siglo pasado muchas ideas nuevas fueron apareciendo en el campo de las ciencias, a la vez que otras ya conocidas empezaban a dar sus frutos. La Química analítica avanzaba de un modo sorprendente, la Cristalografía nos revelaba una posible estructura íntima de la materia, y la Mineralogía aumentaba en extraordinaria medida el número de los minerales conocidos; todo lo cual no podía menos de influír en la clasificación mineralógica.

Ninguno de los recientes descubrimientos ha sido tan fecundo en la tarea de iluminar las relaciones entre los minerales como el isomorfismo (1). El hecho de que las sustancias de composición química análoga e igual forma cristalina puedan cristalizar juntas en todas proporciones, explica en numerosos casos la variabilidad de composición de muchos minerales y las propiedades intermedias de las *mezclas isomorfas* así constituídas. El caso de los carbonatos rom-

(1) Aunque el descubrimiento del isomorfismo y el polimorfismo por Mitscherlich se remontan hacia 1820, hasta medio siglo después no han sido utilizados en la clasificación mineralógica.

boédricos de fórmula general, RCO^3, es clásico en este sentido. La calcita ($CaCO^3$) con su romboedro de 105°5′, y la giobertita ($MgCO^3$) con el suyo de 107°20′, pueden cristalizar juntas en todas proporciones, dando compuestos de fórmula $(Ca, Mg)CO^3$ que serán calizas magnesianas o giobertitas calcáreas y cuyo romboedro se aproximará al valor angular que corresponda al que en la mezcla predomine. Hay siempre, sin embargo, una proporción en la que la sincristalización es más frecuente, que en este caso es la de molécula a molécula; a ella corresponde la dolomita, de valor angular 106°15′ y propiedades características que la especifican.

Así, por ejemplo, la variabilidad de composición del peridoto se explica satisfactoriamente como mezcla isomorfa, en proporciones variables, de los ortosilicatos normales de la forsterita y la fayalita en que pueden entrar de doce a tres moléculas de la primera, por una de la segunda; la fórmula del peridoto $(Mg, Fe)^2 Si O^4$ corresponde, pues, a

$$x(Mg^2 Si O^4) + y(Fe^2 Si O^4).$$

Nuevos descubrimientos demostraron que hay cuerpos capaces de formar mezclas isomorfas, cuyas fórmulas químicas presentan, sin embargo, poca analogía. Díjose entonces (Marignac), que si dos compuestos tienen un elemento o grupo de elementos comunes que entran por la mayor parte de su peso, pueden ser isomorfos aunque los elementos restantes sean muy distintos. Pero ni aun esta explicación puede aplicarse en algún caso, como en el bien conocido de las plagioclasas. Cristalizan juntos aquí, en todas las proporciones posibles, el trisilicato alcalino de la albita ($Si^3 O^8 Al [Na, k]$), con el ortosilicato alcalino-térreo de la anortita ($Si^2 O^8 Al^2 Ca$). El concepto de las mezclas isoformas es incapaz en este caso de explicar la sincristalización, y se ha recurrido a considerar estos *cristales mixtos*

como soluciones sólidas (de sólido en sólido), cuya real existencia está comprobada en el estudio de las aleaciones usuales.

Por otra parte, cuerpos de diferentes sistemas cristalinos, es decir, de muy desigual simetría, pueden tener constitución química análoga, que se traducirá por la semejanza de facies, por la proximidad de ciertos valores angulares y aun por la comunidad de ciertos caracteres que, como el crucero, se relacionan sin duda muy de cerca con la estructura íntima de la materia. Aquí encontraremos otra fuente fecunda para la aproximación de especies. La serie de los piroxenos es de ello un ejemplo; minerales rómbicos, monoclínicos y triclínicos (y obsérvese que todos ellos son de construcción sencilla), en que las terminaciones pueden variar de modo notable, son muy parecidos por los ángulos de su zona vertical, por la tendencia a las formas alargadas, por sus propiedades ópticas, por su crucero prismático de 87° a 93° y, sobre todo, por la que pudiéramos llamar su función petrográfica.

No menos fecundo ha sido para la explicación de relaciones naturales entre especies mineralógicas, el estudio del isopolimorfismo. Series de compuestos análogos que pueden adoptar más de una estructura cristalina, se corresponden en sus modalidades. Tal es el caso del grupo de fórmula general $n\,\overset{\text{II}}{R}S$ a que sirve de tipo la blenda y en que $\overset{\text{II}}{R}$ puede ser Zn, Mn, Fe, Ni, Cd. Trátase probablemente de una serie de sulfuros isodimorfos en que la forma más estable es, para unos, la exatetraédrica, como para Mn S (alabandina), y para otros la piramidal diexagonal como en Cd S (greenockita). Generalmente sólo son conocidos en la forma estable; pero algunos se presentan en las dos, como Zn S (blenda tetraédrica, wurtzita exagonal). La forma menos estable de algunos sólo es conocida en mezcla isomorfa, tal ocurre con Ni S, que se presenta puro bajo la forma exagonal en la millerita, y que además se encuentra tetraédrico en

la pentlandita de fórmula (Fe, Ni) S. Acaso algún día se encuentre el sulfuro tetraédrico de fórmula Ni S, cuya existencia nos permite prever el isodimorfismo de todos estos compuestos.

Citemos, por último, en este orden de estudios, los emprendidos por Groth con el nombre de *morfotropía*, cuyo objeto es averiguar las modificaciones que en la estructura del poliedro molecular producirá el sustituír elementos de la fórmula por otros más o menos afines. Los estudios hechos hasta ahora, que han sido realizados sobre compuestos orgánicos, son poco numerosos para pretender sacar de ellos consecuencias generales; pero desde luego se ve que, como podía predecirse, la modificación es tanto más profunda cuanto más difiere el elemento sustituyente del elemento sustituido. El reemplazamiento del H por un grupo OH en los derivados de la bencina, sólo produce un cambio en la relación áxica, sin alterar el sistema; pero la sustitución del mismo elemento por cloro o bromo, hace cambiar totalmente la simetría.

De este modo se explica, por ejemplo, la gran analogía cristalográfica y en todas las propiedades que ofrecen la baritina ($BaSO^4$) y la celestina ($SrSO^4$), resultantes de sustituír por bario o estroncio el hidrógeno del ácido sulfúrico.

El caso de las humitas puede considerarse también como de clara explicación por un efecto morfotrópico. Pueden considerarse todas ellas, según hicieron Penfield y Howe, como derivadas de la prolectita por adición de una molécula del ortosilicato normal de magnesio $SiO^4 Mg^2$. Todas son rómbicas o monoclínicas; pero en este último caso el ángulo β es muy próximo a 90°, y la relación áxica permanece constante respecto a los dos primeros ejes, mientras que el tercer parámetro varía proporcionalmente a los átomos de magnesio contenidos. Es de notar que la forsterita, mineral que corresponde exactamente a la composición de

la molécula agregada, guarda con la serie una gran analogía y pudiera ser colocada como punto de partida de la misma sin alterar su ley. Se la aproxima, sin embargo, al peridoto, con el que guarda mayores analogías de yacimiento, con el que forma mezclas isomorfas y con el que, por último, tiene de común la falta del grupo [Mg (Fl, OH)] característico de las humitas. La serie de éstas, según la da Groth, es la siguiente:

Prolectita... $[SiO^4]$ Mg $[Mg(Fl, OH)]^2$.....
Clase prismática..... R. A. = 1,0803 : 1 : 3 × 0,6287.
Condrodita.. $[SiO^4]^2 Mg^3 [Mg(Fl, OH)]^2$.....
Cl. prismática..... R. A. = 1,0863 : 1 : 5 × 0,6289.
Humita..... $[SiO^4]^3 Mg^5 [Mg(Fl, OH)]^2$.....
Cl. rómbica bipiramidal... R. A = 1,0802 : 1 : 7 × 0,6291.
Clinohumita. $[SiO^4]^4 Mg^7 [Mg(Fl, OH)]^2$.....
Cl. prismática..... R. A. = 1,0803 : 1 : 9 × 0,6288.

Pero obsérvese que todos estos descubrimientos nos sirven tan sólo en lo que pudiéramos llamar el detalle, en la aproximación de especies para constituír los grupos primarios naturales a que tantas veces nos hemos referido, aun diríamos mejor, para explicarnos científicamente la razón de existencia de aquellos grupos. En cuanto a las grandes divisiones, habremos de seguir formándolas por los mismos caracteres que los antiguos mineralogistas; la densidad, la dureza, el aspecto externo y, en todo caso, la composición empírica. Vamos a pasar revista a las principales clasificaciones que actualmente se usan, y comprobaremos esta afirmación.

Clasificaciones modernas.—La clasificación más generalmente aceptada hoy es la del profesor Groth, de Munich, que divide los minerales en las clases siguientes:

I. Cuerpos simples.
II. Combinaciones del azufre, del selenio del teluro, del arsénico, del antimonio y del bismuto.
III. Combinaciones oxigenadas de los elementos.
IV. Sales haloideas.

V. Nitratos, yodatos, carbonatos, selenitos. Manganitos, plumbatos.
VI. Sulfatos, cromatos, molibdatos, tungstatos, uranatos.
VII. Boratos, aluminatos, ferritos, etc., arsenitos, antimonitos.
VIII. Fosfatos, arseniatos, antimoniatos, vanadatos, niobatos, tantalatos.
IX. Silicatos.
X. Combinaciones orgánicas.

Ha de advertirse que los nombres de las clases, aunque a veces excesivamente largos y siempre muy químicos, distan mucho de la propiedad.

Muy poco se diferencia de la anterior la clasificación del profesor de Viena, G. Tschermack. Las clases son las siguientes:

I. Elementos.
II. Lampritos.
III. Oxidos.
IV. Espineloides.
V. Silicoides.
VI. Nitroides.
VII. Yesoides.
VIII. Halitos.
IX. Antrácidos.

Las clases I, II, III, IV, VII, VIII y IX, corresponden exacta y respectivamente a las I, II, III, VII, VI, IV y X de Groth. La V es la de los silicatos (IX) de este autor, reunida con los carbonatos. La VI reune las V (nitratos) y VIII (fosfatos, etcétera). Cada clase se subdivide en órdenes de manera muy semejante a la de Groth; pero teniendo menos en cuenta las analogías cristalográficas.

Hay en esta clasificación una mayor tendencia a los grupos mineralógicos y ofrece el acierto de emplear para la denominación de las clases nombres unívocos, que no por ello son menos precisos que los exclusivamente químicos de la anterior.

La clasificación de Dana, poco distinta de las precedentes, tiene la importancia de ser la empleada en el *System of*

Mineralogy de su autor, obra de constante consulta para los mineralogistas. Su cuadro de grandes grupos, tal como aparece en la 6.ª edición (1911), es el siguiente:

I. Elementos nativos.
II. Súlfidos, selénidos, telúridos, arsénidos, antimónidos.
III. Sulfosales.—Sulfoarsenitos, sulfoantimonitos, sulfobismutitos.
IV. Haloides.—Clóridos, brómidos, yódidos; fluóridos.
V. Oxidos.
VI. Sales oxigenadas.
  1. Carbonatos.
  2. Silicatos, titanatos.
  3. Niobatos, tantalatos.
  4. Fosfatos, arseniatos, vanadatos, antimoniatos, nitratos.
  5. Boratos, uranatos.
  6. Sulfatos, cromatos, teluratos.
  7. Tungstatos, molibdatos.
VII. Sales de los ácidos orgánicos.
VIII. Compuestos hidrocarbonados.

La clasificación de Naumann-Zirkel, importante por el mismo motivo que la de Dana, comprende las siguientes clases:

1.ª Elementos.
2.ª Sulfuros y compuestos análogos.
3.ª Oxidos.
4.ª Sales haloideas.
5.ª Oxisales.
6.ª Compuestos orgánicos y productos de su alteración.

Se ve que es la misma de Dana, sólo que refundiendo la clase de los sulfosales en la de sulfuros (2.ª), y la de sales de los ácidos orgánicos en la de los compuestos orgánicos (6.ª).

Comparando entre sí estas clasificaciones, échase de ver en seguida que no hay entre ellas diferencia esencial, ni acusan progreso las unas respecto de las otras. Sólo cambia en realidad la extensión de los grupos, bien porque alguno se subdivida, o bien, porque al contrario, se suelden entre sí varios de ellos. En general, resultan grupos en número ex-

cesivo, y, desde luego, aproximaciones de especies algo aventuradas. No serían éstos, sin embargo, sobre todo el primero, defectos de gran consideración.

Lo es, por el contrario, el criterio excesivamente químico que lleva a reunir en un mismo grupo especies que, a pesar de su afinidad química aparente, son completamente distintas por sus demás caracteres mineralógicos. Además, la conservación de ciertos grupos, universalmente reconocidos como naturales, obliga con frecuencia a faltar, contra toda lógica, al principio director de la clasificación, señal indudable de que éste no basta por sí solo para producir un método verdaderamente natural.

La clase «elementos», común a todas las clasificaciones modernas, es un grupo completamente artificial. Ninguna analogía tienen, ni química ni de ninguna especie, el diamante o el grafito con el azufre, el bismuto o el plomo, por ejemplo. Sería mucho más lógico estudiar los primeros, unidos a los combustibles, y los últimos con sus compuestos naturales (bismutina, galena, etc.), como hacían los antiguos mineralogistas.

Estas clasificaciones exclusivamente químicas, que serían muy buenas si se tratara de productos de laboratorio, no pueden resultar perfectas cuando se aplican a cuerpos naturales. Así empiezan a comprenderlo los mineralogistas, y no es raro que autores muy modernos las abandonen y sin temor de aparecer anticuados adopten criterios más de naturalista. Sea como quiera, se siente que lo actual no satisface y se intenta sustituirlo con algo más ecléctico o más práctico. Sirvan como ejemplo de estas tendencias las clasificaciones de Weisbach-Kolbeck y de Miers.

La primera (1875-1906) es, en realidad, una adaptación de los modernos grupos, especialmente de silicatos, a la vieja clasificación de Werner, según puede verse en el siguiente cuadro tomado de la última edición de la *Synopsis Mineralogica*, de Kolbeck.

I. Hidrolitos (sales)	Sal gema.
II. Litos (piedras).	
Primer orden: Cufóxidos	Espinela, Cuarzo.
Segundo orden: Pirititos.	
Primera familia: Escleritas	Feldespatos.
Segunda familia: Ceolitas	Analcima.
Tercera familia: Filitas	Mica.
Cuarta familia: Ofitas	Serpentina.
Quinta familia: Argilitas	Nacrita.
Tercer orden: Apirititos	Baritina.
III. Metalolitos (piedras metálicas)	Calamina.
IV. Metalitos (metales).	
Primer orden: Metalóxido	Limonita.
Segundo orden: Metales	Oro.
Tercer orden: Thiometalitos	
Primera familia: Piritas	Pirita.
Segunda familia: Galenitas	Galena.
V. Kauste (combustibles)	Diamante.

La clasificación de Miers (1905) es de un carácter muy diferente, pudiendo servir como ejemplo de sistema práctico moderno. Es una disposición de los minerales en serie lineal, agrupándolos en secciones cortas, que por esta misma razón podrían ser naturales, aunque en algunos casos disten mucho de ello, como, por ejemplo, en los grupos I, X y XXIV. He aquí las secciones, con ejemplos de especies que las representan. A veces son divididas en grupos de menor importancia:

I. Elementos (diamante, azufre, oro).
II. Haloides (fluorita, sal gema, criolita).
III. Monosulfuros (galena, blenda, cinabrio).
IV. Bisulfuros (pirita, marcasita, mispiquel).
V. Sesquisulfuros (antimonita, bismutina, rejalgar).
VI. Ferrosulfuros (calcopirita, bornita, pirrotita).
VII. Sulfoantimoniuros y afines (tetraedrita, pirargirita, bournonita).
VIII. Monóxidos (cuprita, zincita, brucita).
IX. Sesquióxidos (corindon, hematites, limonita).
X. Bióxidos (casiterita, rutilo, cuarzo).
XI. Aluminatos y afines (espinela, magnetita, crisoberilo).

XII. Boratos (boracita, bórax, colemanita).
XIII Carbonatos (calcita, aragonito, malaquita).
XIV. Silicatos y titanatos de metales bi-valentes (peridoto, augita, esfena).
XV. Silicatos de alúmina (topacio, andalucita, distena).
XVI. Silicatos alcalinos (leucita, nefelina, sodalita).
XVII. Feldespatos (ortosa, microclina, andesina).
XVIII. Silicatos que contienen halógenos (moscovita, turmalina, wernerita).
XIX. Ceolitas (estilbita, chabasita, natrolita).
XX. Silicatos con agua de constitución (epidota, idocrasa, axinita).
XXI. Otros silicatos (berilo, almandino, zircón).
XXII. Fosfatos (apatito, olivenita, vivianita).
XXIII. Sulfatos (baritina, yeso, alunita).
XXIV. Tungstatos, niobatos y nitratos (wolframita, columbita, nitro).

*
* *

Entre las clasificaciones modernas merece una especial mención, si no por su acierto, por indicar una tendencia original, la ideada por Lapparent y seguida entre nosotros por Muñoz de Madariaga en sus excelentes *Lecciones de Mineralogía* (Madrid, 1906). Es una aplicación del principio genético, tan útil en las clasificaciones zoológicas y botánicas, a la mineralógica. He aquí el razonamiento de esta clasificación y el cuadro de grandes grupos de la misma, según los expuso el autor en la última edición (1908), de su *Cours de Minéralogie.*

En el paso del planeta del estado flúido al sólido, han debido distinguirse cuatro estadios, en cada uno de los cuales se habrán formado minerales particulares: 1.° Constitución de una espuma silícea, rica en alúmina y metales ligeros, especie de *escoria*, separadora del baño metálico fundido, rico a su vez en metales densos, y de la atmósfera que contendría a las sustancias volátiles a la temperatura de aquellas edades; 2.° Condensación de las materias volátiles y depó-

sito de las disueltas en las aguas, bien por enfriamiento del disolvente o por simple disminución del mismo, o bien por reacciones que no podrían dejar de realizarse, en suma, *precipitación* química; 3.° Simultáneamente con este proceso, tendría lugar otro por llegada de elementos mineralizadores del núcleo que arrastrarían sobre todo metales pesados y los depositarían a lo largo de las fracturas y cavidades de la corteza, dónde las aguas interiores contribuirán a la realización de complicadas reacciones cuyo resultado final fué la producción de un grupo de minerales, a que puede llamarse de *emanación;* 4.° Cuando en un régimen de relativa tranquilidad los organismos pudieron establecerse sobre la corteza, su actividad vital o la acumulación de sus restos ha dado origen a los minerales que con cierta impropiedad son llamados *orgánicos*.

El primer grupo de minerales son los que Lapparent denomina «elementos de las rocas fundamentales» y vienen a corresponder a las «piedras» de Werner o a los «silicatos» de los autores modernos. Los minerales del segundo grupo, sales haloideas o sales oxigenadas en su casi totalidad, son llamados «elementos de los depósitos minerales». Forman los del tercer grupo los «minerales metálicos», y son los del cuarto los «combustibles minerales». No descenderemos a detalles, limitándonos a decir que el primer grupo le divide atendiendo a consideraciones de orden petrográfico, y el segundo y tercero por criterio puramente químico, dando preferencia en los metales al elemento electro-positivo, y en las sales, al electro-negativo. El grupo de los combustibles es el de todas las clasificaciones.

No cabe duda que el carácter genético alcanzará en su día para la sistemática mineralógica una gran importancia, aunque nunca la que tiene en Biología. La razón es que, pudiendo tener muy diferentes orígenes una misma especie mineralógica, deberíamos llevar a grupos distintos las variedades de un mismo mineral. Así, el oligisto de las lavas vol-

cánicas es originado por una reacción bien conocida del cloruro férrico y el vapor de agua

$$2\,FeCl^3 + 3\,H^2O = Fe^2O^3 + 6\,HCl;$$

los romboedros que se encuentran en las drusas con cuarzo, ortosa, etc., han sido, con seguridad, precipitados directamente de las soluciones circulantes; ciertas hematites fibrosas proceden sin duda de la deshidratación de limonitas, mientras que otras son pseudomorfosis (oxidación) de las piritas; no obstante lo cual, a nadie se le ocurrirá separar todas estas variedades del óxido férrico natural.

Si, por el contrario, estudiamos los productos de alteración de la ortosa, por ejemplo, veremos que pueden originarse la moscovita, la sericita, el cuarzo, el caolin, ciertos feldespatoides, etc., minerales que según este criterio debieran ir juntos. Es que hay en estas alteraciones, no sólo cambio de constitución de la molécula, sino hasta una variación de composición empírica, bien por simple partida de elementos, o bien por intervenciones extrañas, sobre todo por aguas carbónicas y alcalinas.

Y no es esto sólo, sino que si de la constitución del poliedro molecular sabemos muy poco para tomarla como base de una clasificación, aun nos encontramos más atrasados en cuanto a conocimientos minerogenéticos. No se le ocultan estas objeciones al autor, quien para no incurrir en aproximaciones absurdas o en caprichosas separaciones, falta con gran frecuencia al criterio fundamental de su clasificación.

Fundarse en el origen de los minerales, cuando los unos pueden tenerle muy variable y el de la mayoría nos es desconocido, no puede llevar a una distribución acertada de los mismos. Así, a pesar de la reconocida autoridad de Lapparent y de la gran difusión de sus libros de Mineralogía y

Geología, la clasificación por él ideada no es seguida ni siquiera por los mineralogistas franceses.

*
* *

Al tratar de resumir con brevedad lo que llevamos dicho y dar idea del estado en que actualmente se encuentra la sistemática mineralógica, empecemos por afirmar que la preocupación de las clasificaciones en esta ciencia no es cosa pueril, ni siquiera moderna, pues ya Bergmann a fines del siglo XVIII, con sus *Meditationes de systemate fossilium naturale* (citado en Dolomieu), se preocupó especialmente de este problema.

Sin duda que la Mineralogía, tan avanzada en otros respectos, se encuentra atrasadísima en lo que a las clasificaciones atañe. Y no es esto lo peor, si no que hemos de partir de la idea de que con las bases que hoy poseemos no puede pensarse en la posibilidad de establecer una completamente buena; hay que contentarse con la menos mala. Desde luego, debe huirse de querer identificar la clasificación mineralógica con las que en Biología pueden hacerse. Y sin enamorarnos de un principio determinado, no debemos perder de vista la idea de que nuestro fin es llegar a un orden tal, que las especies más análogas por el conjunto de sus caracteres sean también las más aproximadas en la clasificación.

La base principal de ésta no puede ser otra que la Química; pues la especie, como decíamos al principio, tiene que fundarse en la constitución, es decir, en las condiciones del poliedro molecular (1). Pero si esto es cierto, no lo será

(1) Ya Dolomieu, en un curioso libro titulado *Sur la philosophie minéralogique et sur l'espèce minéralogique* (París, 1801), expresa esta misma idea en los siguientes términos: «La especie mineralógica es un ser distinto de todos los otros por una constitución particular, que

menos que el tomar la constitución química como criterio único nos tiene que llevar a un sistema antinatural. Muchos minerales son todavía inespecificables, bien porque su escasez no ha permitido hacer de ellos un estudio químico completo, bien porque se presentan mezclados irregularmente con otras sustancias mal determinadas, o bien porque, como ocurre en ciertos silicatos, su análisis ofrezca tal dificultad, que ni en la fórmula empírica se pongan de acuerdo los químicos que los estudiaron. Aun poseyendo una fórmula empírica segura, son muchísimos los casos en que carecemos de criterio para deducir de ella la composición racional que traduzca las condiciones del poliedro molecular; son muy poco numerosos los minerales de que puede afirmarse que tienen una constitución perfectamente definida, traducible en una fórmula desarrollada invariable. Segura mente que las aproximaciones antinaturales que tanto abun dan todavía en las clasificaciones químicas modernas provienen de que tenemos una idea equivocada acerca de la molécula de los minerales en aquellos grupos reunidos.

No hay que olvidar tampoco que si los medios de que hoy dispone el mineralogista son más numerosos y eficaces que los utilizables a mediados del siglo XIX, también las especies, que entonces no pasaban de unas quinientas, llegan hoy al millar. Esto sin contar más que las bien establecidas, pues no debe olvidarse que hay una exagerada tendencia a la creación de especies nuevas, casi siempre injustificadas, acaso creyendo enriquecer la Mineralogía, cuando lo que se hace es introducir en su estudio una perjudicial confusión.

---

recibe de esta constitución todo lo que debe caracterizarle. Este ser existe en la molécula integrante; está representado físicamente por las masas homogéneas que han sido sometidas a las leyes de la agregación regular, y tiene bajo su dependencia a todos los seres que ofrecen una constitución semejante, aun cuando vicios de conformación les alejen de la representación física de la especie, o superfluidades o impurezas les hagan llevar una librea extraña».

Siempre es más fácil—y por de pronto más lucido—el multiplicar las especies que el reducirlas a sus justos términos; y de este mal, que tanto aqueja a las ciencias biológicas, no han podido librarse las geológicas.

Vemos por lo anteriormente dicho que nuestros conocimientos acerca de la constitución de los minerales son muy imperfectos. Por otra parte, el establecimiento de la especie ha de agotarnos los caracteres más importantes en este orden, que son los dependientes del poliedro molecular. No pudiendo, por tanto, establecer una clasificación perfecta fundada en los caracteres químicos, que son sin embargo los más importantes, habremos de refugiarnos en un eclecticismo bien entendido. Así, cuando el conjunto de caracteres físicos (especialmente cristalográficos) y genéticos nos induzcan a la aproximación de especies, entenderemos que la composición química ha de presentar concordancias, aunque nosotros no las hayamos podido desentrañar todavía.

Estamos en un momento muy semejante al que representan en la historia de la sistemática mineralógica los años de 1850 a 1860. Conseguida toda la perfección en su tiempo posible por el método werneriano, el predominio excesivo de la Química apartó la clasificación mineralógica del recto camino y produjo los sistemas químicos cuya expresión más acabada es el de Beudant Fué preciso que Leymerie volviera de nuevo al eclecticismo y redujera la intervención de las consideraciones de orden químico a la importancia que realmente debía tener.

Después de este autor, nuevamente los químicos han invadido con exceso el campo de la Mineralogía; y otros sistemas análogos a los de los Berzelius y los Beudant, aunque claro que más perfectos, están quitando a la clasificación mineralógica su carácter histórico-natural. Hace falta un nuevo Leymerie que, respetando las conquistas logradas por los químicos, las encuadre en un método racionalmente ecléctico y, por lo tanto, natural.

No es bueno lo nuevo por nuevo, sino por justificado; ni lo viejo debe desecharse mientras no pueda ser sustituído por algo mejor. ¿Qué duda cabe que la clase «Sales» de las antiguas clasificaciones, hoy dislocada (vitriolo, alumbre, nitro, sal gema, álcali mineral...), presentaba gran naturalidad? Las palabras «piedra», «metal», «combustible», se nos escapan todavía de la boca, inconscientemente, para nombrar los grandes grupos de la clasificación.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NUMERO

PÁGS.

XIV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia séptima..... 287

XV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia octava..... 306

XVI.—Aparato de medición para análisis de gases, por *Enrique Hauser*..... 331

XVII.—Consideraciones sobre la clasificación mineralógica, por *Lucas Fernández Navarro*..... 345

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XIV.—NÚMERO 7.
ENERO DE 1916

FEB 1926

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XVIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia novena.

SEÑORES:

En la conferencia precedente determinamos la forma que deben tener las funciones ψ, ψ_1 de dos sistemas de esferillas e y e' homogéneas e iguales en cada sistema, y llegamos, para dichas funciones, que expresan la densidad de velocidades, á las siguientes fórmulas:

$$\psi(c^2) = A e^{-h\frac{mc^2}{2}}, \quad \psi_1(c'^2) = A' e^{-h\frac{m^1 c'^2}{2}},$$

en que la constante h es la misma para ambas funciones; pero no es la misma, por haber variado las notaciones, que en el primer ejemplo. Pues aquí están en evidencia las masas m y m'.

En cuanto a c, es la velocidad de una esferilla cualquiera del primer sistema, y, por lo tanto, está dada por la fórmula

$$c^2 = u^2 + v^2 + w^2.$$

Otro tanto podemos decir de c' en la segunda fórmula, y la distinguimos por la letra c' para marcar esta circunstancia, que es velocidad de las esferillas e' del segundo sistema.

Por lo demás, es claro que podrá haber esferillas del segundo sistema que, en un momento dado, tengan la misma velocidad que esferillas del primer sistema, y entonces los valores numéricos de c y c' serán iguales.

Obtenidas estas fómulas dijimos, al terminar la conferencia precedente, que estudiaríamos en ésta el

9.° punto del programa general, que para estos problemas hemos establecido.

Es decir, que deduciríamos las consecuencias de las formas obtenidas para ϕ y ϕ_1.

***

Determinación de las constantes A, A' y h.—El método que habríamos de seguir sería el mismo que para el primer ejemplo, pero es inútil repetir lo que en aquella ocasión explicamos minuciosamente.

El número de esferillas e para las que las componentes de la velocidad satisfacen á los límites (escribiendo esta condición en igualdad simbólica),

$$l = \begin{vmatrix} u \ldots u + \partial u \\ v \ldots v + \partial v \\ w \ldots w + \partial w \end{vmatrix}$$

será evidentemente,

$$A e^{-h \frac{mc^2}{2}} \partial u \, \partial v \, \partial w,$$

o sea,

$$A e^{-hm \frac{u^2+v^2+w^2}{2}} \partial u \, \partial v \, \partial w;$$

y haciendo variar u, v, w entre $-\infty$ y $+\infty$ tendremos el número total de esferillas del primer sistema que es igual a N; y así hallaremos, para determinar A, la ecuación:

$$N = A \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hm \frac{u^2+v^2+w^2}{2}} \partial u \, \partial v \, \partial w.$$

Pero estas integrales difieren algo de las del primer ejemplo; porque, al tratar de la determinación de A, teníamos h en la exponencial y aquí tenemos $\frac{mh}{2}$,

Luego, si obtuvimos en aquella ocasión

$$A = \frac{N h^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}}$$

obtendremos la constante A para este caso, poniendo en vez de h la cantidad $\frac{mh}{2}$, según queda dicho, y resultará:

$$A = \frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{mh}{2} \right)^{\frac{3}{2}}.$$

Repitiendo esto mismo para el segundo sistema de esferillas e', se obtiene:

$$A' = \frac{N'}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{m'h}{2} \right)^{\frac{3}{2}},$$

puesto que para estas últimas la masa es m' en vez de ser m.

En cuanto a la constante h, que es la misma para ambos sistemas, repetiríamos para obtener su valor el mismo procedimiento, que en el primer ejemplo expusimos, valiéndonos del cuadrado medio de la velocidad obtenido por la ecuación de los gases.

*
* *

Número de esferillas cuyas velocidades tengan las componentes comprendidas en los límites l para el primer sistema, y en los límites l' para el segundo.

En rigor, este problema ya está resuelto. Estos números ya los hemos obtenido; no hay más que introducir en ambas fórmulas los valores de A y A'.

Representando por N_c y $N_{c'}$ tales números, tendremos:

$$N_c = \frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{mh}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-h\frac{mc^2}{2}}\,\partial u\,\partial v\,\partial w,$$

$$N_{c'} = \frac{N'}{\pi^{\frac{3}{2}}}\left(\frac{m'h}{2}\right)^{\frac{3}{2}} e^{-h\frac{m'c'^2}{2}}\,\partial u\,\partial v\,\partial w.$$

***

Velocidad media de los dos sistemas de esferillas. —Inútil es, volvemos á repetirlo, rehacer los cálculos que desarrollamos en el primer ejemplo.

Basta poner en los resultados allí obtenidos en vez de h

$$\frac{mh}{2} \text{ ó } \frac{m'h}{2}.$$

Hallamos cuando no había más que un sistema de esferillas para dicha velocidad media,

$$\text{valor medio de } c = \frac{2}{\sqrt{\pi h}};$$

luego tendremos:

velocidad media para el primer sistema =

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi\frac{mh}{2}}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{mh}};$$

velocidad media para el segundo sistema: $\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\frac{2}{m'h}}$.

Lo mismo diríamos para otro sistema cualquiera: y esta observación es general, puesto que generalizamos para un número cualquiera de sistemas las formas de ψ.

***

Cuadrado medio de las velocidades para las esferillas de ambos sistemas o de un *número* cualquiera de sistemas.— En el primer ejemplo hemos resuelto este problema para un sistema, y hemos hallado

$$\text{valor medio de } (c^2) = \frac{3}{2h};$$

luego tendremos:

$$\text{valor medio de } (c^2) = \frac{3}{2\,\frac{mh}{2}} = \frac{3}{mh},$$

$$\text{valor medio de } (c'^2) = \frac{3}{m'h},$$

y así sucesivamente.

Esta última expresión nos permite hallar el valor medio de la energía cinemática de las esferillas de ambos sistemas o de un número cualquiera de ellos, porque en efecto, si $\frac{3}{mh}$ es el valor medio de c^2, el valor medio de la fuerza viva de la esferilla e de masa m será:

$$m\,(c^2), \text{ es decir, } m \times \text{valor medio de } c^2,$$

o sea,

$$m\frac{3}{mh}=\frac{3}{h},$$

y si a la semifuerza viva se la llama *energía* cinemática, tendremos:

$$\text{energía cinemática del primer sistema}=\frac{3}{2h}.$$

Pero obsérvase que la masa m ha desaparecido, luego la energía cinemática será la misma para otro sistema cualquiera.

Y llegamos a esta conclusión importante: Si están mezclados muchos gases o, en nuestro simbolismo, muchos sistemas de esferillas, y el conjunto de sistemas ha llegado a un estado permanente, la energía media o la semifuerza viva de las esferillas del primer sistema será igual a la energía media del segundo, y del tercero, y de todos los sistemas.

En suma, la energía total se habrá dividido por partes iguales entre todos los sistemas.

Subsiste el principio que ya indicamos de la equipartición de la energía entre todos los sistemas.

Y, por fin, si la semifuerza viva representa la temperatura o una cantidad proporcional, podemos afirmar que la temperatura media de cada sistema es la misma.

Se llega a un estado permanente cuando se llega a un equilibrio medio de temperaturas.

Fijemos bien las ideas y repitamos lo que ya en otra ocasión hemos dicho.

Cuando se mezclan dos sistemas de esferillas e y e' distintos, tales y como los hemos definido, la semifuerza viva de cada esferilla podemos decir, en términos generales, que será distinta, o si se quiere, será distinta su temperatura.

Pero en cambio en el primer sistema, podemos imaginar una semifuerza viva media, o una *temperatura media.*

Y otro tanto podemos repetir para el segundo sistema, en el cual existirá otra temperatura media.

Pues bien, y aquí aparece la ley de equilibrio de temperaturas, cuando los dos sistemas han llegado a un estado permanente, *estas dos temperaturas medias son iguales.*

En este sentido estadístico la ley del equilibrio de temperaturas subsiste.

El resultado es el mismo; es decir: se enuncia en la misma forma si se mezclasen diferentes sistemas, tres, cuatro o más.

Y continuemos utilizando las fórmulas anteriores para seguir expresando valores medios de diferentes magnitudes o parametros del gas.

*
* *

Número de pares de esferas formado, cada par, por una esfera del primer sistema y otra del segundo; de tal suerte, que la VELOCIDAD RELATIVA *en una dirección dada que tomaremos por eje de las x, esté comprendida entre U y* $U + \partial U$.

Sabido es lo que se entiende por velocidad relativa entre dos puntos móviles.

Se aplica al sistema una velocidad igual y contraria a la de uno de ellos, el cual quedará inmóvil y la velocidad del otro, que es a lo que se llama velocidad relativa al primero, será la diagonal del paralelógramo formado por la velocidad de este último, y una velocidad igual y contraria a la del primero.

Cuando se trata de velocidades relativas a una dirección dada, y éste es nuestro caso, el problema es más sencillo.

Las dos velocidades son paralelas y, para nuestra explicación, podemos suponer que las dos líneas coinciden.

De suerte, que si la velocidad del primer punto es u, y la velocidad del segundo u', la velocidad de este último será $u' - u$, puesto que los dos lados del paralelógramo coinciden en una línea.

Si a esta velocidad resultante la representamos por U, tendremos

$$u' - u = U,$$

de donde,

$$u' = u + U,$$

expresada u' en función de la velocidad relativa; y el problema, podrá enunciarse de este modo:

Hallar el número de pares de esferillas tales, que las componentes de las velocidades paralelas al que hemos elegido por eje de las x, estén comprendidas

para las esferillas e entre u y $u + \partial u$,

para las esferillas e' entre $u' = u + U$ y $u + U + \partial U$.

Hemos demostrado que en el primer sistema de esferillas e, el número de éstas, cuyas componentes están comprendidas entre u y $u + \partial u$, viene dado por la fórmula

$$A e^{-h\frac{mu^2}{2}} \partial u \frac{\pi}{\frac{mh}{2}},$$

siendo

$$A = \frac{N}{\pi^{\frac{3}{2}}} \left(\frac{mh}{2}\right)^{\frac{3}{2}},$$

o sea

$$\frac{N\left(\frac{mh}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{\pi^{\frac{3}{2}}} e^{-h\frac{mu^2}{2}} \partial u \frac{\pi}{\frac{mh}{2}} = \frac{N\left(\frac{mh}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\pi^{\frac{1}{2}}} e^{-h\frac{mu^2}{2}} \partial u,$$

que ya vimos que se obtenía por integraciones sencillísimas, con relación a v y a w, efectuadas sobre la fórmula general que da dicho número por el producto de la densidad de velocidades y por el volumen $\partial u \, \partial v \, \partial w$.

Si para simplificar la fórmula, y para darle más simetría, representamos la constante $\frac{hm}{2}$ de la exponencial por otra constante que siempre podemos poner bajo la forma $\frac{1}{\alpha^2}$, es decir, si escribimos

$$\frac{hm}{2} = \frac{1}{\alpha^2},$$

tendremos

$$\frac{N\left(\frac{1}{\alpha^2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \partial u,$$

o bien

$$\frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \partial u.$$

En resumen;

Número de esferillas e del primer sistema cuyas componentes u están entre u y $u + \partial u =$

$$= \frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{\alpha^2}} \partial u.$$

Y del mismo modo para el segundo sistema, representando $\frac{hm'}{2}$ por $\frac{1}{\beta^2}$, es decir, haciendo

$$\frac{1}{\beta^2} = \frac{hm'}{2},$$

recordando que el número de esferillas de este sistema es N', y por fin, observando que lo que en el caso precedente es u, es en este caso $u + U$ y que ∂u está sustituída por ∂U, se llegará, repitiendo los razonamientos anteriores a este resultado:

Número de esferillas e' del segundo sistema cuyos componentes están ente $u + U$ y $u + U + \partial U =$

$$= \frac{N^1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(u+U)^2}{\beta^2}} \partial U.$$

Ahora bien, el número de pares que pueden formarse con ambos números será el producto de éstos dos factores:

$$\frac{N}{\alpha\sqrt{\pi}} e^{-\frac{u^2}{a^2}} \partial u \times \frac{N^1}{\beta\sqrt{\pi}} e^{-\frac{(u+U)^2}{\beta}} \partial U = \frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{(u+U)^2}{\beta^2}\right)} \partial u \partial U,$$

y resulta, por consiguiente, que si el número de pares de esferillas que pueden formarse con esferillas que tengan su componente paralela al eje de las x entre u y $u + \partial u$, en el primer sistema, y con esferillas e' del segundo sistema, de las cuales las componentes estén entre $u + U$ y $u + U + \partial U$ entrando en cada par una esferilla de la primera clase y otra de la segunda, este número, repetimos, será el anterior,

$$\frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\left(\frac{u^2}{a^2} + \frac{(u+U^2)}{\beta^2}\right)} \partial u \partial U.$$

***

Propongámonos ahora hallar el número de pares de esferillas, una del primer sistema y otra del segundo, cuyas velocidades relativas para las componentes paralelas al eje de las x estén entre U y $U + \partial U$.

Es evidente que basta dar a u todos los valores entre $-\infty$ y $+\infty$.

Para cada uno de estos valores, aplicar la fórmula precedente y sumar estos resultados. Lo cual equivale a dejar en la expresión anterior U constante e integrar entre $-\infty$ y $+\infty$ respecto a u.

De suerte que tendremos:

Número de pares de esferillas e y e', en los que la velocidad relativa de cada par, paralelamente al eje de los X, está entre U y $U+\partial U=$

$$=\frac{NN^1}{\alpha\beta\pi}\partial U\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{(u+U)^2}{\beta^2}\right)}\partial u.$$

Todo queda reducido a obtener el valor de esta integral definida.

Con este objeto procuraremos reducirla a un tipo de esta clase de integrales, que hemos obtenido en las conferencias anteriores, y que, como recordarán mis alumnos, era éste:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2}\partial u.$$

Desde luego ocurre, que para ello hay que hacer, que el exponente de la exponencial se convierta en un cuadrado perfecto, y a este fin, ante todo daremos la siguiente forma al exponente, y prescindamos por el momento del factor que está fuera de la integral.

Tendremos:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{(u+U)^2}{\beta^2}\right)}\partial u=\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{u^2}{\alpha^2}+\frac{u^2}{\beta^2}+\frac{2uU}{\beta^2}+\frac{U^2}{\beta^2}\right)}\partial u=$$

$$=e^{-\frac{U^2}{\beta^2}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}u^2+\frac{2uU}{\beta^2}\right)}\partial u,$$

expresión en la que hemos sacado fuera de la integral el factor independiente de ∂u, con lo cual obtendremos:

$$\frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{U^2}{\beta^2}} \partial U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} u^2 + \frac{2uU}{\beta^2}\right)} \partial u .$$

Prescindamos de nuevo del factor exterior a la integral y transformemos ésta completando el cuadrado del exponente. Resultará:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\left(\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} u^2 + \frac{2uU}{\beta^2}\right)} \partial u = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(u^2 + 2\frac{\alpha^2\beta^2}{\alpha^2+\beta^2}\frac{1}{\beta^2} uU\right)} \partial u,$$

y agregando y quitando un término más para completar el cuadrado:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(u^2 + \frac{2\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2} uU + \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 U^2 - \left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 U^2\right)} \partial u =$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left[u + \left(\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)\right]^2} e^{+\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(\frac{\alpha^2}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 U^2} \partial u$$

y sacando otra vez de la integral la exponencial que no contiene u, tendremos para el número de pares de esferillas de que se trata:

$$[1] \quad \frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{U^2}{\beta^2} + \frac{\alpha^2 U^2}{\beta^2(\alpha^2+\beta^2)}} \partial U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(u + \frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} \partial u =$$

$$= \frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{U^2}{\alpha^2+\beta^2}} \partial U \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(u + \frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} \partial \left(u + \frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)$$

en que hemos agregado a u bajo la diferencial la constante

$$\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}$$

para igualar las variables en el exponente y en la diferencial.

Y consideremos ya la integral definida, prescindiendo del factor que la multiplica.

A saber:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^3}\left(u+\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2} \partial\left(u+\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right).$$

Esta integral es, precisamente, del tipo que indicábamos,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-hu^2} \partial u.$$

De suerte que haciendo

$$\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2} = h_1 \text{ y } u+\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta} = u_1,$$

se convierte en

$$\int_{-\infty}^{+\infty} -\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}\left(u+\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right)^2 \partial\left(u+\frac{\alpha^2 U}{\alpha^2+\beta^2}\right) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1 u_1^2} \partial u_1.$$

En cuanto a los límites no hay dificultad alguna, porque cuando u varía entre $-\infty$ y $+\infty$, entre $-\infty$ y $+\infty$ varía también u_1.

Pero la integral tipo, hemos visto en una conferencia anterior que tiene por valor $\sqrt{\frac{\pi}{h_1}}$.

Luego,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-h_1 u_1^2} \partial u_1 = \sqrt{\frac{\pi}{h_1}},$$

y poniendo en vez de h_1 su valor, resulta:

$$\sqrt{\frac{\pi}{\frac{\alpha^2+\beta^2}{\alpha^2\beta^2}}} = \frac{\alpha\beta\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}.$$

Sustituyendo este valor en la fórmula fundamental [1], se obtiene:

$$\frac{NN^1}{\alpha\beta\pi} e^{-\frac{U^2}{\alpha^2+\beta^2}} \partial U \frac{\alpha\beta\sqrt{\pi}}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}},$$

y, por último, simplificando, obtendremos:
número de pares de esferillas e, e', en las que las velocidades relativas paralelas al eje de las x están comprendidas

$$\text{entre } U \text{ y } U+\partial U = \frac{NN^1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}} \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{U^2}{\alpha^2+\beta^2}} \partial U,$$

que es la misma fórmula del autor inglés, el cual no entra en los pormenores que preceden, porque en rigor son elementales.

Mas, como estas conferencias tienen por objeto la enseñanza de alumnos que por primera vez estudian estas materias, no creo conveniente omitir ningún pormenor, por elemental que sea.

***

Hemos determinado en el párrafo precedente el número de pares de esferillas de dos sistemas en que las velocidades relativas paralelas al eje de las x están comprendidas entre U y $U+\partial U$.

Y ahora nos proponemos generalizar este problema buscando el número de pares de esferillas e y e' cuyas veloci-

dades relativas, que representaremos por r, estén comprendidas entre r y $r + \partial r$.

De modo que ya no comparamos velocidades paralelas al eje de las x, sino velocidades totales.

Detengámonos en este problema.

Imaginemos dos puntos o esferillas A, A' (fig. 21).

En un instante dado, A tiene la velocidad AB; A' la velocidad $A'B'$. Se trata de determinar la velocidad relativa de este sistema.

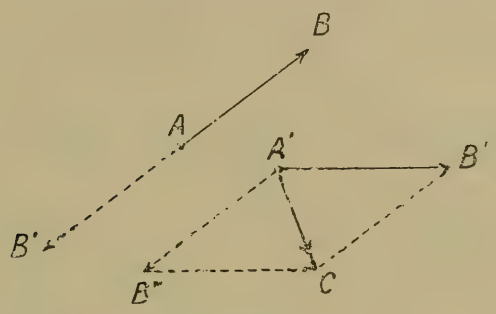


Figura 21

Se sabe que para ello hay que comunicar al sistema de las dos esferillas una velocidad igual y contraria a la de una de ellas; por ejemplo, a la AB.

En este caso, el punto A quedará inmóvil, porque las velocidades AB y AB' son iguales y contrarias.

En cambio, la esferilla A' está sometida á dos velocidades, $A'B'$ y $A'B''$, o sea a su resultante $A'C$.

Pues esta es precisamente la que llamamos velocidad relativa en el sistema de las dos esferillas y es la que hemos representado por r.

Esta r tendrá por componentes paralelas a los ejes U, V y W.

Precisamente, el número que antes obtuvimos sólo se refería a la componente U, y ahora vamos a obtener el número de pares de esferillas e, e' de los dos sistemas, en que

la velocidad relativa para cada par la hemos designado por r.

Tenemos, pues, pares de esferillas: en cada uno de ellos una esferilla, por ejemplo e, la suponemos inmóvil en un instante dado, y en ese instante la velocidad de la otra e' la representamos por r y queremos determinar el número de estas velocidades r comprendidos entre r y $r + \partial r$, o sea que las componentes de esta velocidad estén comprendidas entre

$$U \ldots U + \partial U$$
$$V \ldots V + \partial V$$
$$W \ldots W + \partial W.$$

Pues este problema es exactamente el mismo, que el que resolvimos en el primer eiemplo.

Lo que allí eran u, v, w, aquí son U, V, W; lo que allí representábamos por $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$, aquí será $r^2 = U^2 + V^2 + W^2$; lo que en aquel caso designábamos por N, ahora será NN^1, es decir, número de pares de esferillas en vez de esferillas aisladas; y lo que en la exponencial de la densidad de velocidades llamábamos h, aquí será

$$\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$$

De suerte que si en aquel caso obtuvimos para el número de esferillas

$$\frac{4Nh^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-hc^2} c^2 \partial c,$$

ahora será, según las notaciones propias de este caso

$$\frac{4NN^1 \left(\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2} \right)^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{\pi}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2 + \beta^2}} r^1 \partial r,$$

o bien,

número de pares de esferillas e, e' de los dos sistemas dados, cuyas velocidades relativas varían entre r y $r + \partial r =$

$$= \frac{4 N N^1}{\sqrt{\pi}\,(\alpha^2 + \beta^3)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, r^2 \partial r.$$

Podemos ahora deducir dos fórmulas análogas a las que vimos en el primer ejemplo para las velocidades absolutas.

1.° Valor medio de la velocidad relativa de cada dos esferillas de ambos sistemas.—El método para resolver este problema está calcado en el que empleamos para las velocidades absolutas; a saber: multiplicar la expresión anterior por r, integrar entre cero e ∞ y dividir por la expresión precedente, también integrada entre cero e ∞, que es el método para obtener la cantidad media del valor de varias cosas: multiplicar cada una por su valor, sumar y dividir por el número total.

Integramos entre cero e ∞ y no entre $-\infty$ y $+\infty$, porque en este último caso la integral sería nula, si dábamos a r valores iguales y contrarios.

No tenemos en cuenta la dirección, sino el valor absoluto y positivo.

Pero aun este cálculo es inútil porque ya obtuvimos en el primer ejemplo, tantas veces citado, esta velocidad media. Su valor era

$$\frac{2}{\sqrt{\pi h}},$$

y bastará poner en vez de h, como antes hicimos, $\frac{1}{\alpha^2 + \beta^2}$.

Resultará, pues,

$$\frac{2}{\sqrt{\pi h}} = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sqrt{\alpha^2 + \beta^2}.$$

Ahora bien, en el primer sistema tendríamos evidentemente para la velocidad media absoluta:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha,$$

y para el segundo:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta,$$

y la expresión precedente es:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}=\sqrt{\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\alpha\right)^2+\left(\frac{2}{\sqrt{\pi}}\beta\right)^2}$$

luego podemos decir: *que la velocidad media relativa de dos sistemas de esferillas es igual a la raíz cuadrada de la suma de los cuadrados de las dos velocidades medias absolutas en ambos sistemas.*

2.° Análogamente podemos obtener el cuadrado medio de las velocidades relativas. Basta multiplicar la expresión de donde partimos por r^2, integrar entre cero e infinito, aunque aquí sería indiferente integrar entre $-\infty$ y $+\infty$, y dividir por la integral que expresa el número total de cada grupo.

De este modo obtuvimos para el cuadrado medio de las velocidades absolutas;

$$\frac{3}{2h};$$

y poniendo para nuestro caso, en vez de h, la expresión $\frac{1}{\alpha^2+\beta^2}$, se halla

$$\frac{3}{2\frac{1}{\alpha^2+\beta}}=\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2).$$

En el primer sistema se ve inmediatamente, o haciendo $\beta = 0$, o sustituyendo por h su valor en este caso, que el valor medio del cuadrado de la velocidad es:

$$\frac{3}{2}\alpha^2;$$

en el segundo será:

$$\frac{3}{2}\beta^2,$$

y se ve desde luego, *que el cuadrado medio de la velocidad relativa es la suma de los cuadrados medios de las velocidades absolutas.* Que comprueba la ley del equilibrio de temperaturas, o sea, la igualdad de las fuerzas vivas; pero dentro de la ley estadística.

Si en la última expresión

$$NN' \frac{4}{\sqrt{\pi}\,(a^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} r^2\,dr$$

sustituímos a las cantidades α y β, que para abreviar la escritura introdujimos, sus valores, tendremos por fin que el número de pares de esferillas e, e' de los dos sistemas dados, cuyas velocidades relativas están comprendidas entre r y $r + \partial r$, se presentará bajo esta forma

$$NN' \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{\pi}} \frac{(m\,m'\,h)^{\frac{3}{2}}}{(m+m')^{\frac{3}{2}}} e^{-\frac{r^2 m m' h}{2(m+m')}} r^2 \partial r.$$

Repetimos una observación ya hecha anteriormente: que si N y N' representan los números de esferillas de uno y otro sistema comprendidas en la unidad de volumen, el número precedente a la unidad de volumen se referirá también.

*
* *

Pasemos a resolver otro problema, y éste lo resolveremos por primera vez en nuestras conferencias.

Nos proponemos determinar el número de choques que se realizan en la unidad de tiempo y en la unidad de volumen entre las esferillas e *cuyo número es* N, *del primer sistema, y las esferillas* e′ *en número* N′ *del segundo sistema.*

Este problema, que a primera vista parece de una dificultad enorme, porque la imaginación se pierde en esta confusión de choques, es, sin embargo, sencillísimo, aplicando los métodos que venimos siguiendo.

Pero entiéndase bien: no es que mezclamos a capricho dos sistemas de esferillas *e* y *e′*, y sin más dato pretendamos determinar el número de choques, que se realizan en la unidad de tiempo y en la unidad de volumen; porque este problema sería verdaderamente absurdo: sería determinar una cosa que depende de otras dos que se ignoran, sin agregar a esto ningún dato positivo.

No, seguramente; nosotros pretendemos resolver un problema en el orden estadístico perfectamente determinado.

Pretendemos, en suma, determinar el número de choques en un sistema de esferillas, o si se quiere, en dos sistemas, *cuando el conjunto ha llegado a un estado permanente* y cuando, por lo tanto, se conocen las densidades de las velocidades absolutas y relativas.

Y esto ya es otra cosa.

Para simplificar el problema supongamos que las *N* esferillas quedan inmóviles, más aún, fijas en la unidad de volumen, de donde resultarán con cierta distribución en este volumen para ese instante: constituirán como una banda de billar, según veremos.

Y supongamos que entre ellas se mueve una esferilla *e′* del segundo sistema con una velocidad *r*.

Todas las esferillas fijas, que son las del primer sistema, suponemos que son iguales, su radio será, por ejemplo, ρ; la esferilla *e′* que se ha de mover entre ellas, y que supone-

mos que pertenece al segundo sistema, tendrá un radio distinto del primero, y lo representaremos por ρ'.

Pues bien; supongamos (fig. 22), que a representa una esferilla del primer sistema de radio ρ, que b representa la esferilla del segundo sistema y tracemos un cilindro $A\ B$ en la dirección del movimiento r de la esferilla b.

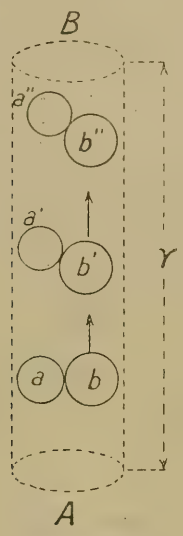


Figura 22

Este cilindro provisional supondremos que es de revolución y que el radio de su sección recta sea igual a $\rho + \rho'$ que representaremos por s.

El interior del cilindro contendrá otras esferilllas a', a'' ..., tantas por unidad de volumen dentro del cilindro como corresponda a la distribución de las N esferillas del primer sistema.

Algunas de éstas, como a, serán tangentes a la superficie del cilindro; otras, como a', quedarán en el interior, y al pasar el centro de la esfera b por el interior de este cilindro ideal, dicha esfera b chocará forzosamente con todas las esferas a'', a''' ...

En a, b tendremos el primer choque, y sería un choque límite: casi resbalamiento.

En a', b' la esfera b', que es la b en otra posición, choca forzosamente con la a'; y así b, animada de la velocidad media r, va chocando con todas las del interior del cilindro.

Y aquí podríamos repetir alguna de las dudas que expusimos al hablar del choque de las esferillas.

Pero en este caso, afortunadamente, aquellas dudas pueden desvanecerse.

El intentar desvanecerlas lo dejamos para luego.

Por ahora, para no interrumpir el establecimiento de las fórmulas, admitamos que las esferas son de sustancia tan tenue que pasan unas a través de otras y que b puede chocar con todas las contenidas en el cilindro $A\ B$, pasando a través de unas y otras esferillas.

Otra duda más grave ocurre respecto a la dirección de la velocidad de b, después de cada choque; pero ésta también la desvaneceremos, dando a la demostración todo el vigor posible.

Continuemos un momento nuestra demostración, por imperfecta que sea al aplicar este cilindro simbólico.

La esferilla b del segundo sistema chocará dentro del cilindro en la unidad de tiempo con tantas esferillas *fijas* a, a', a'' ... como hay dentro de él, y habrá tantas como corresponden a su volumen.

Dicho número se obtendrá, pues, formando la siguiente proporción.

Si en la *unidad de volumen* hay n esferillas, en el volumen del cilindro, que será el producto de su sección recta πs^2 por su altura, o sea el espacio recorrido por la esferilla b en la unidad de tiempo que es su velocidad r; en este volumen, repetimos, existirá un número de esferillas obtenido por la siguiente proporción:

$$1 : n :: \pi s^2 r : X;$$

de donde,

$$X = n \cdot \pi s^2 r.$$

Si este es el número de esferillas contenidas en el volumen del cilindro y con todas choca en la unidad de tiempo, la esferilla b, X será el número de choques en dicha unidad de tiempo.

Y, por último, si una esferilla b del segundo sistema choca un número de veces representado por la expresión ante-

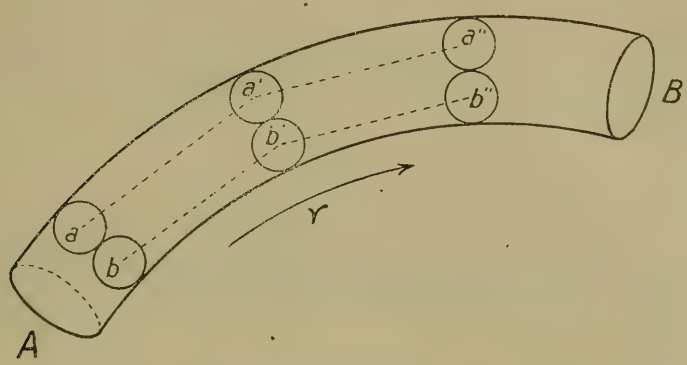


Figura 22 bis

rior de X, n' de estas esferillas chocarán con las esferillas fijas este número de veces:

$$n\, n' \cdot \pi s^2 \cdot r.$$

Y ahora rectifiquemos la demostración precedente, o mejor dicho, el precedente esbozo de demostración.

Para salvar todas las dudas que anteriormente expusimos y hacerla todo lo correcta que permite esta teoría estadística, no hay más que encorvar, por decirlo de este modo, el cilindro de la figura 22, convirtiéndolo en el tubo encorvado de la figura 22 bis, doblándole en cada instante, para seguir

a la esferilla b, en las diversas direcciones que toma después de cada choque.

En esta figura 22 bis vemos a las esferillas fijas a, a', a'' como si fueran la banda de un billar, y vemos a la esferilla b chocando, primero con a, y luego con a', y luego con a'', y así sucesivamente durante *la unidad de tiempo.*

Todo el razonamiento subsiste.

La velocidad r, que en la figura 22 era una recta de longitud r, aquí será la longitud del tubo AB, y estará compuesta de las longitudes rectilíneas, sumamente pequeñas, $b\,b'$, $b'\,b''$, $b''\,b'''$, ...

El volumen encerrado en el tubo o en la superficie canal, como la llama correctamente el autor inglés, tendrá todavía por expresión:

$$\pi s^2 r;$$

y el número de choques en la unidad de tiempo de las n' esferillas b del segundo sistema, que son móviles, con las esferillas fijas en el espacio del primer sistema, continuará siendo

$$n\,n'\,\pi s^2 r.$$

Sólo nos queda un paso que dar y una hipótesis de que prescindir para completar la resolución del problema.

Hemos supuesto que las esferillas a del primer sistema estaban fijas en el espacio, como pedazos de una banda de billar, cuando chocaban con ellas las esferillas b; pero el resultado será el mismo aun cuando estas bandas de billar, o dicho con más exactitud, nuestras esferillas del primer sistema, se muevan, con tal que representemos por r, no la velocidad absoluta de las esferillas b, *sino su velocidad relativa* en cada choque.

Pero como en este caso el número de esferillas e del primer sistema es N y el número de esferillas e' del segundo sistema es N' y el número de *pares de esferillas* de uno y

otro sistema, para cada velocidad relativa r es, según hemos visto,

$$NN' \frac{4}{\sqrt{\pi}\,(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, r^2\,\partial r,$$

resulta, por fin, que el número de choques de las esferillas e, e' en la unidad del tiempo, y cuando la velocidad relativa está comprendida entre r y $r+\partial r$, será el resultado de multiplicar el número precedente que representa el producto $n\,n'$ por el volumen del tubo, es decir,

$$NN' \frac{4}{\sqrt{\pi}\,(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, r^2\,\partial r \times \pi s^2 r =$$

$$= \frac{NN'\,4\sqrt{\pi}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}}\, s^2\, e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}}\, r^3\,\partial r.$$

Conviene recordar la significación de α y β.

Si ponemos

$$\alpha^2 = \frac{2}{mh}, \qquad \beta^2 = \frac{2}{m'\,h},$$

hallaremos para la expresión final el número de choques en ta unidad de tiempo de las esferillas e, e' de ambos sistemas, esferillas cuyas velocidades relativas están comprendidas entre r y $r+\partial r$, la fórmula siguiente, que parece complicada, pero que en el fondo es sumamente sencilla, y cuya razón de ser, por decirlo de este modo, se comprende casi instintivamente:

$$NN'\sqrt{2\pi}\,\frac{(mm'h)^{\frac{3}{2}}}{(m+m')^{\frac{3}{2}}}\, s^2 r^3\, e^{-\frac{r^2 mm'h}{2(m+m')}}\,\partial r.$$

Este es el número de choques en la unidad de tiempo

para todos los pares de esferillas cuya velocidad relativa está comprendida entre r y $r + \partial r$.

Y aquí conviene hacer una observación muy importante. Como los pares están formados por esferillas e, e' con velocidades comprendidas en los límites l, l', a saber:

$$l = \begin{vmatrix} u & u+u \\ v & v+v \\ w & w+w \end{vmatrix} \quad \text{y} \quad l' = \begin{vmatrix} u' & u'+\partial u' \\ v' & v'+\partial v' \\ w' & w'+\partial w' \end{vmatrix},$$

que son *casi iguales*, en cada límite, para todas ellas se buscarán las velocidades relativas casi del mismo modo, es decir, empleando la misma velocidad negativa, y por la misma transformación se reducirán *todas* las del grupo e a la inmovilidad: *todas* a la vez, si vale la palabra. La transformación individual es *casi* transformación de todo un grupo.

Si queremos obtener el número total de choques en la unidad de tiempo entre todas las esferillas de los dos sistemas no habrá más que integrar entre todos los valores de r desde cero a ∞, y tendremos, tomando para abreviar la escritura, la primera de las dos fórmulas,

$$\text{número de choques} = \int_0^\infty N N' \frac{4\sqrt{\pi}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{1}}} s^2 e^{-\frac{r^3}{\alpha^2+\beta^2}} r^3 \partial r.$$

Esto es evidente. Si la diferencial representa el número de choques para la velocidad relativa r, sumando todos los valores para todas las velocidades relativas tendremos el número total.

Y sacando fuera de la integral la constante,

$$\text{número de choques} = N N' \frac{4\sqrt{\pi}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}} s^2 \int_0^\infty e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} r^3 \partial r.$$

Para hacer menos molesta la escritura, llamaremos C a la constante que está fuera de la integral, y no quedará más que efectuar la siguiente integración:

$$\text{número de choques} = C \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} r^3 \partial r.$$

Esta integral la hemos hallado ya otras veces.

Para comodidad del lector escribiremos los cálculos que son elementales; pero abreviando la explicación.

Tendremos, pues,

$$C \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} r^3 \partial r = C \int_{r=\infty}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta}} 2r \partial r \times$$

$$\times - \frac{1}{\alpha^2+\beta^2} \times - \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \times r^2.$$

$$= - C \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} \partial \frac{-r^2}{\alpha^2+\beta^2} \times r^2 =$$

$$= - C \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \left[e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta}} r^2 - \int e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} 2r \partial r \right]_{r=0}^{r=\infty}$$

Como la primera parte ya sabemos que para ambos límites es igual a cero, quedará tan sólo

$$+ C \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \int_{r=0}^{r=\infty} e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} 2r \partial r = C \frac{\alpha^2+\beta^2}{2} \times$$

$$\times - (\alpha^2+\beta^2) \left(e^{-\frac{r^2}{\alpha^2+\beta^2}} \right)_{r=0}^{r=\infty}$$

$$= - C \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{2} (0 - 1) = C \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{2}$$

y sustituyendo el valor de la constante C, resultará por fin

Número de choques =

$$NN' \frac{4\sqrt{\pi}}{(\alpha^2+\beta^2)^{\frac{3}{2}}} s^2 \times \frac{(\alpha^2+\beta^2)^2}{2} = 2\,NN'\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\; s^2.$$

Podemos también sustituir en vez de α y β sus valores, y hallaremos:

Número de choques en la unidad de tiempo y la unidad de

$$\text{volumen} = 2\,NN'\sqrt{\pi}\sqrt{\frac{2(m+m')}{mm'h}}\; s^2,$$

expresado en función de los datos, es decir, del número de esferas de cada sistema N y N', de las masas m de las esferillas del primer sistema, de las masas m' del segundo y de la suma de los radios de las esferas de uno y otro sistema s.

Y la mayor parte de estos factores son, si me es permitido expresarme de este modo, de sentido común.

Cuantas más esferas de uno y otro sistema N y N' tengamos, mayor número de choques resultarán. Cuanto mayor el radio de las esferas, y por lo tanto su volumen, se comprende que mayor número de choques deben verificarse, y así, es natural que este número varíe proporcionalmente a N y N' y s^2.

El resto de la fórmula procede de la densidad de las velocidades, es decir, de la exponencial.

*
* *

Como la fórmula precedente es general, nos da el medio de determinar el número de choques de las esferillas del primer sistema, unas con otras. Bastaría repetir los razonamientos precedentes suponiendo $N' = N$, es decir, número

de choques de un sistema consigo mismo, o, si se quiere, de un sistema con otro idéntico.

Haciendo, pues, en las dos fórmulas anteriores, $N = N'$ y puesto que son sistemas idénticos $\alpha = \beta$, y por último, representando por s el diámetro de una de las esferillas que es el doble del radio, resultará:

Número de choques de las esferillas e del primer sistema

$$\text{unas con otras} = 2\,N^2 \sqrt{\pi}\,\sqrt{2\,\alpha^2}\; s_1{}^2.$$

O sustituyendo, en vez de α su valor,

$$= \frac{4\,N^2\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{mh}}\, s_1{}^2.$$

Y el mismo número tendremos para el segundo sistema.

Numero de choques de las esferillas e' del segundo sis-

$$\text{tema, unas con otras} = 2\,N'^2 \sqrt{\pi}\,\sqrt{2\,\beta^2}\; s_1{}^2$$

y sustituyendo el valor de β,

$$= \frac{4\,N'^2\,\sqrt{\pi}}{\sqrt{m'\,h}}\, s_1{}^2.$$

Claro es que el número de choques de todas las esferillas del sistema será la suma de los tres números que antes hemos obtenido; porque el número total de choques se compondrá de la suma de los choques de las esferillas e' del primer sistema entre sí; más de los choques de las esferillas del segundo sistema unas con otras; más de los choques de las esferillas del primer sistema con las del segundo.

Número expresado en función de los datos del problema, y suponiendo siempre que se ha llegado a un estado permanente.

En la conferencia próxima, todavía de las fórmulas anteriores deduciremos la solución de otro problema de sumo interés.

XIX.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décima.

SEÑORES:

Estudiando en la última conferencia el problema de dos sistemas de esferillas, iguales entre sí las de cada sistema en dimensiones y masas, pero distintas las de un sistema de las del otro, determinamos, en función de los datos del problema, el número de choques que se verificaban *en la unidad de volumen y en la unidad de tiempo*, ya en cada uno de los dos sistemas, ya entre las esferillas del uno y del otro sistema.

Y este problema nos permite resolver otro que, á primera vista y sin antecedentes, debió parecer en un principio enormemente difícil, y que en el punto á que hemos llegado puede decirse que es elemental, tan elemental, que se reduce á la división de dos números.

Mas no olvidemos, y lo he recordado muchas veces y lo recordaré á cada instante, que se trata de un conjunto de esferillas que, en su agitación dentro del espacio en que están encerradas, han llegado á un estado permanente, á un equilibrio estadístico, por decirlo así, de suerte que, á pesar de los choques que á cada momento se verifican, la distribución de las velocidades absolutas, de las velocidades relativas y de las diversas cantidades medias que determinamos, es siempre la misma.

Como si se dijera, y valga el ejemplo, que una ciudad ha

llegado á un equilibrio estadístico de población, porque se mueren tantos como nacen.

Es lo uniforme en lo variable; es la permanencia en el movimiento; es el orden en el desorden; es, en suma, la ley estadística.

De otro modo, y sin esta condición, ninguno de los problemas que hemos resuelto ó hemos de resolver serían posibles, ni siquiera su enunciado tendría sentido.

Y ahora continuemos nuestra conferencia y resolvamos el siguiente problema.

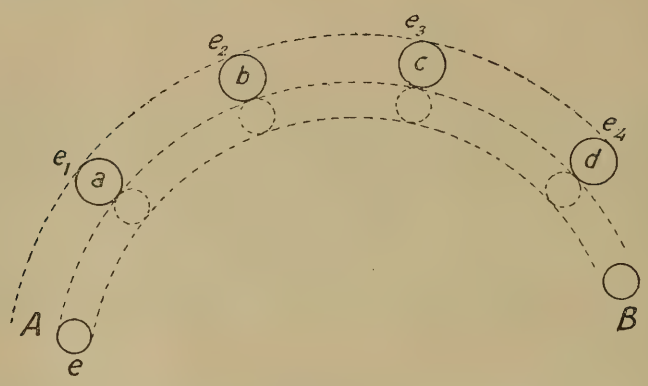


Figura 23.

Problema: *Determinar el camino medio que recorre cada esferilla entre choque y choque.*

Fijémonos en el primer sistema de esferillas.

Representemos en la posición A (fig. 23) la esferilla e de este sistema, cuyo trayecto medio entre choque y choque queremos determinar.

Y sean e_1, e_2, e_3... las eferillas con las cuales va á chocar sucesivamente en la unidad de tiempo.

La esferilla e parte de A; choca en a, b, c, d... con las esferillas indicadas, y al terminar *un segundo de tiempo* está en B.

Es decir, que el camino $A\,a + a\,b + b\,c + c\,d + d\,B$, que es el camino recorrido por la esferilla en la unidad de tiem-

po, es evidentemente la velocidad media que ya hemos determinado.

Y todos los trayectos parciales se supone que estén recorridos con la misma velocidad media.

Pues prescindiendo del punto de partida ó de llegada, ó de un choque más ó un choque menos, puesto que el número de estos choques es enorme, es claro que en la longitud AB habrá tantos trayectos parciales, que serán los trayectos medios, como esferillas ó choques.

En la figura hay cuatro esferillas; se representan cuatro choques y hay tres trayectos. Si el número de esferillas fuera n habría n choques y $n - 1$ trayectos, que como el número n es muy grande, son números casi iguales con un error infinitamente pequeño.

Luego el trayecto medio se obtendrá dividiendo la longitud total $A\ B$ por el número de choques.

Es decir,

$$\text{camino medio entre choque y choque} = \frac{\text{longitud } A\,B}{\text{número de choques}}$$

$$= \frac{\text{velocidad media}}{\text{número de choques}}.$$

Pero la velocidad media la conocemos, es $\frac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}$, siendo $\alpha = \frac{2}{mh}$.

El número de choques en la unidad para las esferillas de un sistema, lo conocemos también; hemos obtenido esta expresión:

$$2\,N^2 \sqrt{\pi}\,\sqrt{2\,\alpha^2}\,s_1{}^2,$$

en que N es el número de esferillas, α tiene el valor antes indicado, y s_1 es el diámetro de cada esferilla.

Pero si este es el número total de choques para cada esferilla, tendremos que dividir por N, porque si á las N esferillas corresponden estos choques, á una de ellas corresponderá una enésima parte, y resultará

$$2N\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2}\,s_1^2.$$

Sustituyendo en la fórmula anterior obtendremos para el primer sistema;

$$\text{camino medio entre choque y choque} = l_1 = \frac{\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}}{2N\sqrt{\pi}\sqrt{2\alpha^2}\,s_1^2} =$$

$$= \frac{1}{\pi N\sqrt{2}\,s_1^2}.$$

Repitiendo este último razonamiento, y sin más que sustituír á α la cantidad β, tendremos:

$$\text{camino medio entre choque y choque} = l_2 = \frac{1}{\pi N^1\sqrt{2}\,s_2^2},$$

siendo s_2 el diámetro de las esferillas en el segundo sistema.

De idéntica manera si queremos determinar el camino medio de una esferilla del primer sistema, que va chocando con las del segundo, después de dividir el número total de choques de las del primer sistema con las del segundo por N, con lo cual obtendremos que el número de choques es

$$2N^1\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,s_3^2$$

siendo s_3 la suma de los radios de ambas esferillas tendremos:

$$l_3 = \frac{\dfrac{2\alpha}{\sqrt{\pi}}}{2N^1\sqrt{\pi}\sqrt{\alpha^2+\beta^2}\,s_3^2} = \frac{1}{\pi N^1}\,\frac{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}{\alpha}\,s_3^2,$$

y hemos resuelto un problema, que parecía inaccesible á la ciencia, por la manera más sencilla.

***

Las fórmulas precedentes concuerdan con las de míster Watson, que es el autor que hemos tomado por guía en muchas de las presentes conferencias.

Concuerdan también con las de Boltzmann, al menos con las que consigna en el texto, aunque hace observar, que son distintas de las del insigne Clausius, en las que el factor numérico es otro que el establecido anteriormente.

Estas divergencias no son de extrañar en problemas de Mecánica estadística, porque no siempre las hipótesis son las mismas en unos y en otros autores.

La fórmula del camino medio entre choque y choque, que hemos obtenido nos da numéricamente dicho trayecto, suponiendo que se conoce el número N de esferillas, ó sea de átomos ó moléculas que contiene el espacio igual á la unidad; que se conoce asimismo el diámetro s_1 de las esferillas ó moléculas; que se conoce además la masa m de cada molécula, puesto que entra en α, y que, por último, se ha determinado el valor de la constante h.

Y acaso el lector se pregunte: ¿Y cómo se pueden determinar todas estas magnitudes? ¿No son éstas, lucubraciones fantásticas de los sabios? ¿No son delirios del deseo? ¿Puede el ingenio humano expresar en cifras el número de moléculas, su peso absoluto y su diámetro, al menos de una manera aproximada?

La contestación es afirmativa, y acaso en este mismo curso resolveremos todos estos problemas.

Claro es que cuando se trata de determinar, por ejemplo, el número de moléculas contenidas en un peso determinado de gas, por ejemplo en el peso que se llama molécula-gra-

mo, que es un peso representado por tantos gramos como unidades tiene el peso atómico del cuerpo, así en el oxígeno serán diez y seis gramos, no es sensato pedir que se determinen unidades ni millares: las últimas cifras han de ser necesariamente ceros, porque a determinarlas no llega la más refinada experiencia.

Pero eso no importa: *basta con que el error sea pequeño, comparado con el número total.*

Así, y valga esta imagen, cuando se dice que la fortuna de un yanqui es de *trescientos millones de dóllars,* no se dice 345.218.139,3.

Con decir trescientos millones, basta.

Pues análogamente basta que el método cinemático dé por resultado este número:

683.000.000.000.000.000.000.000,

para que al fijar esta cifra la ciencia haya obtenido un triunfo inmenso.

Y este triunfo se convierte, no sólo en puro triunfo científico, más o menos problemático, sino casi en un hecho positivo, cuando, repitiendo las experiencias y perfeccionándolas, y acudiendo a otros fenómenos completamente distintos, se obtiene para este número, que es el de Avogadro, unas veces 62, y otras, 70 y otras, 75, y como término medio, 68,3 y siempre, de una manera invariable,

0.000.000.000.000.000.000.000,

es decir,

$$68{,}3 \times 10^{22}.$$

Pero volvamos a nuestro problema, que más adelante, a ser posible, explicaremos todos estos triunfos de la ciencia modernísima.

***

Pasemos, pues, al

Tercer ejemplo.—Este ejemplo no está tomado de la realidad; en rigor no se refiere á los gases que existen en la Naturaleza: es más bien un ejemplo ideal, y no sé si me atrevería á decir un ejemplo simbólico.

Y, sin embargo, es muy importante para la enseñanza, y es un acierto, siempre desde el punto de vista de la enseñanza, de míster Watson, porque facilita el estudio de problemas más y más complicados.

Empezamos por un gas cuyas moléculas simbolizábamos por esferillas elásticas iguales todas entre sí.

Luego pasamos al caso de dos gases mezclados, y las moléculas de cada sistema continuábamos representándolas siempre por esferillas elásticas.

Para estos problemas establecíamos ciertas condiciones: el volumen total de las esferillas suponíamos, que era mucho menor que el volumen del espacio en que estaban encerradas.

La distribución de la masa en las esferillas era uniforme, de modo que el centro de figura coincidía con el centro de gravedad, y los choques eran centrales y simétricos alrededor de la línea de los centros; y suponíamos, además, que no se verificaba en ningún momento el choque simultáneo de tres esferillas.

De modo que entre el choque de una esferilla con otra, y luego con una tercera, siempre mediaba un espacio de tiempo, por pequeño que fuese.

Y esto parece natural.

Por fin prescindíamos de toda clase de fuerzas exteriores, y así, entre choque y choque, las esferillas se movían en línea recta y con velocidad uniforme.

Pero los problemas, para llegar a una teoría general, cada vez han de complicarse más y más, y han de ser más difíciles, y por eso iremos prescindiendo, poco a poco, de las restricciones anteriores.

Continuaremos suponiendo, que las moléculas están representadas por esferillas elásticas, pero que la materia no está distribuída uniformemente, de suerte que el choque será el de dos esferas; pero no bastará tener en cuenta las velolocidades en la dirección de la línea de los centros, sino que deberemos tener en cuenta la rotación de las esferas, como podremos comprender bien pronto.

Más aún, en el caso de esferillas homogéneas, como la rotación no existe, o aun dado que existiera, dejaría a la esferilla en su identidad y no podría transmitirse por rozamiento, porque ésta es otra hipótesis que hemos establecido, para el movimiento no hay que tener en cuenta más que el centro de la esferilla, y como un punto está determidado por sus tres coordenadas, podemos decir, en el lenguaje moderno, que, en cada instante, el punto tiene tres grados de libertad, puesto que puede moverse paralelamente al eje de las x, o al eje de las y, o al eje de las z.

Ahora bien, en el nuevo problema, subsistiendo todas las demás condiciones que establecimos antes, se modifican estas dos últimas.

La esfera podrá girar alrededor de su centro y no formará el mismo sistema, igualmente orientado en el espacio, antes que después del giro, porque el centro de gravedad es excéntrico. De modo que la verdadera posición de la esfera como sistema no depende sólo de su centro, sino de su orientación, y si el centro depende de tres coordenadas, la orientación depende de otras tres; por ejemplo: de las coordenadas de Euler.

En suma, cada posición de la esfera dependerá de seis coordenadas, o, como ahora se dice: la esferila tendrá *seis* grados de libertad.

Podrá trasladarse paralelamente al eje de las x.

O paralelamente, al eje de las y.

O paralelamente, al eje de las z.

Y también podrá girar alrededor de un eje paralelo al eje de las x.

O alrededor de otro eje paralelo al eje de las y.

O, por fin, alrededor de un eje paralelo al eje de las z.

Claro es que siguiendo nuestro estudio aún hemos de considerar sistemas con mayor grado de libertad.

Y aun complicándolo más, consideraremos el caso de fuerzas exteriores y aun de fuerzas moleculares.

Pero atengámonos por ahora al problema de esferlllas elásticas en que el centro de gravedad no coincide con el centro de figura.

Subsistiendo, por de contado, todas las demás condiciones que habíamos establecido.

***

Podía evidentemente abordarse este problema general sin más preparación; pero, graduando las dificultades, creyó conveniente míster Watson, y aceptamos su procedimiento, presentar este problema intermedio, que dijimos hace un instante que era un problema ideal.

Nos referimos al *problema de los discos*, que es el que constituye el tercer ejemplo que vamos a tratar, y que pasamos a definir.

Imaginemos dos sistemas de discos circulares, como antes suponíamos dos sistemas de esferillas.

Los discos de ambos sistemas están sujetos a moverse en un mismo plano, limitado por una línea elástica; y así como las esferillas de los ejemplos anteriores chocaban con las paredes elásticas del recinto en que se agitaban, así los discos de este nuevo ejemplo, que son también elásticos, chocan con la línea de contorno y retroceden en su camino.

El número de estos discos circulares es muy grande en ambos sistemas: N en el primero y N' en el segundo; pero

el conjunto de las áreas de estos discos es muy pequeño en comparación con el área en que se mueven. Ocupan, pues, una parte muy pequeña de esta área, como las esferillas ocupaban una parte muy pequeña del espacio total en que se agitaban.

Entre choque y choque los discos se mueven en línea recta, es decir, sus centros de gravedad describen líneas rectas, con velocidad uniforme entre uno y otro choque, porque no existe ninguna fuerza exterior.

Lo mismo que en los ejemplos precedentes, aun suponiendo que en el instante inicial todos tuvieran la misma velocidad, pronto estas velocidades se diferenciarían, clasificándose, por decirlo así, por magnitudes diversas.

Suponemos que este período inicial de agitación ha ido, en medio de la agitación misma, organizándose, en cierto modo, y que hemos llegado a un *estado permanente* que, a pesar de los nuevos choques, se conserva constante, sin que se altere la distribución en las velocidades, sin que las de cada grupo tengan una dirección predilecta, sino que en el plano y en un cierto período de tiempo cada clase de velocidad toma todas las orientaciones.

Y esta ley de constancia, si no es una ley continua, porque se trata de sistemas discontinuos, puede decirse que es una ley estadística inalterable.

Ahora se trata de demostrar que tal estado permanente es posible, y se trata de demostrar, además, que distribuyéndose las velocidades según cierta ley, que es, como antes, *la ley exponencial*, el estado permanente subsiste.

Todo esto es repetir lo que ya dijimos para los dos primeros ejemplos, y ahora sólo falta que definamos cada uno de los discos.

Los del primer sistema, todos circulares, son idénticos entre sí.

Los del segundo sistema, circulares también, son también idénticos entre sí, pero distintos de los del primer sistema.

Definamos cada uno de los discos en cuestión, y basta definir uno cualquiera de cualquiera de los dos sistemas.

Sea *B* (fig. 24), uno de estos discos.

Su forma es circular y su centro es *O*.

Está constituído de materia; pero esta materia no está distribuída uniformemente: carga más a un lado que a otro, por decirlo de este modo. De suerte que su centro de gravedad *A* no coincide con el centro de figura *O*.

Cuando hablamos del centro de gravedad empleamos esta

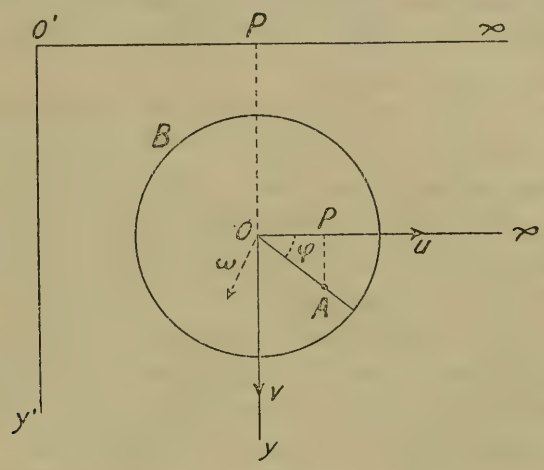


Figura 24

palabra por seguir la costumbre, pero no porque supongamos que la gravedad actúa sobre el disco, ni que influya, de ninguna manera, en el fenómeno que estudiamos. El disco no tiene peso o prescindimos de su peso; pero es un disco material y elástico.

Estas son las hipótesis que establecemos en este ejemplo ideal.

De suerte, que si sobre cada punto material del disco llegase a actuar una fuerza proporcional al volumen y a la densidad del elemento que consideramos, y si además estas fuerzas, sea cual fuere su dirección, fueran paralelas, ten-

drían una resultante, y esa resultante, un punto de aplicación en el disco, que sería el punto A.

Por eso decimos que el punto A es el centro de gravedad.

También podríamos darle otro nombre: podríamos decir que es *el centro de inercia.*

Pero nos atenemos a la denominación ordinaria, ya que esta denominación no puede inducirnos a error, dadas las explicaciones anteriores.

Todo disco puede tener tres movimientos:

Puede moverse según la línea Ox, paralela a uno de los ejes coordenados del plano.

Puede moverse también paralelamente al eje Oy, perpendicular al anterior.

Y éstos son dos movimientos o *dos grados de libertad.* Por de contado son movimientos de traslación en que todos los puntos del disco describen rectas iguales y paralelas, ya al eje de las x, ya al eje de las y.

Pero además, el disco puede girar alrededor del centro de gravedad A, describiendo un arco $O\omega$ con el radio $OA = k$, designando por k la distancia del centro de figura al centro de gravedad. Este será el *tercer grado de libertad.*

Tenemos, pues, un sistema con tres grados de libertad; a saber: dos traslaciones y un giro.

Y aunque el disco girase alrededor de su centro O, aunque el contorno geométrico no cambiase de posición, la posición del sistema en el espacio no sería la misma antes y después del giro. La región A no ocuparía ya la posición anterior.

En cada momento necesitamos tres coordenadas para fijar la verdadera posición del disco; por ejemplo, las coordenadas

$$O'P = x', \qquad PO = y'$$

con relación a los ejes fijos Ox', Oy', y además el ángulo φ

que forma la recta OA, por ejemplo, con el eje de las x.

Claro es que conociendo la posición del centro O, para conocer la posición del disco alrededor de este centro, en vez de emplear el ángulo φ podemos emplear y es más cómodo la distancia p del centro de gravedad al eje de las x.

Insistimos en todos estos pormenores, que son elementales y de suma sencillez, como preparación para otro ejemplo: cuando de los discos moviéndose en un plano pasemos a cuerpos elásticos moviéndose en el espacio y en que sus centros de gravedad no coincidan con su centro de figura O, y aun al caso más general, en que no tengan centro geométrico.

Y ahora vamos a resolver paso a paso los mismos problemas que hemos resuelto en los dos primeros ejemplos, y vamos a resolverlos por métodos idénticos en la esencia, aunque los de ahora sean algo más complicados que los de antes, y vamos a llegar a resultados de identidad ó de analogía con los que ya hemos obtenido; todo lo cual da una perfecta unidad a esta teoría de los gases.

Tal es la razón, como indicamos en otra conferencia, de que hayamos elegido como guía en una parte del presente curso el pequeño tratado de míster Watson, tan metódico como sistemático.

Y pasemos ya a esta serie de problemas que acabamos de anunciar.

***

1.° Expresión analítica que da *el número de discos* del primer sistema cuyas velocidades de traslación y de rotación están comprendidas en los límites siguientes:

$$\left.\begin{array}{l} u \text{ entre } u \text{ y } u + \partial u \\ v \text{ entre } v \text{ y } v + \partial v \\ \omega \text{ entre } \omega \text{ y } \omega + \partial \omega \end{array}\right\} (l).$$

Representaremos siempre, para abreviar, estos límites por *l*.

La marcha que hemos de seguir es la de siempre en este primer problema parcial, y la fórmula o la expresión es análoga a la ya obtenida.

Podemos, como hemos hecho antes, construir un diagrama de este modo:

En la figura 25 hemos trazado tres ejes coordenados rectangulares: uno paralelo a la dirección de las velocidades *u*,

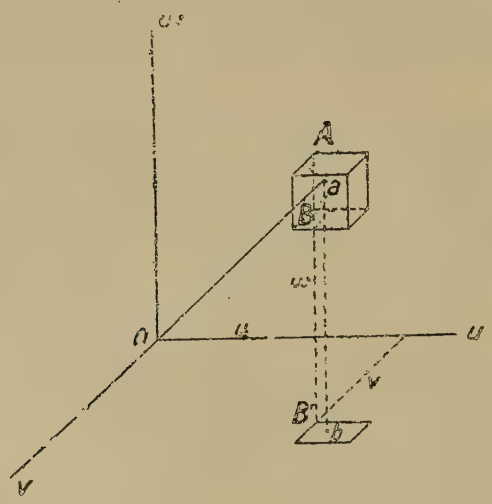


Figura 25

otro paralelo a la dirección de las componentes *v* y otro perpendicular a los anteriores, en que contaremos las magnitudes ω de las velocidades de rotación de los diferentes discos alrededor del centro de gravedad de cada uno de ellos.

Y llamo la atención de mis alumnos sobre esta circunstancia: Se trata de un sistema de discos que se mueven en un plano; es decir, que estudiamos un problema de cinemática, pero en el espacio de dos dimensiones, y sin embargo acudimos a un diagrama en el espacio de tres dimensiones.

Esto hay que tenerlo muy en cuenta, porque casos análogos se han de repetir en las teorías, que más adelante estudiemos.

Así, por ejemplo, en problemas de tres dimensiones tendremos que acudir, al menos simbólicamente, a espacios de mayor número de dimensiones; por ejemplo: a espacios de cinco y seis dimensiones.

En el ejemplo que estamos tratando ahora se presenta ya este caso: el problema se refiere á un plano, y tenemos que acudir a representaciones con una dimensión más.

Y esto consiste en que el número de *grados de libertad* del sistema, o si se quiere, el número de coordenadas que lo determinan, es superior al número de dimensiones del espacio en que se mueven los discos.

Aquí el número de grados de libertad es tres: un movimiento paralelo al eje de las u, otro movimiento paralelo al eje de las v y un giro del disco alrededor de un eje perpendicular a su plano, o sea al plano del movimiento, y pasando por el centro de gravedad del disco en cuestión.

Tenemos, pues, para nuestro diagrama tres ejes rectangulares: Ou, Ov, $O\omega$.

Construyamos ahora un paralelepípedo A, cuyas caras serán paralelas a los tres planos coordenados.

Sus aristas serán paralelas a los ejes y tendrán por dimensiones ∂u, ∂v, $\partial \omega$.

Por último, su vértice B tendrá por coordenadas u, v, ω.

A toda recta que va desde el origen de coordenadas O al interior del paralelepípedo la llamaremos velocidad compleja.

En rigor no es una velocidad, ni sus componentes son componentes de velocidad como en los movimientos de traslación. Lo serán u y v, pero no lo es ω.

Por eso decimos que es una velocidad compleja, y también pudiéramos decir simbólica.

Ello es que estas rectas determinan un punto en el inte-

rior siempre del paralelepípedo, tal como el punto a, cuyas coordenadas precisamente están comprendidas en los límites l; porque evidentemente la coordenada paralela a u de a tiene un valor comprendido entre u y $u + \partial u$.

Asimismo la coordenada paralela a v está comprendida entre v y $v + \partial v$.

Y, por último, la coordenada paralela al eje de las ω estará comprendida forzosamente por estar dentro del paralelepípedo entre ω y $\omega + \partial\omega$.

En suma, cada disco está simbólicamente representado por un punto del interior del paralelepípedo.

Los discos están esparcidos por el plano, pero todos los comprendidos en el límite l los hemos reunido en el diagrama y todos tienen velocidades simbólicas o complejas representadas por un manojo de rectas que parten de O y que tienen sus extremidades en el interior del paralelepípedo expresado.

El paralelepípedo en cuestión estará sembrado en su interior, si se nos permite expresarnos de este modo, de una multitud de puntos, unos muy próximos, otros más separados y hasta se comprende que pueda haber puntos dobles, es decir, que valga cada punto por dos, o por tres, o por más.

Si estos puntos geométricos se materializan por puntos materiales con una cantidad de materia determinada y constante para cada uno de dichos puntos, se comprende a la vez que la cantidad de materia contenida en el paralelepípedo será proporcional al número de discos comprendidos en el límite l.

Y aun si la materia de cada punto vale uno, el número de discos será igual a la cantidad total de materia o al número que la expresa.

Pero la cantidad de materia es igual al volumen por la densidad.

Luego, representando por D dicha densidad, tendremos: número de discos comprendidos en el límite $(l) = D\,\partial u\,\partial v\,\partial\omega$,

en que D representa la densidad y $\partial u\, \partial v\, \partial \omega$ representa el volumen.

Ahora bien, esta densidad dispersa en el espacio, por decirlo así, o reconcentrada en el paralelepípedo, será distinta según el grupo de discos que se consideren, o sea, según los valores de u, v, ω, lo cual en el diagrama se expresa diciendo que dependerá de la posición del paralelepípedo o de su vértice B, cuyas coordenadas son u, v, ω.

En suma, lo que hemos llamado densidad de la materia simbólica o densidad del número de puntos representativos será, lo mismo que en todos los ejemplos anteriores, una función de u, v y ω. Y así

$$D = \chi\,(u,\, v,\, \omega),$$

con lo cual tendremos por fin:

$$\text{número de discos comprendidos en el límite } (l) = \\ = \chi\,(u,\, v,\, \omega)\, \partial u\, \partial v\, \partial \omega.$$

Esta fórmula es análoga a la que hemos obtenido en los primeros ejemplos, y queda resuelto el primer problema de este nuevo ejemplo.

En los anteriores todavía transformábamos la función χ, y así, en vez de $\chi\,(u,\, v,\, w)$, escribíamos $\chi\,(u^2 + v^2 + w^2$, porque realmente la densidad era la misma en todas las orientaciones para el mismo valor $c^2 = u^2 + v^2 + w^2$, de suerte que dicha densidad dependía, no ya de las componentes de la velocidad, sino de la velocidad total.

Pero en el ejemplo que estamos tratando tal sustitución no es tan inmediata, ni tan evidente, porque u, v, ω no son enteramente de la misma naturaleza. Las dos primeras son componentes de una traslación; la segunda es una rotación, y el problema se complica un tanto.

Por el pronto, dejaremos la función χ tal como al princi-

pio la hemos escrito, y más adelante trataremos de reformarla.

De todas maneras, el problema queda, como antes decíamos, resuelto, y resuelto por una fórmula análoga a la fórmula ya obtenida en las conferencias precedentes.

En la inmediata pasaremos al segundo problema de este caso.

XX.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

POR BLAS LÁZARO É IBIZA.

PARTE GENERAL

Grandes son los vacíos que aun se advierten en el estudio de nuestra flora criptogámica inferior, y mayores y más numerosos los que particularmente se refieren a la dilatada serie de los hongos.

Que esta imperfección de conocimiento afecte a muchos grupos constituídos por especies microscópicas, cosa es que fácilmente se explica por el tardío advenimiento de estos estudios en España, el reducido número de los cultivadores de la Botánica criptogámica, y las dificultades que van anejas a todo género de trabajos micrográficos; mas no parece tan explicable que sean igualmente mal conocidos algunos grupos constituídos por hongos macroscópicos, varias de cuyas especies alcanzan en sus aparatos esporíferos el máximo tamaño a que pueden llegar estos organismos.

Aludimos con esto a la familia de los poliporáceos, todos macroscópicos, abundantes en los campos, especialmente en las localidades montuosas y bien arboladas, pero cuyo desconocimiento es aún grande en nuestra flora, como lo prueba el corto número de especies que se han citado hasta el presente como propias de nuestro suelo.

Acaso esto se explique por ser las especies en gran parte arborícolas, y que, por ello, fácilmente pueden pasar inadvertidas, porque sus formas y sus coloraciones, pocas veces vistosas y llamativas, no atraen generalmente las miradas de los no iniciados en estos estudios, y porque ni aun

desde el punto de vista utilitario llaman vivamente la atención, pues, excepción hecha de la tribu de los Boleteos, que encierra especies muy estimables y famosas como alimenticias, al lado de otras que pasan por tóxicas, no abundan en esta familia las especies que puedan ser comestibles, por ser los aparatos esporíferos, en la mayoría de los casos, coriáceos, suberosos, y aun leñosos.

Y sin embargo, esta última condición, que los hace fácilmente conservables, así como la larga duración que la vida de estos órganos alcanza en algunas especies, varias de las cuales pueden vivir durante algunos años, parece lógico suponer que debiera ser favorable para su estudio y conocimiento, pues las especies que tienen los aparatos esporíferos muy consistentes, que no se deforman por la desecación, aunque se contraigan bastante algunas de ellas, no exigen que su estudio se haga inmediatamente después de su recolección, exigencia de la cual resulta que, como en otras familias de hongos, se malogran para el estudio la mayoría de los ejemplares recogidos, cuando directamente no caen en manos de un botánico preparado para hacerlo.

Esto último, que sucede con los agaricáceos y con la mayoría de los hongos basidiomicetos, no ocurre con los poliporáceos en general, aunque sí con la mayoría de los que corresponden a su tribu de los Boleteos, pues los ejemplares pueden estudiarse casi sin dificultad después de secos y aun llevando largo tiempo en tal estado. Mas no se entienda por lo dicho que es indiferente hacer el estudio de los poliporáceos en fresco o en seco, pues si la mayor parte de ellos pueden desecarse sin deformación, todos ellos experimentan, más o menos, cambios de color y de consistencia; los caracteres de las esporas no se aprecian bien sino en fresco, y no pocas veces los aparatos esporíferos se hallan invadidos por las puestas de algunos insectos, cuyas larvas, al avivarse, destruyen y pulverizan los ejemplares en la primavera siguiente a su recolección.

Preciso es reconocer que la recolección de estos hongos es menos fácil que la de los agaricáceos, por ejemplo, pues, fuera de algunas especies que aparecen en las praderas o en el suelo de los bosques cubiertos de hojas en descomposición, la mayoría de sus especies, y sobre todo las menos conocidas, hay que recogerlas en los árboles, a veces en alturas de difícil acceso y donde no se perciben fácilmente entre las ramas cargadas de hojas, en los troncos cortados y dispersos entre la arboleda, en los tocones de árboles que fueron cortados hace años, y aun dentro de los troncos huecos: en sitios y circunstancias, en suma, que imponen una investigación paciente para hallarlos y una labor penosa para recogerlos.

Por otra parte, su conservación indefinida, por la causa antes indicada, ofrece dificultades, solamente vencidas por una esterilización capaz de matar todos los gérmenes de insectos que en los ejemplares se contengan, para lo cual los procedimientos químicos no son recomendables por la difícil penetración en los aparatos esporíferos, gruesos y a veces poco permeables, y por lo marcadamente que las impregnaciones de líquidos esterilizantes deterioran la superficie y coloraciones de los ejemplares. Los aparatos esporíferos, completamente secos y encerrados en una caja metálica bien cerrada y sumergida durante una hora en agua en ebullición, quedan esterilizados, según prácticamente he visto, por la aplicación de este procedimiento, que es suficientemente eficaz, pues mediante él he logrado conservar ejemplares de *Lenzites* y de *Polystictus*, que, sin esta preparación, se reducían a polvo dentro del primer año. Esterilizados por este procedimiento, conservo indefinidamente inalterables las especies más delicadas, pues los insectos no hacen puesta en los ejemplares ya secos y las larvas que pudieran propagarse en las colecciones no aparecen si en ellas solamente se colocan ejemplares previamente esterilizados o que, por lo menos, hayan permanecido secos

fuera de la colección durante más de un año, pues hay especies de *Fomes, Trametes* y otras que gozan de indemnidad aun sin necesidad de esterilización.

Si esta operación se practica directamente por la acción del agua hirviendo sobre los ejemplares (procedimiento que también es eficaz y que también hemos ensayado en mi laboratorio), éstos se deterioran notablemente, por lo que hubimos de renunciar a tal procedimiento; pero la exposición durante una hora o dos a la temperatura del agua hirviendo no ofrece ningún inconveniente. Para ello nos hemos servido de diversas disposiciones, que en resumen quedan reducidas al empleo de dos cajas metálicas concéntricas, la interior que cierre herméticamente y dispuesta de modo que no toque al fondo ni a las paredes de la exterior, a llenar de agua el espacio que queda entre ambas, cubriendo del todo a la caja interior, y a mantener la ebullición durante el tiempo ya indicado. Los ejemplares así tratados no sufren deformación ni alteración alguna.

Claro es que las colecciones de poliporáceos, por muy cuidadosamente que se proceda en la recolección y preparación, no son susceptibles de disponerse de modo tan atractivo para el público como otras colecciones histórico-naturales (las de conchas o insectos, por ejemplo); pero su valor como colecciones de estudio no depende de esto, y aun no siendo de gran efecto estético, como no lo es la por mí preparada y que sirve de base a esta memoria, la considero muy útil y reconozco que sin ella no hubiese podido intentar la realización de este trabajo.

Las consideraciones que llevo expuestas explican que las colecciones de poliporáceos no sean nunca numerosas, aun en los mejores museos forestales del extranjero, en los que suelen verse representados por ejemplares notables en algún concepto, más que por verdaderas colecciones de estudio. En España, donde las colecciones botánicas de todas clases son pobrísimas, las de hongos lo son mucho más, y

todo lo que yo he podido ver de poliporáceos en ellas ha sido algún o algunos ejemplares sueltos, por lo que casi he tenido que atenerme a lo reunido por mí durante algunos años en que vengo atendiendo al acopio de materiales de este grupo y a lo que me han procurado contados naturalistas conocedores de mi propósito.

Durante este período de reunión de materiales no me he limitado a la recolección y conservación de los ejemplares que he podido allegar, sino que constantemente he obtenido fotografías y diseños en color, hechos en fresco, ante los hongos recién recogidos, así como minuciosas descripciones, lo cual me ha permitido comparar luego con las descripciones de los libros actualmente utilizables y con los icones que aparecen, tanto en las obras clásicas, aun siendo ya algo antiguas, como en las obras modernas, las cuales contienen figuras en color, con frecuencia más detalladas y minuciosas, pues toda precaución es poca cuando se trata de especies cuya distinción es realmente difícil.

Debe también tenerse en cuenta que la iconografía de los poliporáceos no es tan rica y variada como la de los agaricáceos, ni siquiera proporcionalmente al número de especies contenidas en cada uno de estos dos grupos de hongos, siempre por la razón del menor atractivo, visualidad e interés utilitario de los poliporáceos. Así, mientras de ciertas especies de agaricáceos, principalmente de las comestibles o venenosas *(Amanita, Psalliota, Cantharellus)*, puede decirse que no faltan representaciones coloreadas en ninguna de las obras iconográficas acerca de los hongos publicadas, pocas, muy pocas, son las especies de poliporáceos de que existe un número regular de láminas, y la gran mayoría carecen de toda representación gráfica o existe de ellas una sola figura, olvidada en las páginas de alguna revista poco difundida.

Bastan las dificultades apuntadas para explicarnos cumplidamente por qué el estudio de estos hongos haya perma-

necido desatendido entre nosotros, hasta el punto de que aun hace pocos años pudiera creerse que nuestra flora fuera pobrísima en especies de esta familia, pues en la enumeración primera de las *Criptógamas de España y Portugal,* publicada en 1868 por el Sr. Colmeiro, sólo se citan 37 especies (1) y 39 en la primera flora criptogámica de España, que es la del Sr. Amo y Mora *(Flora criptogámica de la Península Ibérica),* aparecida en 1870 (2).

En el tomo V de la *Enumeración y revisión de las plantas de la Península Hispanolusitana,* del mencionado señor Colmeiro (1889), figuran 77 especies, de las que 22 sólo se mencionan en localidades portuguesas, quedando las indicadas allí como españolas reducidas a 55, y de ellas algunas consideradas como dudosas o cuestionables (3).

En el tomo I de la primera edición de mi *Compendio de la Flora Española* (1896) sólo se describen las especies admitidas entonces como incuestionables en España, o sean 53 (4). En la segunda edición de esta misma obra (1906), adicionando algunas especies comprobadas en un trabajo del señor Aranzadi *(Setas u hongos del país vasco,* 1897) y las que por aquella fecha había comprobado como nuevas por efecto de mi propía labor, publicadas en diversos trabajos, sólo ascienden a 88 especies genuinamente españolas (5).

---

(1) De éstas se atribuían 25 al género *Polyporus;* seis, al *Boletus,* y seis al *Dædalea.*

(2) Aparecen los géneros *Boletus* y *Dædalea* con igual número de especies que en la del Sr. Colmeiro, y el género *Polyporus* con 27 especies.

(3) En la distribución de especies corresponden 21 al género *Boletus,* 43 al *Polyporus,* cinco al *Dædalea,* uno al *Fistulina,* cuatro al *Trametes,* uno al *Hexagona* y dos al *Merulius.*

(4) *Fistulina,* uno; *Dædalea,* cuatro; *Boletus,* 16; *Trametes,* cuatro; *Polyporum,* 24, y *Lenzites,* cuatro.

(5) Corresponden: uno al género *Fistulina,* cuatro al *Dædalea,* 33 al *Boletus,* cuatro al *Physisporus,* cinco al *Trametes,* 36 al *Polyporus,* uno al *Merulius* y cuatro al *Lenzites.*

Todo parecía, pues, justificar la idea de la pobreza de nuestra flora de poliporáceos: tanto estas cifras estadísticas como la consideración de ser los climas secos y cálidos, dominantes en la mayoria de nuestras comarcas, los menos adecuados a la propagación de estos hongos, que, siendo en gran parte arborícolas, no deben abundar en un país donde, por circunstancias que no son de este lugar, se ha llegado tan rápidamente a la ruina de la riqueza forestal.

Y en efecto, nuestra flora es realmente pobre en poliporáceos, aunque no tanto como se creyó, pues al reunir y comprobar las notas y ejemplares y diseños que acerca de los hongos de esta familia he llegado a reunir, he visto que el número de las ya reconocidas excede positivamente del doble de las comprendidas en la más amplia de las enumeraciones citadas, y que entre las especies que admitimos hay algunas de incuestionable novedad. Esta consideración me ha decidido a dar publicidad a las observaciones reunidas durante bastantes años, limitándome, como hasta hoy, a la pura recolección de datos.

No representa este trabajo un resultado definitivo, sino un avance, pues la carencia de datos de extensas comarcas de nuestro país me permite suponer que existirán sin duda otras especies, quizá no pocas, y que al haber tenido lugar de hacer en todas ellas una exploración algo intensa y detenida, hubiese podido reunir más numerosos datos. Mas no habiéndome sido posible obtener sino raras noticias de las provincias del Sur y Este; atendiendo a que, por la índole de los trabajos descriptivos de Historia natural, en ellos se ha procedido siempre así, por avances sucesivos, no por obras que de una vez hayan agotado la materia, cosa imposible en las ciencias de observación, por los datos que del resto de la Península he llegado a reunir, especialmente del Norte y de los Pirineos, las regiones más ricas en arbolado, me permito creer, acaso equivocadamente, que el número de observaciones reunidas acerca de los poliporáceos de

España podrá justificar mi resolución de darlas a la publicidad, aunque sólo con el carácter de avance sobre lo anteriormente conocido y para que, ante la vista de los datos que este trabajo contiene, sea más fácil darse cuenta de lo que aun pueda permanecer desconocido respecto de nuestros poliporáceos.

***

Tal como la familia de los poliporáceos se caracteriza en la actualidad, aparece bien limitada dentro del extenso orden de los himenomicetos; teniendo siempre presente que el carácter de los poros que le da nombre, tan definido en general, se ha de entender con bastante amplitud y puede modificarse y enmascararse por dos causas. Es la primera el desgarramiento de los bordes de los poros y la comunicación de éstos unos con otros, con lo que se pierde el aspecto de panal, característico de las superficies inferiores de los aparatos esporíferos de esta familia, sustituyéndose por un dibujo laberíntico, como ocurre en el género *Dædalea*, por ejemplo; la otra causa de modificación es la amplitud extraordinaria de los tubos y su gran oblicuidad respecto de la superficie en que se abren, variación que hace sustituír los poros por surcos y anfractuosidades relativamente muy grandes, y que por su dirección radiante llegan a presentar una disposición semejante a las láminas características de los agaricáceos, como ocurre con las especies del género *Lenzites*, cuyos aparatos esporíferos, sin las numerosas anastomosis de sus láminas, podrían confundirse con los de la mencionada familia de los agaricáceos.

Es indudable que poliporáceos y agaricáceos presentan grandes afinidades, pues en la morfología de los aparatos esporíferos de diversos géneros de una y otra familia podemos observar no pocos casos de analogía. Así, por ejemplo, los de algunas especies de *Lenzites* y de *Polystictus*,

entre los poliporáceos, recuerdan los de ciertos agaricáceos que, carentes de pedicelo, se insertan lateralmente, como las especies de *Panus* y *Schizophyllum;* la vellosidad, tan frecuente en la cara superior de algunos *Polystictus*, es semejante a la de los *Schizophyllum* entre los agaricáceos; los *Pelleporus* tienen el sombrerillo embudado, por lo que recuerdan morfológicamente a algunos agaricáceos *(Cantharellus, Clitocybe);* los *Boletus, Strobilomyces, Boletinus, Peplopus* y *Pelleporus* presentan el sombrerillo y pedicelo con idéntica disposición que pudiéramos observar en la generalidad de los agaricáceos, sustituyendo las láminas radiantes de éstos por los tubos característicos de los poliporáceos; los *Peplopus*, de esta última familia, presentan en su pedicelo un anillo de igual origen, naturaleza y morfologia que el que observamos en tantos agaricáceos *(Psalliota, Lepiota, Armillaria, Pholiota,* ciertos *Amanita* y aun algún *Coprinus).*

Por otra parte, los aparatos esporíferos de los poliporáceos pueden presentar afinidad morfológica con los de otras familias de himenomicetos. Así, por ejemplo, la forma laminar que ostentan los de varios *Cladomeris* recuerda los de algunas especies de *Telephora;* los de ciertos *Lenzites* y el de la *Bulliardia unicolor* se parecen al de los *Stereum*, y las placas a que se reducen los de los géneros *Poria* y *Merulius*, entre los poliporáceos, se asemejan a los de los *Corticium* entre los teleferáceos. Su afinidad con los Hidnáceos se revela en la semejanza morfológica de los aparatos esporíferos de algunos *Hydnum,* como el *H. zonatum*, por ejemplo, con ciertos *Pelleporus*, como el *P. perennis*, y en la semejanza que las formas jóvenes de algunos *Irpex* (Hidnáceos) presentan con ciertos *Polystictus* (poliporáceos), hasta el punto de haber sido clasificadas y denominadas como especies de esta última familia (1). Las especies del

(1) El *Polystictus abietinus* (Pers.), por ejemplo, es actualmente considerado como una forma joven del *Irpex violaceus* (Pers.).

género *Odontia* (Hidnáceos) coinciden en su forma general con la placoidea de los *Poria* y *Merulius*, entre los poliporáceos.

***

Los caracteres de que podemos hacer uso para distinguir los diversos poliporáceos entre sí, son muchos y muy variados; pero se refieren siempre a la forma y detalles de estructura del aparato esporífero, pues su micelio es bastante homogéneo en todos ellos, no ofreciendo base á la sistemática para la distinción de los géneros y especies. Consta siempre de tenues filamentos blanquecinos, formados por hifas, y que constituyen una red complicada y generalmente susceptible de vivir algunos años, aun en los géneros en que los aparatos esporíferos son anuales. Estos filamentos son fáciles de observar desmenuzando las partes de los leños en descomposición que existen en los troncos invadidos por poliporáceos o removiendo con cuidado las tierras humíferas en que viven no pocas de sus especies; pero no es posible aislar una red micélica, ni aun una pequeña parte de ella, del medio en que vive, por la tenuidad y fragilidad extremas de los filamentillos que la constituyen.

La duración de los aparatos esporíferos es fácil de apreciar. De un modo general, puede afirmarse que son mucho más duraderos que los de los agaricáceos, y, sobre todo, que nunca son tan efímeros como los de algunos *Coprinus* de la mencionada familia. Sin embargo, la casi totalidad de los aparatos esporíferos de los poliporáceos son anuales, viviendo algunos días, como los *Boletus* más carnosos, o, más generalmente, algunas semanas, y aun algunos meses; pocos son los que viven un corto número de años; pero de ello son ejemplo los *Fomes* y *Ungularia*, entre otros, en los que el aparato que ha producido ya esporas persiste, y bajo su primer capa de tubos produce otra u otras, a modo de

estratos paralelos, correspondientes a los diversos períodos de vida activa por que sucesivamente ha ido pasando, ampliándose así en todas direcciones el volumen total del aparato esporífero. El número de las capas tubíferas estratificadas no siempre corresponde al número de años que vivió el aparato esporífero, pues cuando éste vegeta activamente en primavera y en otoño, caso relativamente frecuente en los aparatos esporíferos de larga duración, se producen dos de estas capas en el transcurso de un solo año; pero como la mayoría de las especies sólo vegetan activamente cuatro ó seis meses del año, constituyendo éstos una época continua (primavera y otoño, primavera y verano, verano y otoño, rara vez sólo en el invierno), lo general es que el número de capas tubíferas pueda interpretarse como indicación de haber vivido otros tantos años.

Los aparatos esporíferos de los poliporáceos, al desarrollarse lo hacen generalmente con relativa lentitud, no siendo en ellos frecuente esa eclosión rápida que tan frecuente es en los agaricáceos, y, en general, esta lentitud de crecimiento va unida con la consistencia; en los carnosos y blandos todas las fases de su desarrollo tienen lugar en un corto número de días, mientras que en los duros y de consistencia equivalente a la leñosa se necesita más largo período para alcanzar su total desarrollo.

La morfología de estos aparatos esporíferos es bastante variada, y nos suministra una base excelente para la distinción de los géneros y especies, siendo por esto de interés para la clasificación de estos hongos que se definan bien los tipos morfológicos y las voces técnicas con que cada uno de éstos debe ser designado, cosa en la cual reina aún hoy cierta anfibología, hasta el punto de que para que las denominaciones empleadas a este fin en esta Memoria tengan una significación exacta y precisa, necesitaremos hacer de dichas formas una exposición ordenada, para lo cual dividiremos estas formas en tres grandes secciones.

Incluiremos en la primera el caso más elemental de todos, aquel que llamaremos tipo *placoideo* (figs. 1, 2 y 3), en el que el himenóforo carece de forma característica, quedando reducido á una capa delgada, generalmente de uno o pocos milímetros, aplicada sobre el medio en que vive, que es casi siempre un tronco, en el área central de la cual aparecen los poros correspondientes a las aberturas de los tubos, que resultan diseminados y con muy escasa profundidad; a veces los bordes de esta placa aparecen despegados del medio

Figura 1.

Figura 2.

Figura 3.

en que ésta se halla inserta y más o menos levantados o revueltos hacia afuera.

Consideraremos dentro de la segunda sección aquellos tipos morfológicos que tienen por carácter general que el aparato esporífero, manifiestamente desarrollado, se halla sentado, es decir, que se inserta lateralmente, sin ofrecer una parte estéril y estrecha que podamos interpretar como pedicelo. Pueden distinguirse entre los tipos que ofrecen esta condición dos casos diversos: aquel en que los aparatos esporíferos ofrecen una de sus dimensiones muy reducida respecto de las otras dos, y son por consiguiente laminares, con una cara cóncava y otra convexa, y aquel en que, aun pudiendo ser menor el diámetro vertical o grosor que la longi-

tud y la latitud, no es tan desproporcionado respecto de éstas, o por lo menos de una de estas dimensiones, que no pueda calificarse de grueso en vez de laminar. En los laminares el grueso es diez, quince ó veinte veces menor que la menor de las otras dos dimensiones; en los que podemos calificar de gruesos, la distancia máxima vertical entre ambas superficies es igual aproximadamente a una de las otras dimensiones, o cuando más reducida se halle, será dos, tres o cuatro veces menor que la mayor de ellas. En esta clase de formas llamadas gruesas ninguna de las dos caras puede llegar á ser cóncava.

Varias son las formas que los aparatos laminares pueden

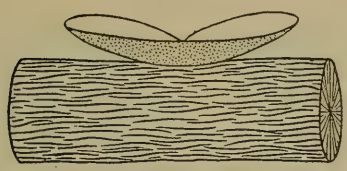


Figura 4.

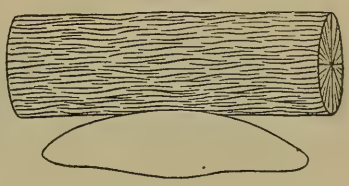


Figura 5.

ofrecer. En unos la lámina viene a ser un medio óvalo, círculo o elipse u ofrece un contorno arriñonado, presentando una de las superficies convexa y otra cóncava, recordando por su forma la del pabellón de la oreja humana o la de la valva de ciertas conchas de moluscos, formando el tipo que podemos llamar *concoideo* o *valvar* (fig. 4), que, a su vez, puede ofrecer dos variantes: con la superficie superior convexa y la inferior o fértil cóncava, que es la más frecuente, o revuelta hacia arriba cuando la superficie superior o estéril es la cóncava y la inferior o porífera la convexa, tipo morfológico al que llamaremos *concoideo invertido* (fig. 5).

Cuando la lámina crece más y sus bordes opuestos se sueldan formando un margen continuo, la forma ya no resulta semirredondeada, sino totalmente redonda, siempre cóncava por una superficie y convexa por la otra. En estos

casos, cuando la forma es profundamente cóncava, se puede comparar con la de una canastilla, y se llamará entonces *cestiforme* (fig. 6), y si es menos cóncava y sensiblemente alargada, recuerda la de ciertas barcas, y la denominaremos *aquillada* o *navicular* (fig. 7). Tanto la cestoidea como la aquillada pueden aparecer invertidas, esto es, con la cara

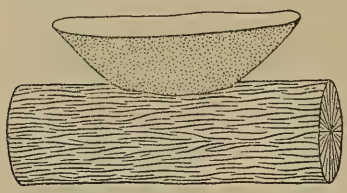


Figura 6.

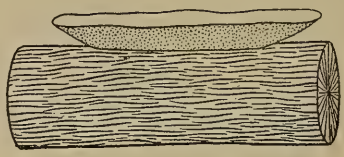


Figura 7.

superior convexa y la inferior o fértil cóncava, denominándose el aparato esporífero en tales casos *cestoideo invertido* (fig. 8) y *navicular invertido* (fig. 9), respectivamente.

Entre los aparatos esporíferos que, en oposición a la denominación de laminares, llamamos gruesos, hay que distinguir también varias formas: unos que tienen las dos super-

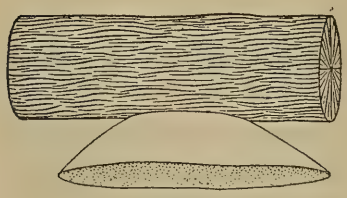


Figura 8.

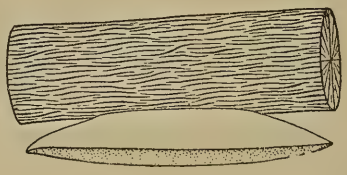


Figura 9.

ficies, superior e inferior, marcadamente convexas, y otros que tienen una de ellas aproximadamente plana y la otra acentuadamente convexa.

En los que presentan convexas ambas caras, pueden serlo éstas hasta tal punto que el eje vertical o grueso sea igual o mayor que las otras dos dimensiones, y cada cara represente una superficie semiconoidea, la superior directa

y la inferior invertida, y las dos con el vértice obtuso y redondeado. Llamaremos a esta forma *diconoidea* (fig. 10).

Si las superficies, siendo ambas convexas, lo son moderadamente, y por tanto la máxima dimensión vertical es menor que las otras dos dimensiones, la forma resultante es la de una almohadilla o cojinete semirredondeado en su contorno; si en esta forma la longitud no predomina de un modo marcado sobre la anchura, la forma resultante será la de una media lente, denominándose *semidiscoidea* (fig. 11); pero si la longitud fuese sensiblemente mayor que la anchura, recordará la forma de una lengua, y le llamaremos *lingüeforme* (fig. 12), forma que suele presentar la *Fistulina.*

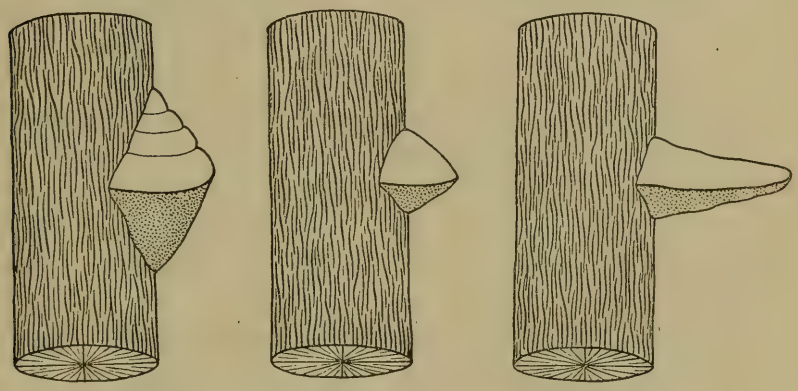


Figura 10. **Fihura 11.** **Figura 12.**

Las formas que presentan una cara plana y otra claramente convexa, son dos: la primera presenta la cara superior muy convexa y plana la inferior, forma que recuerda la de un casco de caballo, y que por esta razón llamaremos *ungulada* (fig. 13, *Fomes, Ungularia*), mientras que en la segunda la cara superior es plana y la inferior convexa o conoidea, morfología que nos recuerda la de ciertas palomillas ménsulas usadas en arquitectura, y a la que por tanto llamaremos *mensular* (fig. 14, *Dædalea Mensularia*).

En la tercera sección incluiremos todos aquellos aparatos esporíferos que se angosten en la base formando un pedicelo corto o largo; pero indudable, el cual puede ser sencillo

Figura 13.

Figura 14.

o ramoso. Este último puede considerarse como la reunión de los pedicelos de varios aparatos que nacen juntos y sobrepuestos sobre un mismo tronco, o como un pedicelo que se ramifica y cada una de sus ramas termina en una paleta o lámina gruesecita triangular, o en forma de segmento circular que presenta en su cara inferior los poros característicos de la fa-

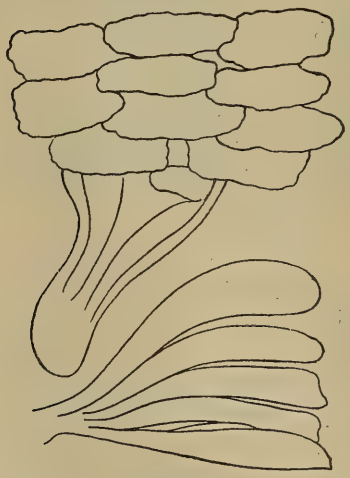


Figura 15

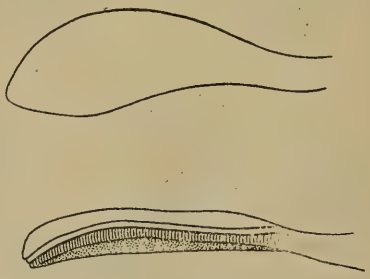


Figura 16.

milia; puede darse a esta forma el nombre de *zigópodo* (que visto de frente y lateralmente ser epresenta en la figura 15), forma que claramente vemos en las especies del género *Cladomeris* y más aún en las del *Cladodendron*.

Las formas que presentan un pedicelo sencillo pueden reducirse a dos: la primera, que tiene el pedicelo inserto lateralmente, o por lo menos muy excéntrico, disposición que denominaremos *laterípoda* (fig. 16; *Polyporus, Gano-*

Figura 17.

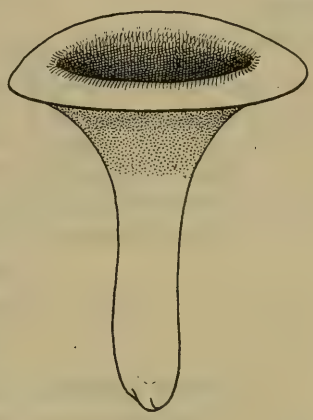


Figura 18.

derma); la otra presenta el pedicelo inserto en el centro de un verdadero sombrerillo circular o casi circular, disposición que llamaremos *centrípoda* (con pedicelo central); disposición que puede considerarse dividida en dos casos: con el sombrerillo convexo: *centrípoda discoideo* (fig. 17; *Boletus, Strobilomyces, Peplopus*), o con el sombrerillo embudado: *centrípodo infundibuliforme* (fig. 18; género *Pelleporus).*

Las formas que acabamos de reseñar son, como se ve, bastante numerosas, y para evitar toda confusión y hacer resaltar más las diferencias que separan a estos tipos morfológicos, condensaremos sistemáticamente éstos en un cuadro sinóptico.

- *A.*—Aparato esporífero amorfo, reducido a una placa o costra aplicada al soporte..... *Placoideo*
- *B.*—Aparato esporífero sentado lateralmente
  - Constituído por una lámina convexa por una cara y cóncava por otra.....
    - Lámina semirredondeada o arriñonada..... *Concoideo o valvar.* / *Concoideo invertido.*
    - Lámina redondeada formando una canastilla circular..... *Cestoideo.* / *Cestoideo invertido.*
    - Lámina redondeada formando una canastilla muy alargada..... *Navicular.* / *Navicular invertido.*
  - Constituído por una masa gruesa con las dos superficies convexas o una de ellas plana, nunca cóncava...
    - Semejando dos medios conos unidos por su base. *Diconoideo.*
    - Con las dos superficies convexas.....
      - Sin predominio de la longitud..... *Semidiscoideo o Semilentiforme.*
      - Con predominio de la longitud..... *Lingüeforme.*
    - Superficie superior muy convexa y la inferior plana..... *Ungulado.*
    - Superficie superior plana y la inferior muy convexa..... *Mensular.*
- *C.*—Aparato esporífero con pedicelo.....
  - Corto y dividido en ramas terminadas por un limbo univalvar o polivalvar..... *Zigópodo.*
  - No ramificado....
    - Lateral o excéntrico terminado por una lámina concoidea o por un sombrerillo... ..... *Laterípodo.*
    - Central y terminado por un sombrerillo..... *Centrípodo.*

Aunque la generalidad de los poliporáceos presentan sus aparatos esporíferos de forma constante, sin que sus variantes de tamaño y de detalles excedan de los límites de uno de los tipos morfológicos que acabamos de reseñar, hay algunos polimorfos hasta el punto de que sus aparatos esporíferos puedan corresponder a más de uno de estos tipos. En general, este polimorfismo es explicable por las variaciones que el desarrollo presenta según la edad, pues todos los aparatos esporíferos presentan gran analogía en su ini-

ciación, y al comenzar a aparecer en la superficie de los leños sólo se advierte como una mancha blanquecina, amarillenta o pardusca, cuyo relieve es tan escaso que ni siquiera puede calificarse de forma placoidea; más tarde, en uno o en varios puntos, se advierte un engrosamiento relativamente rapido, que se acusa desde luego como relieve, y que es la iniciación de un aparato esporífero, amorfo en sus comienzos, pero que bien pronto irá adquiriendo la forma característica.

Claro es que el recolector halla muchas veces ejemplares que no han adquirido aún su forma característica, lo cual puede originar vacilaciones en la determinación o confusión de unas especies con otras, por lo que el criterio de la forma, tratándose de organismos tan polimorfos, requiere alguna explicación a fin de fijar lo que debemos entender por forma característica de cada especie.

Si reconociésemos a todos los ejemplares que podemos hallar en la Naturaleza el mismo valor morfológico, hallaríamos que en muchas especies habrían de admitirse varias de las formas enumeradas, con lo que el valor fitográfico de este carácter vendría a ser casi nulo.

Convengamos en primer lugar en que las formas estériles, es decir, sin tubos ni poros formados, no pueden representar un valor positivo en la característica, y, cualquiera que sea su número y variedad, no podremos mencionarlas sino como expresión de un estado transitorio, sin admitir que puedan representar ni siquiera variedades o formas subordinadas a la entidad específica, pues aquéllas, como las especies, sólo pueden fundarse en la morfología de los ejemplares adultos.

Para evitar toda ambigüedad, debemos apreciar la forma en lo que podríamos llamar estado adulto del aparato esporífero, es decir, cuando en éste se presenta ya desarrollada la capa tubífera y los poros coloreados, y mejor aún cuando del inferior de los tubos se desprenden las esporas. Esto es

fácil de reconocer dejando los aparatos esporíferos breves horas sobre una cartulina, o mejor, para que al mismo tiempo se puedan recoger las esporas y estudiar sus caracteres microscópicos, sobre un vidrio plano, colocado a su vez sobre un fondo blanco o negro. La forma que al llegar a esta fase de madurez presente el aparato esporífero es la que debemos estimar como definitiva y característica, la que se menciona en la descripción de las especies y la que hay que comprobar en aquellos casos en que el polimorfismo suscite en nuestro ánimo vacilaciones en la apreciación del tipo morfológico, cosa que, por fortuna, no es frecuente, pues las grandes variantes de polimorfismo afectan sólo a un corto número de especies. Claro es que nunca debemos hacer esta apreciación en un solo ejemplar, sino en el mayor número posible de los que hallemos en la misma localidad.

Menos frecuentes, pero más difíciles de resolver, son otros casos de polimorfismo que no corresponden a las fases sucesivas del desarrollo, o sea a la edad del aparato esporífero, sino a las circunstancias en que tiene lugar el crecimiento de este aparato. Tal sucede, por ejemplo, cuando al crecimiento normal se opone un obstáculo mecánico, como la disposición de las ramas o la presión contra una piedra próxima, como ocurre cuando el aparato esporífero aparece en una encrucijada de aquéllas o en profundas anfractuosidades de la corteza. También el nacimiento sobre ramas demasiado delgadas suele ser causa de polimorfismo. El caso más notable de éste que me ha sido dado observar es el de la *Hemidiscia prunorum*, cuyos aparatos esporíferos, nacidos en los troncos y ramas gruesas, son primeramente casi placoideos y al fin semidiscoideos; pero si nacen sobre ramas delgadas (de dos o tres centímetros de diámetro) afectan la forma navicular, y si se originan varios juntos forman rosetas plegadas, sin que en la estructura y demás caracteres se observe variación alguna.

El criterio que en estos casos se debe seguir para apreciar cuál es la forma característica de la especie es el de considerar como normal la forma que domina, la que tiene abundante representación; las raras, las que sólo en muy contados ejemplares aparecen, pueden considerarse como anomalías, aplicando a los poliporáceos el mismo criterio que se aplica a las plantas superiores.

Todavía existe otra clase de polimorfismo de los poliporáceos, la que se refiere a las formas conídicas de éstos, cuya producción natural puede decirse que empieza a sernos conocida, pero que de un modo general puede afirmarse que afecta poco a la sistemática, pues tales formas, como las obtenidas cultivando artificialmente las esporas de los poliporáceos en los medios puestos en uso por la bacteriología, no recuerdan las de los poliporáceos normales, único objeto de esta Memoria.

Los tejidos que forman la casi totalidad del aparato esporífero de los poliporáceos, esto es, toda su masa, excepto los tubos, poros y esporas, forman lo que de un modo general se denomina la carne, aunque este nombre no sea muy propio en bastantes especies, distinguiéndose, cuando más, la capa superficial de ésta (la situada bajo la capa cuticular) cuando por su color y consistencia se distingue especialmente de los tejidos internos. Esta carne o tejido estéril nos suministra diversas observaciones utilizadas en la descriptiva de estos hongos.

Es la primera la que se refiere a la consistencia, blanda y jugosa siempre en las primeras fases, que puede continuar siéndolo hasta la maduración del aparato esporífero, y aun hasta su destrucción, pues los que poseen esta propiedad son putrescibles inmediatamente después de la maduración y esporulación *(Boletus, Strobilomyces)*. Mas en otros, apenas se va marcando la forma adulta de estos aparatos, las hifas que los forman adquieren gran grosor en sus paredes; éstas se tiñen entonces con frecuencia de colores amari-

llentos, ocráceos o parduscos, y la carne o tejido estéril se convierte en una masa de consistencia apergaminada, acorchada, y aun equivalente, por su dureza y resistencia al corte, a la de una verdadera madera. Las especies que más o menos participan de este carácter, que, fuera de las tribus de los fisisporeos y boleteos, son casi todas las de la familia, se desecan sin deformarse, y si la desecación se hace a la sombra, su decoloración es muy lenta, por lo que, como las plantas superiores desecadas bajo presión, son susceptibles de ser estudiadas aun mucho tiempo después de su recolección y se pueden conservar en las colecciones, convenientemente esterilizadas. El color y consistencia de estos tejidos suministran excelentes caracteres.

En aquellos aparatos esporíferos que no se endurecen, cuyos tejidos debieran ser los únicos que sin impropiedad pudiesen denominarse carne, pueden conservar la coloración blanquecina o levemente amarillenta cuando se cortan y exponen a la acción oxidante del aire, o cuando se comprimen fuertemente, provocando la extravasación de los zumos contenidos en las hifas, pero en no pocas especies (principalmente del género *Boletus)* se observa que la carne cambia instantáneamente su coloración en otra más o menos intensamente azulada, menos frecuentemente verdosa o negruzca: carácter muy util para la distinción de ciertas especies.

Estos cambios de coloración pueden afectar también a la capa tubífera, y aun a los poros los cambios de color por la presión, pues en varias especies quedan marcadas en color las impresiones de los dedos, resultantes del esfuerzo empleado para arrancar los aparatos esporíferos. Otros caracteres de la carne son el dejar fluír algunas gotas de líquidos coloreados u opalescentes, bien naturalmente *(Merulius)*, o bien en los cortes recientes *(Fistulina)*, o también el sabor, escaso o nulo en general, agradable y aun aromático a veces *(Boletus edulis)*, y olor de seta comestible que tienen mu-

chos en fresco, y aun el finamente perfumado que se desprende de algunos *(Trametes odora, suaveolens)*.

Las láminas himeniales de los poliporáceos aparecen, excepto en los que tienen el aparato esporífero de tipo placoideo, en la cara inferior de dicho aparato, y en general presentan una estructura muy semejante a las tan conocidas de los agaricáceos, es decir, un fieltro laminar constituído por las hifas y tapizado por un himenio cuyos elementos son los basidios y parafisos. La dirección de estas láminas respecto de los tejidos estériles o carne en que se insertan, es generalmente normal a la superficie inferior del aparato, en la cual aparecen insertas. Estas láminas son generalmente muy delgadas, del grueso de un papel común; pero en algunas especies adquieren mayor grosor: hasta de uno y aun dos milímetros en ciertos *Dædalea*. La anchura de estas láminas, que se mide por la longitud de los tubos que por su entrecruzamiento originan, varía bastante: desde un milímetro escaso (ciertos *Polystictus)*, hasta algo más de dos centímetros (ciertos *Fomes, Ungularia, Hemidiscia*, etc.). La coloración de su superficie, inicialmente blanca, adquiere pronto tonos amarillentos, acanelados, rojizos o parduscos, según sea la coloración propia de las esporas maduras de la repetida especie.

De la intersección y soldadura de las láminas entre sí resultan los tubos, prismáticos siempre exteriormente, pero cuya sección transversal puede dejar de ser poligonal por el redondeamiento de los ángulos internos del prisma, producido por el engruesamiento de las paredes en las aristas o suturas. El diámetro de estos tubos es bastante variable, aunque en la mayoría de los casos menor de medio milímetro; en muchos excede de medio, y en muy pocos alcanza hasta cinco o seis milímetros *(Favolus, Hexagona)*; en cuanto a su longitud, dependiente siempre de la anchura de las láminas, nos remitimos a lo allí expresado, igualmente que por lo que se refiere a las coloraciones.

Estos tubos, como las láminas que los originan, son casi siempre normales a la superficie inferior del aparato esporífero donde se insertan, formando capas, que en unos se adhieren tan íntimamente a los tejidos estériles de aquélla que su separación es realmente difícil de lograr, como ocurre en la mayoría de los géneros *(Polyporus, Cladomeris, Trametes,* etcétera), mientras que en otros casos la capa tubífera se desprende de la carne con gran facilidad *(Boletus, Strobilomyces, Boletinus).*

Los tubos paralelos entre sí forman una capa continua,

Figura 20. **Figura 19.** **Figura 21.**

que ocupa toda la capa inferior del aparato esporífero; pero nunca todos los tubos de la misma capa alcanzan igual longitud, pues es frecuente que esta dimensión alcance mayor longitud en la porción media, y aun en la interna, y decrezca según vayamos aproximándonos a los bordes del aparato esporífero. En las especies que tienen sombrerillo con pedicelo central, los tubos alcanzan generalmente su mayor longitud en la porción media de esta capa, que forma un área anular concéntrica con la circunferencia del aparato. En el borde interno, adyacente al extremo superior del pedicelo, pueden presentarse, respecto de este particular, tres disposiciones diferentes: 1.ª, que los tubos, ciñendo o envolviendo al pedicelo, lleguen hasta éste, y adhiriéndose a él; siendo en esta zona tan largos o poco menos que en la zona anular media antes indicada *(tubos adheridos,* fig. 19), con lo que la superficie porífera resulta plana o levemente convexa; 2.ª, que

los tubos no sólo lleguen hasta el pecíolo y estén adheridos a éste, sino que, alcanzando en esta zona mayor longitud, originen una porción saliente ciñendo el extremo superior del pedicelo (*tubos decurrentes*, fig. 20), con lo que la superficie porífera resulta cónica invertida; y 3.ª, que la longitud de los tubos se acorte al aproximarse al pedicelo, hasta abortar en la zona próxima al extremo superior de éste, con el que no llegan a tener contacto, por lo que la superficie inferior del sombrerillo aparece deprimida en su área central y en ella se encuentra libremente inserto el pedicelo (*tubos libres*, fig. 21).

Los tubos, siendo siempre paralelos entre sí, pueden alguna vez también ser oblicuos, y aun tener una oblicuidad muy manifiesta respecto de la superficie del tejido estéril en que se insertan y de aquella que forman sus poros o aberturas de su base inferior. Cuando a esta condición unen la de tener un diámetro relativamente grande, la superficie inferior de la capa tubífera no presenta realmente poros, sino otras disposiciones, de que luego haremos mención.

En general, el desarrollo de la capa o capas tubíferas no permite que la carne asome al descubierto por la cara inferior del aparato esporífero, y ésta se ve homogéneamente cubierta de los poros característicos de la familia, faltando tan sólo en el borde, o en algún caso en éste y en una estrecha zona que rodea el ápice del pedicelo. Pero hay algunos casos en que la capa tubífera aparece atravesada en ciertos puntos por masas del tejido estéril o carne, que descienden, aflorando a la superficie inferior del aparato esporífero, donde forman islotes irregulares entre la reticulación constituída por los poros (*Trametes*, *Hexagona*, *Lenzites*, *Dædalea*, y en la tribu de los fisisporeos).

En esta tribu no existen láminas bien definidas ni tubos bien manifiestos. Las cavidades, cilíndricas y poco profundas o embudadas, que corresponden a estos órganos se hallan distanciadas, por ser grande el grueso de los tabiques

que las separan; sus bocas o poros no cubren homogéneamente un área, por existir entre ellos porciones relativamente grandes de carne sin poros.

Fuera de estos casos, excepcionales dentro de la familia, es decir, cuando hay tubos bien definidos, estrechos y normales a la superficie en que se insertan, sus bocas o poros dibujan una finísima reticulación, claramente perceptible, en

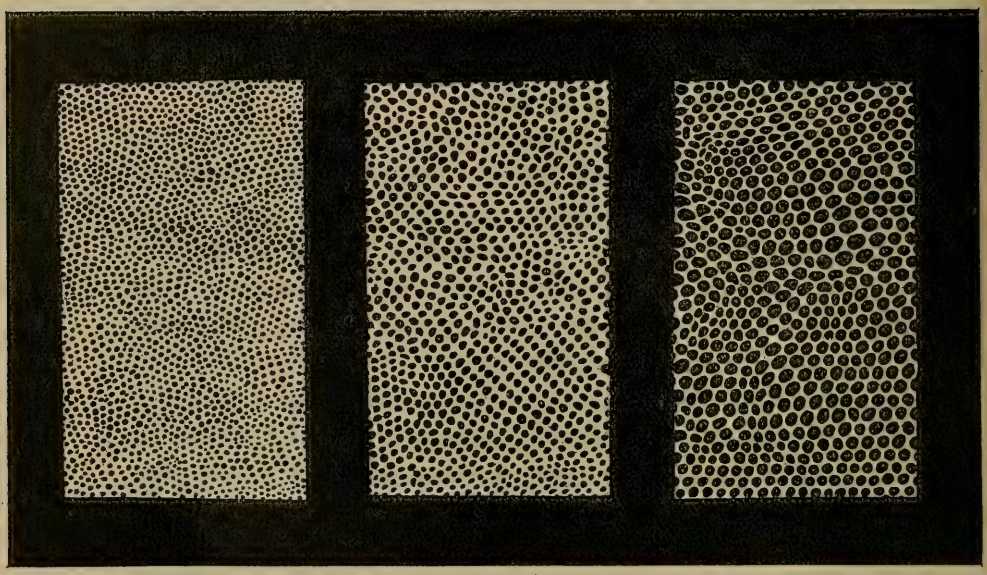


Figura 22. Figura 23. Figura 24.

la superficie inferior del aparato esporífero, constituyendo así el tipo de *reticula poroidea*, que es el más frecuente en esta familia, aunque no el único. Las mallas de esta red pueden ser poligonales, redondas o alargadas, nunca iguales con rigor geométrico; pero se califican de tales siempre que sus diferencias no sean tan acentuadas que a simple vista se perciba claramente su diversidad.

Pueden dividirse los poros por su tamaño, o, mejor dicho, por la longitud de su diámetro mayor, en pequeños (hasta cinco o seis décimas de milímetro, fig. 22), medianos (de

seis a 12 décimas de milímetro, fig. 23) y grandes (de 13 a 20 décimas de milímetro, fig. 24).

Aparte de estas variantes del tipo poroideo, la superficie del aparato esporífero puede presentar otras disposiciones que realmente no aparecen como poros. Es una de ellas la constituída también por láminas normales a la superficie en que se insertan, pero cuyas mallas, por la magnitud de sus

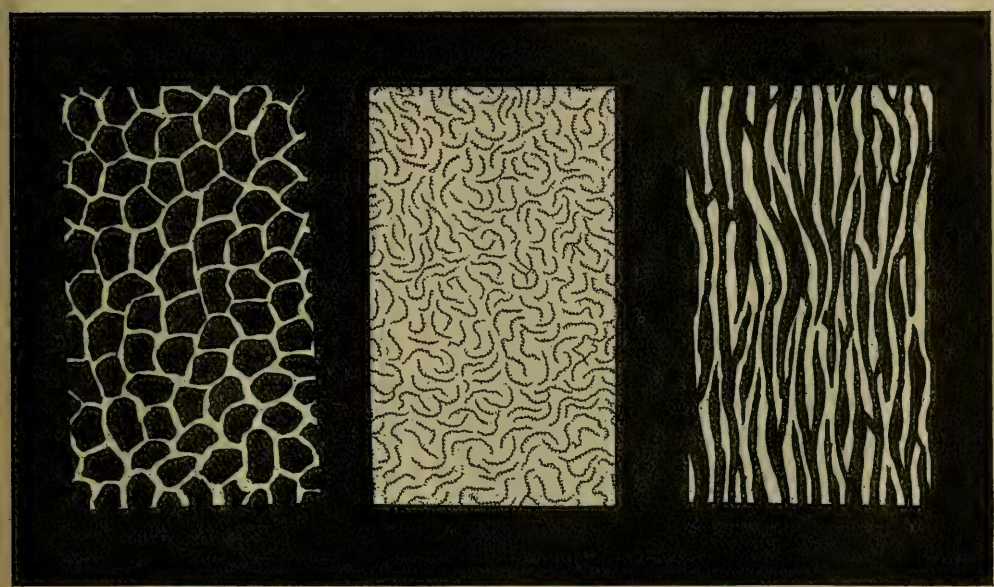


Fig. 25. Fig. 27. Fig. 26.

dimensiones, de cinco a seis milímetros como mínimum, no pueden calificarse de poros. Es la disposición que podemos llamar *retícula poligonoidea* (fig. 25), y que tan caracterizada aparece en los géneros *Favolus* y *Hexagona*.

La existencia de poros bastante grandes y desgarrados, que comunicándose entre sí originan surcos o anfractuosidades irregulares, separados por gruesas láminas ondeadas y algo ramificadas, origina el tipo bien llamado *retícula dedaloidea* (fig. 26), cuyo tipo es el género *Dædalea;* a éste pue-

den asimilarse algunas especies de *Trametes*. Una cosa semejante en su origen, pues resulta de la existencia de poros que por tener el borde con grietas radiantes aparecen como estrellados y por concordar entre sí constituyen surcos estrechos, sinuosos y de bordes plegados o dentados, es la que se observa en las especies del género *Merulius* (fig. 27), y para el que proponemos el nombre de *retícula merulioidea*.

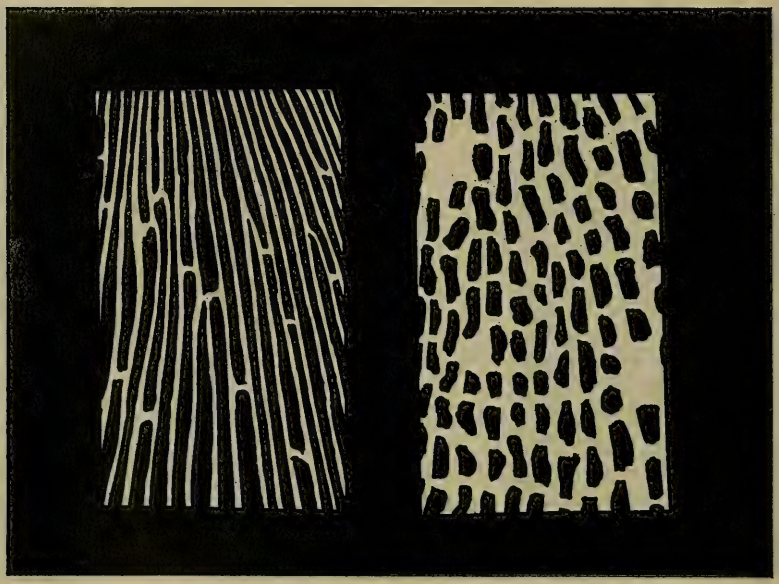


Fig. 28. Fig. 29.

En los géneros en que, por tener los tubos anchos y oblicuos, éstos aparecen truncados oblicuamente, la superficie inferior del aparato esporífero aparece con surcos elipsoideos y ovales alargadísimos y separados por relieves salientes y en dirección radial, que sin impropiedad pueden calificarse de laminillas himeniales radiantes. Presentan por este carácter un aspecto que sensiblemente recuerda el de los agaricáceos, distinguiendose de éstos en que las láminas presentan anastomosis que interrumpen los surcos radiantes

interlaminares, que en los agaricáceos son siempre continuos desde su origen hasta el borde del sombrerillo. En los agaricáceos, como en los poliporáceos a que ahora aludimos, son frecuentes las bifurcaciones de las láminas; pero en aquéllos no existen nunca verdaderas anastomosis. Realmente, los poliporáceos con láminas radiantes presentan dos tipos morfológicos diferentes, y al distinguirlos por primera vez, proponemos para ellos dos denominaciones diversas. Cuando las láminas son mucho menos gruesas que la anchura de los surcos y las anastomosis poco frecuentes, como en los *Lenzites*, resulta una disposición que debe llamarse *retícula lenzitoidea* (fig. 28), y cuando el grosor de las láminas iguala y aun excede a la anchura de los surcos y éstos aparecen interrumpidos por anastomosis relativamente frecuentes, predominando poros alargados, sin la complicación *dedaloidea*, y frecuencia de colonias de tejido estéril o carne *(Trametes)*, proponemos para este tipo la designación de *retícula trametoidea* (fig. 29).

En el tipo general, el de la retícula poroidea, el estado del borde en los poros suministra también buenos caracteres distintivos, pues puede hallarse entero, con reborde prominente como un festón, dentado, pestañoso, laciniado o irregularmente desgarrado. En este último caso se establece comunicación de cada poro con los adyacentes, lo cual modifica la red hasta el punto de dejar de serlo, pues cuando este carácter es muy acentuado, las mallas de la red son sustituídas por surcos ondulados y anfractuosos que constituyen los dibujos laberintiforme y merulioideo.

Muy diversas son las coloraciones que los poros pueden ostentar: desde el blanco más puro (*Mensularia nivea, M. alba)*, el blanco sucio (*Boletus nigrescens, castaneus, cerœus, fuliginosus, vaccinus)*, el gris claro *(Pelleporus perennis, Boletus rufus, laricinus, griseus, Polystictus adustus)*, amarillenta (*Peplopus flavus, luteus, Boletus parasiticus*), amarillo de azufre (*Cladomeris sulfurea, Boletus apendiculatus, oliva-*

ceus, gentilis, granulatus, amarillo verdoso *(Boletus velifer, bovinus)*, anaranjado (*Boletus luridus, Lupinus, discolor, Polystictus croceus*), rosado *(Fomes roseus, Boletus felleus amarellus, erythropus)*, rojo vivo *(Boletus tuberosus, Poria incarnata)*, rojo de ladrillo (*Boletus piperatus)*, ocráceo *(Polyporus fimbriatus)*, pardo leonado *(Polystictus radiatus, Spongioides cryptarun, Hemidiscia hispida)*, y hasta negruzco.

Los ejemplos de los colores aquí citados, como los que se mencionan en la descripción de las especies, son los típicos o característicos de cada una de ellas; mas estas coloraciones no son las únicas que los poros presentan, pues antes, y aun después, pueden ostentar matices bastante diversos, condición que se designa con el nombre de policromismo y que es bastante frecuente en los poliporáceos. Estas variantes de coloración de los poros, como las de los tubos, son resultado del estado de mayor o menor madurez de las esporas. Estas son incoloras o casi incoloras al comenzar su desarrollo, por lo que los poros son en general blanquecinos en un principio; mas luego presentan, cada vez más acentuada, la coloración que es propia de su madurez. Los poros, después del desprendimiento de las esporas, van perdiendo su matiz característico, hasta alcanzar los tonos ocráceos o pardo-claros mal definidos en que terminan los de todos los aparatos que alcanzan larga duración.

Cuando los tubos son marcadamente oblicuos y de diámetro relativamente grande, como en todos los demás tipos de reticulación en que verdaderamente no hay poros, resultan éstos sustituídos por surcos irregulares separados por láminas desiguales, llegando a acentuarse este carácter hasta convertirse estas láminas en el detalle dominante del relieve de la superficie inferior del aparato esporífero, en la que las láminas himeniales radiantes, como en los agaricáceos, no se distinguen de las de éstos sino por las anastomosis que entre ellas existen. En estos casos no hay tantas variantes

de color, pues estas láminas son blancas, o de colores leonados o grisáceos, de matiz muy claro.

Los basidios no ofrecen diferencias en que fundar la distinción de las especies, pues son todos muy análogos; no así las esporas, que a veces ofrecen diferencias claras aun entre especies muy próximas. El tamaño de éstas puede variar desde tres o cuatro μ, tamaño mínimum, hasta 18 o 20 μ como magnitud máxima, en su dirección mayor, siendo las dimensiones más frecuentes las comprendidas entre seis a ocho para unos géneros y 10 a 13 para otros. Los tamaños mínimos son poco frecuentes; pero como ejemplo de esporas que no pasan de tres o cuatro μ podemos citar el *Trametes Pini*, la *Boudiera pectinata* y el *Fomes Braunii*, los *Polystictus rutilans* y *floriformis* y la *Poria obliqua*. Los tamaños máximos son igualmente raros; pero entre las especies cuyas esporas pueden llegar, y aun pasan de 18 μ, podemos citar el *Boletus pachypus, æreus, sanguineus, spadicens, jonquilleus, Fomes fomentarius* y *Trametes campestris*.

La forma más general de las esporas es la elipsoidea con el diámetro máximo, próximamente vez y media mayor que los otros; pero hay también casos en que el eje mayor se prolonga considerablemente, resultando entonces las esporas muy alargadas *(Boletus lateritius, spadiceus, Poria subspadicea, micans)*, y aun largas y sensiblemente curvas *(Lenzites sæpiaria, Trametes rubescens)*.

La coloración varía: desde las que pueden considerarse incoloras en el campo de la visión microscópica *(Fomes igniarius, Dædalea labyrinthiformis)*, a las que aparecen ambarinas u amarillentas pálidas *(Boletus griseus, Tridentinus, Polystictus tinctorius, Fomes marginatus)*, pardo-violáceas *(Boletus lividus, variegatus, Friesia applanata, Trametes Pini)*, purpúreo-violadas *(Boletus purpureus, viscidus, Poria violacea* y *purpurea)*, y hasta parda *(Boletus viscidus, aureus, Ganoderma nitens, Poria collabens)*.

Para apreciar la coloración típica de las esporas en el

campo del microscopio es preciso que aquéllas se hallen en plena madurez, para lo que deben recogerse las esporas que se desprenden del himenio, lo que se consigue colocando el aparato esporífero sobre una placa de vidrio, que a su vez esté sobre un papel negro o blanco. Si el aparato esporífero tiene pie central, convendrá que la placa de vidrio esté perforada en su centro, o, lo que es más fácil, combinar varias placas de vidrio de modo que resulte un hueco en el centro para hacer pasar por él el pedicelo. Después, con un pincel, se barren con cuidado para reunirlas en un sitio dado y hacer la correspondiente preparación.

Ofrece también caracteres notables la superficie de la exospora, que frecuentemente es lisa, pero que en otros casos ofrece relieves notables, pudiendo notarse en ella poros germinativos en número de dos *(Boletus appendiculatus, Polyporus squamosus)*, con tres o más *(Boletus porphyrosporus, reticulatus, calopus, olivaceus, chrysenteron)*, o toda la superficie sembrada de hoyitos, que aparecen como puntos translúcidos *(Peplopus flavus, luteus, Boletus canescens, spadiceus, felleus, Fistulina hepatica, Polystictus fragilis* y otras), o de papilas salientes en forma de verruguitas obtusas *(Boletus sanguineus, Polyporus leucomelas, Ganoderma nitens*, etc.), o de papilas aguzadas y espiniformes, que hacen aparecer toda la superficie equimulada *(Polyporus picipes, Cladomeris montana, Fomes roseus, Polystictus mollis, Bulliardia unicolor)* y nunca aparece adornada de un dibujo verdaderamente roticulado.

***

La clasificación de los poliporáceos, aun habiendo sufrido diversas modificaciones, no puede decirse que, en el estado actual de estos conocimientos, sea capaz de satisfacernos hasta el punto de no demandar ninguna reforma. Aun

en las obras extranjeras más modernas, la clasificación adolece de los defectos señalados, y la inseguridad respecto de la colocación de muchas especies hace que aun el actual género *Polyporus*, despojado ya por sucesivas desmembraciones de la multitud de especies que los antiguos incluyeran en él, como otros, *Polystictus y Dædalea* por ejemplo, sigan conteniendo especies correspondientes a los más diversos tipos morfológicos.

Los géneros que en los primeros tiempos de la nomenclatura se establecieron para los hongos que más tarde, mediante los progresos de la sistemática, han venido a constituír la familia de los poliporáceos, resultaron bien pronto insuficientes para contener todas las formas que una observación más atenta iba descubriendo entre estos hongos. De aquí que a los primeros géneros *(Polyporus, Boletus, Fistulina)* han ido agregándose otros nuevos, que los autores posteriores fueron estableciendo, a fin de satisfacer más cumplidamente las exigencias impuestas por el mejor conocimiento de las formas específicas propias de estos hongos *(Cladomeris, Dædalea, Fomes, Polystictus, Strobilomyces, Trametes, Lenzites, Poria, Boletinus)*.

El primitivo género *Boletus,* más especialmente, encerraba tal número y diversidad de especies y de tan variada morfología, que de él han ido derivándose, como secciones primero, y como géneros independientes más tarde, varios de los que últimamente acabamos de mencionar, y un proceso análogo ha contribuído al aumento de los géneros por desmembración del primitivo género *Polyporus*.

Mas, aun así, estas desmembraciones no han conseguido reducir el número de especies contenidas en los dos géneros más grandes, *Boletus* y *Polyporus*, pues al par que se segregaban de ellos ciertas series de especies para constituír los géneros nuevos, el mejor conocimiento de las especies imponía la admisión de otras nuevas, tanto en los géneros primitivos como en los nuevos. Y si al menos se hubiese con-

seguido con toda esta labor que cada género sólo encerrara especies de gran afinidad morfológica, se habría conseguido bastante; mas no se ha logrado esa ventaja ni siquiera en todos los géneros modernos, y menos en los que aun subsisten con las denominaciones antiguas aunque restringidos por una característica más concreta, pues aun las especies comprendidas actualmente en los géneros *Boletus* y *Polyporus*, y aun en otros de origen menos antiguo, como *Fomes*, *Lenzites*, *Trametes* y *Polystictus*, contienen especies de una morfología muy variada y están pidiendo a voces una reforma que evite este inconveniente, para que en esta parte de la sistemática se cumplan los buenos cánones fitográficos y se constituyan géneros que no encierren sino especies de gran afinidad, como sucede en la generalidad de las series, tanto de la criptogamia como de la fanerogamia. Aun entendiendo actualmente el género *Polyporus* en un sentido restringido, todavía contiene especies con pie central, excéntrico y lateral, lo que no se admitiría en la familia de los agaricáceos. Es evidente, y el recto juicio así lo reclama, que los géneros de poliporáceos deben ser tan naturales y de característica tan precisa como los de los agaricáceos, y que debe ponerse fin a este estado de anarquía, que hace que ciertas especies figuren para unos autores, aun entre los modernos, en el género *Lenzites* y para otros en el *Dædalea*, y que las especies que para unos figuran en el género *Fomes* las serien otros en el *Polystictus*, por ejemplo.

Pero reconocida en principio esta necesidad, precisa buscar la forma de establecer definitivamente la base del procedimiento para obtener una clave genérica limpia de tales defectos, y esto requiere alguna consideración previa acerca de qué caracteres son los mejores y más indicados para la delimitación de las entidades genéricas.

Hay dos órdenes de caracteres que principalmente pueden proponerse para realizar este fin: los que se refieren a los

tubos y poros y los que se derivan de la morfología del aparato esporífero. El primero es un carácter de gran constancia, en general, aunque no absoluta, siendo lo ordinario que la estructura himenial y morfología de los tabiques y tubos, el relieve, en suma, de la cara inferior del aparato esporífero, ofrezca disposiciones diferentes, características de cada grupo, disposiciones que ya hemos reseñado. Pero de los tipos que acerca de estas disposiciones hemos distinguido no puede asignarse uno a cada género, pues de ellos bastantes se repiten en diversos géneros, especialmente el poroideo, que, en sus diversos grados, se halla representado en gran parte de los géneros de esta familia.

La morfología del aparato esporífero es carácter menos constante, y, aun teniendo presentes los diversos tipos morfológicos que oportunamente hemos distinguido, puede afirmarse que también estas formas se repiten en diferectes géneros de los hasta hoy admitidos, especialmente algunas de ellas. Esto, aparte del polimorfismo de algunas especies, cuyos aparatos esporíferos jóvenes afectan formas transitorias, no alcanzando la definitiva sino al llegar al estado adulto, y de la facilidad que estos órganos tienen para modelarse irregularmente cuando nacen en sitios en los que algún obstáculo mecánico se oponga a su libre formación. Por esto, si hiciésemos una clasificación puramente morfológica y, sin atender a la edad ni a las anomalías morfológicas, la aplicásemos con todo rigor a la determinación sistemática de una colección de aparatos esporíferos, caeríamos en el absurdo de referir en algún caso ejemplares de una misma especie a dos y aun a más géneros. El carácter morfológico debe tener un valor grande en la sistemática, mayor, en nuestra opinión, del que hasta hoy se le ha reconocido en la clasificación de los poliporáceos; pero teniendo siempre muy presente el criterio que hemos señalado para su apreciación, pues de otro modo los errores serían tan grandes que casi habría que renunciar a

tener en cuenta un carácter cuya apreciación es, en general, tan fácil.

Los demás caracteres: coloración y estado superficial de la cara superior del aparato esporífero, consistencia, matiz y caracteres organolépticos de la carne, variantes morfológicas y de coloración que pueden ofrecer, dentro de cualquiera de los tipos indicados para estos órganos, los tubos y poros, y las disposiciones que a éstos equivalen, no nos ofrecen base posible para la constitución de los géneros: así que toda esta característica únicamente se utiliza, con buen acuerdo, para la determinación de las especies.

Pero de los dos órdenes de caracteres que podemos considerar aplicables a la distinción de los géneros, no debemos aplicar ninguno con criterio exclusivo. El empleo únicamente de caracteres morfológicos nos obligaría a reconocer mayor parentesco entre algunas formas de teleforáceos y otras de poliporáceos que el que liga a estas últimas entre sí. La apreciación única de la disposición de los poros o de sus órganos equivalentes nos llevaría a reunir en un solo género la mayoría de la familia y a seriar en cada género especies de representantes de todos o de casi todos los tipos morfológicos señalados.

Opinamos, pues, que para lograr actualmente una buena constitución de los géneros debemos caracterizar éstos asociando discretamente los caracteres morfológicos con los de los tubos, poros y disposiciones que puedan sustituír a estos órganos. Entendemos como lo más práctico para la distinción de los géneros que, exigiendo siempre a éstos una misma disposición himenial, no demos cabida en cada uno sino a especies cuyos aparatos esporíferos ofrezcan gran semejanza en su forma. Así, pues, no admitiremos como entidades genéricas sino aquellas que se caractericen por tener los aparatos esporíferos de un solo tipo morfológico y que posean respecto a tubos, capas de éstos y poros gran analogía. Entendemos que cada género debe caracterizarse, al

mismo tiempo que por una disposición idéntica de tubos y poros o de sus órganos equivalentes, por la coincidencia en la forma general de los aparatos esporíferos de las especies que en él se incluyan y que, correspondiendo éstas al mismo tipo morfológico, tengan también común la duración vital de estos aparatos. Creemos que no deben reunirse jamás en un mismo género especies que no poseen nunca más de una capa de tubos mezcladas con otras que llegan a presentar dos o más capas superpuestas o estratificadas.

Este criterio nos ha llevado a proponer una reforma radical en la clasificación de los poliporáceos, creando algunos géneros nuevos, fraccionando otros que nos han parecido heterogéneos; mas huyendo, en lo posible, de complicar la nomenclatura, y pensando que uno de los grandes males que afectan al estado presente de ésta es la facilidad con que los autores lanzan a la circulación nuevos nombres genéricos, y sobre todo específicos, hemos procurado, siempre que nos ha sido factible, utilizar nombres antes empleados para designar secciones dentro de los géneros cuya división proponemos; y cuando esto no ha sido posible sin originar confusión, hemos empleado nombres de precisa significación morfológica, ya que las formas de los aparatos esporíferos eran el principal fundamento para establecer las nuevas entidades genéricas. Sólo en los casos en que esto no era dable hemos tratado de rendir, en las nuevas denominaciones genéricas, un tributo de consideración a la memoria de ilustres micólogos anteriores a nuestro tiempo.

La asociación de estos géneros para la formación de tribus dentro de la familia nos parece preferible hacerla dando marcada preferencia a la morfología de los aparatos esporíferos, obteniendo así una división primaria de la familia en siete tribus, cuya distinción no deja lugar a ninguna duda en la apreciación de los caracteres. Subordinándonos a este criterio hemos construído la clave de las tribus, y las

de los géneros dentro de cada tribu, que preceden a la descripción de los géneros y especies.

Creemos con esto vencer, por lo que a los poliporáceos se refiere, algunas de las dificultades que el estudio de estos hongos ofrece actualmente, si bien lo hacemos con el natural temor de que no todos los micólogos actuales se hallen conformes con nuestros puntos de vista y dispuestos a aceptar las reformas que proponemos. Sólo después de muy detenida meditación, y cuando hemos revisado toda nuestra flora de poliporáceos con arreglo a las claves que figuran en esta Memoria, cuando durante largo tiempo las hemos ensayado en la práctica y comprobado reiterada y detenidamente, nos hemos decidido a publicarlas, creyendo que si las reformas hechas son aceptadas habremos contribuído en algo al esclarecimiento de esta parte de la serie, que en su estado presente ofrece evidentes dificultades.

(Continuará.)

Programa de premios para el concurso del año 1917.

Artículo 1.° La Real Academia de Ciencias Exactas, Físicas y Naturales de Madrid abre concurso público para adjudicar tres premios a los autores de las Memorias que desempeñen satisfactoriamente, a juicio de la misma Corporación, los temas siguientes:

1.° «*Monografías histórico-científicas de matemáticos españoles, anteriores al siglo XVIII.*»

Desea la Academia allegar estudios minuciosos y completos de matemáticos españoles antiguos, con noticias biográficas y bibliográficas lo más abundantes posible. Déjase al arbitrio y buen criterio de los concurrentes el número de escritores que se estudien, si bien será preferible que pertenezcan a una misma escuela, región o época, o aparezcan de algún modo agrupados.

Las Memorias han de tener importancia bastante, por su materia y por su desempeño, para servir de base sólida a la historia de las Ciencias exactas en España.

2.° «*Estudio de la viscosidad y sus relaciones con otras propiedades físicas de los cuerpos.*»

3.° «*Monografía de los minerales de plomo de España.*»

El aspirante al premio no sólo ha de describir los minerales e indicar la procedencia y condiciones de los criaderos en que se encuentran, sino que señalará las aplicaciones que aquéllos tienen en las Artes y la Industria, y presentará, como justificantes de la obra, los ejemplares de menas, las preparaciones microscópicas, los datos de ensayos y análisis, las muestras de metal, etc., que juzgue pertinentes para la mejor y más completa inteligencia de su trabajo.

Art. 2.° Los premios que se ofrecen y adjudicarán, conforme lo merezcan las Memorias presentadas, serán de tres clases: *premio* propiamente dicho, *accésit* y *mención honorífica.*

Art. 3.° El *premio* consistirá en un diploma especial en que conste su adjudicación, una medalla de oro de 60 gramos de

peso, exornada con el sello y lema de la Academia, que en sesión pública entregará el Sr. Presidente de la Corporación á quien le hubiere merecido y obtenido, o a persona que le represente; retribución pecuniaria, al mismo autor ó concurrente premiado, de 1 500 pesetas; impresión, por cuenta de la Academia, en la colección de sus Memorias, de la que hubiere sido laureada, y entrega, cuando esto se verifique, de 100 ejemplares al autor.

Art. 4.° El *premio* se adjudicará a las Memorias que no sólo se distingan por su relevante mérito científico, sino también por el orden y método de exposición de materias y redacción bastante esmerada, para que desde luego pueda procederse á su publicación.

Art. 5.° El *accésit* consistirá en diploma y medalla iguales a los del *premio* y adjudicados del mismo modo, y en la impresión de la Memoria, coleccionada con las de la Academia, y entrega de los mismos 100 ejemplares al autor.

Art. 6.° El *accésit* se adjudicará á las Memorias poco inferiores en mérito a las premiadas y que versen sobre los mismos temas, o, a falta de término superior con que compararlas, á las que reúnan condiciones científicas y literarias aproximadas, a juicio de la Corporación, a las impuestas para la adjudicación u obtención del premio.

Art. 7.° La *mención honorífica* se hará en un diploma especial, análogo a los de *premio* y *accésit,* que se entregará también en sesión pública al autor o concurrente agraciado o a persona que le represente.

Art. 8.° La *mención honorífica* se hará de aquellas Memorias verdaderamente notables por algún concepto, pero que, por no estar exentas de lunares e imperfecciones, ni redactadas con el debido esmero y necesaria claridad para proceder inmediatamente a su publicación por cuenta y bajo la responsabilidad de la Academia, no se consideren dignas de *premio* ni de *accésit.*

Art. 9.° El concurso quedará abierto desde el día de la publicación de este programa en la *Gaceta de Madrid,* y cerrado en 31 de Diciembre de 1917, a las diez y siete horas; plazo hasta el cual se recibirán en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, número 26, cuantas Memorias se presenten.

Art. 10.° Podrán optar al concurso todos los que pre-

senten Memorias que satisfagan á las condiciones aquí establecidas, sean nacionales o extranjeros, excepto los individuos numerarios de esta Corporación.

Art. 11.° Las Memorias habrán de estar escritas en castellano o latín.

Art. 12.° Las Memorias que se presenten optando al premio se entregarán en la Secretaría de la Academia dentro del plazo señalado en el anuncio de convocatoria al concurso, y en pliegos cerrados, sin firma ni indicación del nombre del autor, pero con un lema perfectamente legible en el sobre o cubierta que sirva para diferenciarlas unas de otras. El mismo lema de la Memoria deberá ponerse en el sobre de otro pliego, también cerrado, dentro del cual constará el nombre del autor y las señas de su domicilio o paradero.

Art. 13.° De las Memorias o pliegos cerrados, el Secretario de la Academia dará, a las personas que los presenten y entreguen, un recibo en que consten el lema que los distingue y el número de su presentación.

Art. 14.° Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *premio* ó *accésit* se abrirán en la sesión en que se acuerde o decida otorgar a sus autores una u otra distinción y recompensa, y el Sr. Presidente proclamará los nombres de los autores laureados en aquellos pliegos contenidos.

Art. 15.° Los pliegos señalados con los mismos lemas que las Memorias dignas de *mención honorífica* no se abrirán hasta que sus autores, conformándose con la decisión de la Academia, concedan su beneplácito para ello. Para obtenerle se publicarán en la *Gaceta de Madrid* los lemas de las Memorias en este último concepto premiadas, y en el improrrogable término de dos meses los autores respectivos presentarán en Secretaría el recibo que de la misma dependencia obtuvieron como concurrentes al certamen, y otorgarán por escrito la venia que se les pide para dar publicidad a sus nombres. Transcurridos los dos meses de plazo que para llenar esta formalidad se conceden sin que nadie se de por aludido, la Academia entenderá que los autores de aquellas Memorias renuncian a la honrosa distinción que legítimamente les corresponde.

Art. 16.° Los pliegos que contengan los nombres de los autores no premiados ni con *premio* propiamente dicho, ni con

accésit, ni con *mención honorífica,* se quemarán en la misma sesión en que la falta de mérito de las Memorias respectivas se hubiere declarado. Lo mismo se hará con los pliegos correspondientes a las Memorias agraciadas con *mención honorífica* cuando en los dos meses de que trata la regla anterior los autores no hubieren concedido permiso para abrirlos.

Art. 17.° Las Memorias originales, premiadas o no premiadas, pertenecen a la Academia y no se devolverán á sus autores. Lo que por acuerdo especial de la Corporación podrá devolvérseles, con las formalidades necesarias, serán los comprobantes del asunto en aquellas Memorias tratado, como modelos de construcción, atlas o dibujos complicados de reproducción difícil, colecciones de objetos naturales, etcétera. Presentando en Secretaría el resguardo que de la misma dependencia recibieron al depositar en ella sus trabajos como concurrentes al certamen, obtendrán permiso los autores para sacar una copia de las Memorias que respectivamente les correspondan.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XVIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia novena 379

XIX.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia décima..... 409

XX.—Los poliporáceos de la flora española. (Estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 427

Programa de premios para el concurso del año 1917..... 465

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XIV.—NÚMERO 8.
FEBRERO DE 1916

FEB 1926

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXI. — Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia undécima.

SEÑORES:

En la última conferencia, y tratando ya del tercer ejemplo de la teoría cinemática de los gases, ó sea del que tomando como guía la obra inglesa ya citada denominábamos el ejemplo de *los discos*, resolvimos el primer problema de la serie perteneciente á dicho tercer caso y llegamos á este resultado:

$$\text{número de discos comprendidos en el límite } (l) = \\ = X(u, v, \omega)\, \partial u\, \partial v\, \partial \omega,$$

y ya sabemos que el límite (l) significa los límites entre los cuales están u, v, ω, y que esta condición se expresa abreviadamente de este modo:

$$(l) = \begin{vmatrix} u & u + \partial u \\ v & v + \partial v \\ \omega & \omega + \partial \omega \end{vmatrix}$$

Pasemos ya al segundo problema de la serie.

2.° Expresión del número de discos del segundo sistema cuyas componentes de velocidad están comprendidas en los límites L.

Para este segundo sistema de discos empleamos las letras mayúsculas, de suerte que el número de discos que preten-

demos determinar será el de todos aquellos que tengan una velocidad paralela al eje de las x comprendida

$$\text{entre } U \text{ y } U + \partial U;$$

una velocidad paralela al eje de las y comprendida a su vez

$$\text{entre } V \text{ y } V + \partial V;$$

y, por último, una velocidad de rotación alrededor de un eje perpendicular al plano de los discos y que pase por el centro de gravedad de éstos, comprendida

$$\text{entre } \Omega \text{ y } \Omega + \partial\Omega.$$

Esto lo expresamos simbólicamente de esta manera:

$$(L) = \begin{vmatrix} U \ldots\ldots U + \partial U \\ V \ldots\ldots V + \partial V \\ \Omega \ldots\ldots \Omega + \partial\Omega \end{vmatrix}$$

Claro es que empleamos la letra l o L como inicial de la palabra límites, según se trate del primero o del segundo sistema.

Y lo que decimos de este segundo sistema pudiéramos decir de otro cualquiera, porque los resultados que vamos a obtener se generalizan desde luego, según hemos indicado ya en los ejemplos anteriores.

Pudiéramos construir con U, V y Ω un diagrama como en el primer problema, pero sería repetir palabra por palabra lo que allí dijimos; y estableceremos desde luego: número de discos del segundo sistema comprendidos en los límites $(L) = \chi_1 (U, V, \Omega)\, \partial U \partial V \partial\Omega$.

Como el sistema es distinto y es natural, que la densidad de velocidades sea diversa también, por lo menos *a priori*,

no debemos suponer que está expresada por la misma función, así en vez de escribir χ escribimos χ_1.

Y con esto queda resuelto inmediatamente el segundo problema.

Pasemos al tercero, que, por ser siempre la misma serie fija é invariable, casi pudiéramos llamar la serie canónica de esta clase de problemas.

3.° Número de pares eficaces de discos compuestos de un disco d del primer sistema cuyas velocidades están comprendidas en los límites l y de discos D del segundo sistema cuyas velocidades están sujetas entre los límites (L) y tales, que cada dos discos d y D de un par tienen sus centros a una distancia tal que corresponden a los límites Δ.

Casi son innecesarias nuevas explicaciones; pero aun así, para evitar nuevas dudas, algo insistiremos sobre esta definición del problema.

Respecto a los discos d y a los límites en que han de estar comprendidos nada tenemos que advertir, porque ya sabemos lo que significan (l) y (L).

Pero no estará de más que fijemos la significación de los límites representados por la letra Δ.

En los primeros problemas establecimos un paralelepípedo de volumen $\partial x . \partial y . \partial z$, dentro del cual habían de estar los centros de las esferillas.

Ahora fijaremos un rectángulo de dimensiones ∂x, ∂y, dentro del cual han de estar los centros de cada par de discos, con el objeto de estrechar, por decirlo así, este rectángulo para sorprender a los discos en el momento del choque. De suerte que Δ significa

$$(\Delta) = \begin{vmatrix} x\,x + \partial x \\ y\,y + \partial y \end{vmatrix}.$$

Y con esto ya podemos escribir la fórmula que nos da, o el número de pares de discos propios para el choque en uno

o en otro sistema, o una cantidad proporcional, con tal que en esta proporcionalidad se entienda, como es natural, que sólo difieren ambos números por un factor constante.

Repitiendo los mismos razonamientos que hicimos en los ejemplos anteriores, podremos escribir: número de pares de discos propios, o eficaces, para el choque en un tiempo ∂t, estando formado cada par de un disco d del primer sistema y de otro disco D del segundo, comprendidos entre los límites (l), (L), $(\Delta) =$

$$= C\chi(u, v, \omega)\chi_1(U, V, \Omega)\,\partial u\,\partial v\,\partial\omega\,\partial U\,\partial V\,\partial\Omega\,\partial x\,\partial y.$$

La demostración de esta fórmula es repetición casi literal de las que hemos dado en los ejemplos 1.° y 2.°

Sin embargo, como en la enseñanza la repetición no perjudica, vamos a repetir, probablemente por la última vez, algo de lo que ya hemos explicado, aunque variando un tanto la forma y condensando las ideas, sobre todo en lo que se refiere a la significación de la constante C.

Imaginemos un conjunto de discos de los dos sistemas; conjunto que vamos a tomar como tipo o patrón, si se permite esta palabra.

Suponemos n_o discos del primer sistema; N_o del segundo y un rectángulo igual a la unidad.

Y suponemos que este doble sistema contiene un número de pares, representado por $(N_p)_o$, comprendido en dicho rectángulo de área igual á la unidad.

Y ahora, viniendo á nuestro caso, representamos por n el número de discos del primer sistema, por N el número de discos del segundo y por $(N_p)_1$ el número de pares comprendidos en un rectángulo de área igual a 1. Y pongamos todas estas cantidades en dos líneas para fijar bíen las ideas:

sistemas que tomamos como tipos. $(N_p)_o$, n_o, N_o, 1;
sistema actual..... $(N_p)_1$, n , N , 1.

Consideramos como evidente, o al menos admitimos como hipótesis muy aceptable dada la homogeneidad estadística, que si se hace cierto número de veces mayor o menor el número n_o, o el número N_o, el número N_p crecerá o disminuirá en la misma proporción.

Luego podremos escribir

$$(N_p)_1 = (N_p)_o \cdot \frac{n}{n_o} \cdot \frac{N}{N_o} \cdot 1.$$

Así obtendremos el número de pares de los que estamos considerando comprendidos en un área igual a 1.

Si quisiéramos determinar el número comprendido en un rectángulo $\partial x . \partial y$ no tendríamos más que multiplicar la expresión anterior por esta área.

Y esto es de sentido común, porque si en un plano están distribuídos en número enorme discos negros y blancos de una manera estadísticamente uniforme, en un área doble o triple habrá doble o triple número de pares de estos discos blancos y negros.

Y tendremos:

$$(N_p)_1 \, \partial x \partial y = (N_p)_o \cdot \frac{n}{n_o} \cdot \frac{N}{N_o} \cdot \partial x \partial y.$$

El primer miembro será precisamente el número de pares que buscamos comprendidos en los límites (l) (L) (Δ).

Representándolo simplemente por N_p, en que el subíndice recuerda la palabra *par*, tendremos:

$$N_p = (N_p)_o \cdot \frac{n}{n_o} \cdot \frac{N}{N_o} \cdot \partial x \partial y,$$

o bajo otra forma:

$$N_p = \frac{(N_p)_o}{n_o \, N_o} \cdot n \cdot N \cdot \partial x \partial y.$$

Ahora bien; el primer factor es una constante, porque se refiere a sistemas fijos que hemos tomado como tipos, y podemos representarlo por C, con lo cual tenemos definida, sin género de duda, esta constante.

n, representa el número de discos del primer sistema comprendidos en los límites (l), número que está determinado, como sabemos, por esta fórmula:

$$n = \chi(u, v, \omega)\, \partial u\, \partial v\, \partial \omega.$$

Y del mismo modo N representa el número de discos del segundo sistema comprendidos en los límites (L), es decir:

$$N = \chi_1(U, V, \Omega)\, \partial U\, \partial V\, \partial \Omega.$$

Y sustituyendo los valores de la constante

$$C = \frac{(N_p)_o}{n_o\, N_o}$$

y de n y N en el valor de N_p tendremos la misma fórmula que antes habíamos escrito:

$$N_p = C\chi(u, v, \omega)\, \chi_1(U, V, \Omega)\, \partial u\, \partial v\, \partial \omega\, \partial U\, \partial V\, \partial \Omega\, \partial x\, \partial y.$$

Queda, pues, resuelto el tercer problema de la nueva serie.

Pasemos al cuarto.

4.° Reducción de los límites Δ, del caso general, á otros nuevos límites dentro de los que suponemos que se verifican los choques.

Porque, en efecto, mientras los límites del rectángulo en que están comprendidos los pares sean, en general, ∂x y ∂y, como no es forzoso que estas dos dimensiones sean infinitamente pequeñas, pues, ya hemos dicho, repetidas veces, que las definiciones y los métodos rigurosos del cálculo di-

ferencial, aquí en varios casos se aplican sólo como aproximaciones, se comprende que en términos generales, en el rectángulo ∂x, ∂y forzosamente no se han de verificar los choques porque esta área sea sumamente grande en comparación del diámetro de los discos moleculares, si vale la palabra, que estamos considerando.

Es preciso, en cierto modo, *estrechar las distancias*, y por eso repitiendo las consideraciones, que hicimos en los dos ejemplos precedentes, vamos a considerar un rectángulo largo y estrecho. Largo en el sentido del eje de las x, estrecho en el sentido del eje de las y; tan estrecho que no quepa más que un solo disco, aunque paralelamente al eje de las x, quepan varios; porque vamos á considerar los choques paralelos a este eje. Es decir, que la línea de los centros de los discos que van a chocar suponemos que es paralela al eje de las x.

Y esta hipótesis no quita, en manera alguna, generalidad a la demostración.

Porque, sea cual fuere la línea del choque, siempre se podrá tomar por eje de las x, ya que en todas las orienta-

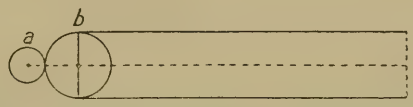


Figura 26

ciones del plano, la *distribución estadística* de los discos es la misma.

Las dimensiones primitivas del rectángulo eran ∂y, ∂x.

La primera, ∂y, la dejamos invariable y la suponemos muy pequeña, tan pequeña que se iguale al diámetro, por ejemplo, del disco b.

La segunda, ∂x, será mucho mayor en el sentido del eje de las x y la determinaremos según indicamos en uno de los ejemplos anteriores.

Vamos a recordar, aunque aligerando, aquellas explicaciones:

Imaginemos (figura 26), un disco a del primer sistema y otro disco b del segundo sistema.

Entre los dos formarán un par de los pares *eficaces para el choque.* Es el primer par que choca en el rectángulo ∂y, ∂x.

Imaginemos, en la figura 26 bis, una reproducción de la anterior y representemos los discos a y b'. Son el último par que chocará de los que estaban comprendidos en el rectángulo.

La distancia ab igual a la ab de la figura 26, será la suma de los radios y la representaremos por s.

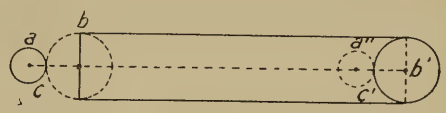


Figura 26 bis

Y tomando como origen de las x el centro de a podremos decir:

$$x = ab.$$

Si el origen no fuera a no habría más que agregar a esta distancia y a las análogas una constante; a saber: la coordenada x del punto a.

Cuando el disco b esté en b' la distancia de los centros será ab', que se descompondrá de este modo:

$$ab' = ab + bb' = s + bb' = x + bb'.$$

Y representando el disco a en la posición a'' también podremos decir

$$bb' = cc'$$

que es la distancia que separa el punto c del punto c', que son los que han de estar en contacto cuando choquen las esferillas a y b'.

Pues poniendo este valor en la ecuación precedente tendremos

$$ab' = x + \partial x = x + bb' = x + cc'$$

luego

$$\partial x = cc'.$$

Pero cc' se puede expresar en función de las velocidades del disco a y del disco b, porque c, c' son los dos puntos que han de unirse en el choque; los separa la distancia primitiva cc' y si representamos por u_1 la velocidad paralela al eje de las x, del disco a, o del punto c, que da lo mismo, y por u'_1 la velocidad del disco b, o b', o del punto c', cuando llegue a verificarse el choque al fin del tiempo ∂t tendremos evidentemente, por el problema elemental de los dos correos, que partieran de c y c',

$$cc' = (u_1 - u'_1)\,\partial t$$

luego por fin

$$cc' = \partial x = (u_1 - u'_1)\,\partial t.$$

Y el cuadro que expresa simbólicamente la letra Δ será, en este caso,

$$(\Delta) = \begin{vmatrix} y \,.....\, y + \partial y \\ x \,.....\, x + (u_1 - u'_1)\,\partial t. \end{vmatrix}$$

Antes de pasar adelante advirtamos que para la velocidad de los puntos c y c', o sea de los discos a y b, hemos introducido unas notaciones nuevas u_1 y u'_1, porque sobre este

punto tendremos que entrar más adelante en algunos pormenores; por ahora las designamos de este modo sean cuales fueren, en función de los datos, que esto ya lo veremos en breve.

Por último $(u_1 - u'_1)\partial t$, es la dimensión máxima del rectángulo; pero habrá en otros rectángulos o en el mismo, por sustitución, otros discos como a y b'' de la figura 16 ter que estarán a menor distancia y tardarán en encontrarse menos que en el caso anterior.

De modo que tendremos

$$cc'' = (u_1 - u'_1)\partial t'$$

siendo $\partial t'$ menor que ∂t.

Las tres figuras 26, 26 bis y 26 ter, representan choques

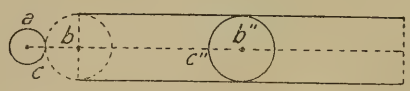


Figura 26 ter.

que se verificarán durante el espacio ∂t o dentro de un rectángulo tipo, o en varios rectángulos.

Sobre esta discusión no podemos volver y nos referimos a lo que ya se dijo anteriormente.

Lo que podemos afirmar es que cuanto mayor sea

$$\partial x = (u_1 - u'_1)\partial t,$$

tanto mayor será el número de pares que determinen los choques. Y aun podemos admitir que el número de estos choques es proporcional a ∂x.

Si todos los pares comprendidos en la fórmula que da N_p no son eficaces para el choque por accidentes de la agitación de los discos, al menos expresaremos este número exacto de choques introduciendo una constante, que pode-

mos suponer comprendida en C y tendremos por fin una fórmula análoga a la que ya hemos obtenido en otros ejemplos.

Número de choques, en el tiempo ∂t, entre los discos del primer sistema, comprendidos en los límites (l) y los discos del segundo, comprendidos en los límites (L) y en el interior de rectángulos de las dimensiones ∂y, y $(u_1 - u'_1)\,\partial t =$

$$C\chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega)\,\partial u\,\partial v\,\partial\omega\,\partial U\,\partial V\,\partial\Omega\,\partial y\,(u_1 - u'_1)\,\partial t.$$

Y no olvidemos que esta C no suponemos que precisamente ha de ser igual a la que aparece en la fórmula que da N_p.

Y no olvidemos tampoco que u_1 y u'_1, son las velocidades paralelas al eje de las x que tienen los dos discos de cada par que produzca un choque; velocidades que no son, como a primera vista pudiera creerse, u y U, porque ya no se trata de esferas homogéneas sino de esferas en que el centro de gravedad no coincide con el centro de figura; por lo demás, ya sabemos que á medida que los pares eficaces chocan en el rectángulo, las dos esferillas del par salen de dicho rectángulo en virtud del movimiento transversal paralelo al eje de las y, y nuevos pares eficaces entran en el mismo rectángulo en el cual chocan. Así es claro que el par a, b de la figura 26 es distinto del par a, b' de la figura 26 bis y del par a, b'' de la figura 26 ter.

Con esta hipótesis se salvan, como vimos, muchas dificultades de la teoría.

Debemos pasar ya al estudio de los choques; estudio que constituye el problema siguiente.

5.° Entremos, pues, en el estudio del choque de cada dos discos y del cálculo de las nuevas componentes de la velocidad paralelas al eje de las x, así como de las nuevas rotaciones después de verificarse el choque.

Fijemos bien las ideas y recordemos algunos principios

elementales de Mecánica que, de seguro, conocen ya mis alumnos, contrayéndonos al caso de varios discos moviéndose en un plano.

El movimiento de un disco (figura 27) en el cual el centro de gravedad *G* no coincide con el centro de figura, *o*, se determina por el movimiento del centro de gravedad como si toda la materia del disco se reconcentrase en este punto, y además por un movimiento de rotación *f*, alrededor de dicho centro de gravedad, como si estuviera inmóvil, de suerte que la velocidad de un punto cualquiera *a* será la resultante de dos velocidades: *primera*, la velocidad de traslación de todo el disco y de todos sus puntos, que para todos está representada por la misma velocidad *u*, y *segunda*, de la velocidad de rotación ω alrededor del punto *G*.

Y esto se aplica a todos los puntos del disco y al mismo centro de figura, cuya velocidad total es distinta de la del centro de gravedad.

Todo lo cual complica el problema del choque.

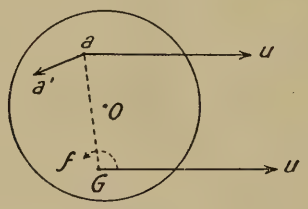


Figura 27

Porque supongamos, que chocan dos discos *o* y *O*, del primero y del segundo sistema (figura 28).

El disco *o*, lleva la velocidad *u*. El disco *O* del segundo sistema la velocidad *U*, y admitimos para fijar las ideas, que ambas velocidades *u* y *U* van en la misma dirección y que *u* es mayor que *U*.

Por eso el disco *o* alcanza al disco *O* y choca con él en el punto *A*.

En los ejemplos anteriores bastaba tener en cuenta las dos velocidades u y U, y la velocidad relativa del choque sería $u - U$.

Pero en este nuevo ejemplo no sucede lo mismo.

Las velocidades de traslación de ambos discos u y U, que suponemos paralelas al eje de las x, representan las velocidades de traslación; pero no es ésta la velocidad relativa del choque en el punto A.

Porque el centro o tendrá en efecto la velocidad de traslación u; pero al mismo tiempo girará alrededor de g con una velocidad ω, describiendo un arco ob, proporcional a la velocidad de giro, y si suponemos que dicho arco ob representa esta velocidad, tendremos

$$\text{velocidad } ob = k\omega$$

designando por k la distancia og.

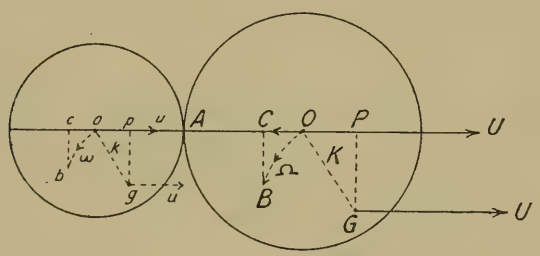


Figura 28

Esta velocidad, ob, tendrá una componente oc paralela según la línea de los centros y que en la figura será evidentemente negativa y se restará de u.

Pero oc, se calcula desde luego con toda facilidad, porque tendremos

$$oc = ob \cos boc = k\omega \operatorname{sen} pog$$

y como

$$\text{sen } pog = \frac{pg}{og} = \frac{p}{k}$$

llamando p a la distancia de g a la línea de los centros, tendremos por último

$$oc = k\omega \cdot \frac{p}{k} = p\omega.$$

Como antes decíamos, en la figura esta velocidad es negativa y la velocidad del centro del disco o será

$$\text{velocidad de } o \text{ en la línea del choque} = u - p\omega.$$

Repitiendo esto mismo para el segundo disco O, tendremos evidentemente que la velocidad de O y, por tanto, del punto A perteneciente a este disco, no será en el momento del choque U, sino

$$\text{velocidad de } O \text{ en la línea del choque} = U - P\Omega.$$

Las notaciones son análogas, pero ya hemos convenido en que para los discos del segundo sístema se sustituyen a las letras minúsculas las letras mayúsculas.

Resulta, pues, para la velocidad relativa, es decir, para la diferencia de velocidades

$$\text{velocidad relativa} = u - pw - (U - P\Omega) = \\ = u - U - pw + P\Omega.$$

Estudiemos ahora las condiciones del choque, en el que tendremos que calcular, según dijimos, no sólo las velocidades de traslación después del choque, sino las nuevas velocidades de rotación.

Y como ya este problema del choque va siendo y ha de ser más complicado, bueno será recordar algunos principios

de la teoría general, que pueden ver mis alumnos en varios autores de los que no citaré más que dos.

En primer lugar la Mecánica de Appell, que en esta cuestión, como en todas, es un modelo de claridad, de exactitud y de método.

Y en segundo lugar la obra, también muy interesante, de E. J. Routh, *Dynamics of a system of regid.*

Nosotros nos limitaremos a recordar algunos principios de la teoría general del choque.

Imaginemos un punto material de masa m moviéndose en línea recta.

La ecuación del movimiento sabemos que es designando por x la variable, que determina su posición a partir de un origen, y por F la fuerza

$$m \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = F$$

ó bien

$$m \partial \frac{\partial x}{\partial t} = F \partial t$$

y puesto que $\frac{\partial x}{\partial e}$ es la velocidad

$$m \partial v = F \partial t$$

ó por fin

$$\partial (mv) = F \partial t.$$

Esta es en rigor la ecuación fundamental de la dinámica, y nos dice que en cada intervalo infinitamente pequeño de tiempo ∂t la fuerza F comunica al punto una variación infinitamente pequeña en su *cantidad de movimiento*, que es precisamente mv.

Siendo finita la fuerza F en un intervalo ∂t infinitamente pequeño, la variación de la cantidad de movimiento mv es infinitamente pequeña también.

En el choque sucede una cosa completamente distinta.

A pesar de ser ∂t muy pequeña mv varía, no en una diferencial sino en una cantidad finita, lo cual sólo puede explicarse suponiendo que al chocar este punto con otro punto, la fuerza F que se desarrolla en el choque es tan grande que, compensando, en cierto modo, la pequeñez de ∂t, produce una variación finita en la cantidad de movimiento. Más claro.

Si t_o es el instante inicial del choque y t_1 el instante final $t_1 - t_o$ será muy pequeña (a veces decimos, en forma incorrecta, *infinitamente pequeña*). Y sin embargo, integrando entre estos límites la ecuación anterior, tendremos

$$\int_{t_o}^{t_1} \partial (mv) = \int_{t_o}^{t_o} F \partial t.$$

En el segundo miembro F variará entre t_o y t_1 según cierta serie de valores que desconocemos, y lo único que podremos asegurar es, que el segundo miembro es una cantidad finida, puesto que la integral del primer miembro es de esta forma,

$$(mv)t_1 - (mv)t_o = \int_{t_o}^{t_1} F \partial t$$

y que las dos velocidades v_o y v_1 en los instantes t_o y t_1 difieren en una *cantidad finita.*

El primer miembro será, en efecto,

$$mv_1 - mv_o = \int_{t_o}^{t_1} F \partial t$$

y en una cantidad finita difieren mv_1 y mv_o.

La integral del segundo miembro pudiera llamarse *la impulsión.*

Nosotros diremos que es la *percusión* que recibe el punto de que se trata.

Y si la representamos por R, siendo R una cantidad finita, la ecuación precedente se escribirá de este modo:

$$mv_1 - mv_0 = R.$$

Es decir, que una *percusión* hace pasar casi instantáneamente al punto, de la velocidad v_0 a la velocidad v_1.

Si el punto venía caminando con la velocidad v_0 y ha procurado detenerlo un choque y le ha comunicado la velocidad v_1 podría decir que

$$mv_0 - mv_1$$

es la cantidad de movimiento perdida por el choque, y entonces la ecuación anterior se escribirá de este modo:

$$-(mv_0 - mo_1) = R$$

o abreviadamente

$$-\Delta(mv) = R$$

representando Δ esta diferencia de cantidad de movimiento perdida. En rigor R es negativa.

Y en tal hipótesis puede traducirse dicha ecuación, diciendo que hay equilibrio entre la cantidad de movimiento perdida y la percusión.

Cuando esto se generaliza para un sistema cualquiera material, que sufre diversas percusiones, y en que se consideran a dichas percusiones y a las cantidades de movimiento como vectores o fuerzas simbólicas, se llega a este teorema: En cada momento debe haber equilibrio entre las percusiones y las cantidades de movimiento perdidas; porque, en

efecto, la ecuación precedente se puede escribir de este modo:

$$o = \Delta (mv) + R.$$

Y se les puede aplicar el principio de las velocidades virtuales, que es el principio general del equilibrio.

Este principio recuerda además el teorema general de D'Alembert, según el cual debe haber equilibrio entre las fuerzas que actúan en el sistema y las fuerzas de inercia.

Aquí suplen a las fuerzas de inercia las cantidades de movimiento perdidas.

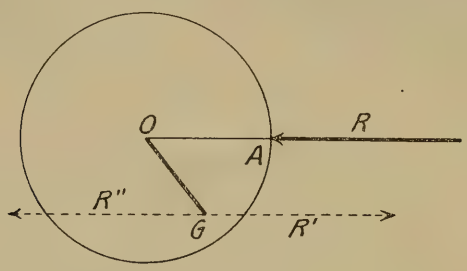


Figura 29

Mas prescindamos de la teoría general, en la que no podemos detenernos, ni tampoco por el momento nos hace falta, y volvamos al problema concreto en que nos ocupamos.

*
* *

El disco *o* de la figura 28, recibe en el punto *A* una percusión, que representaremos por *R*, á causa del choque con el disco *O*.

Ahora lo representamos aparte en la figura 29 y tenemos en ella un disco *O*, en el punto *A* la percusión *R*, y el punto

G, que representa el centro de gravedad, para el que la distancia *O G* la hemos representado por *K*.

La posición es la misma antes y después del choque; la figura es idéntica, porque durante el choque, y éste es principio general, los puntos del sistema no cambian.

La percusión *R* la debemos trasladar al centro de gravedad *G;* y según el método general, para estudiar el movimiento de un cuerpo, todas las fuerzas, que aquí son las percusiones, se trasladan al centro de gravedad paralelamente a sí mismas, y así resulta el cuerpo solicitado por una fuerza única, o en nuestro caso, por una percusión única en el centro de gravedad y por un sistema de pares.

En la figura 29 hemos trazado por el punto *G* dos percusiones o vectores de percusión iguales y contrarios paralelos a *R* y de la misma intensidad. Por lo cual el disco estará sometido a una fuerza R'', o si se quiere, a una percusión R'' y a un par de percusiones (R, R').

Este sistema nos va a permitir la determinación:

Primero. De la variación en la cantidad de movimiento del disco.

Segundo. De la velocidad angular del giro.

Y el problema es elemental.

Pero ya no tendríamos tiempo en esta conferencia para desarrollarlo, y queda, por tanto, para la conferencia próxima.

XXII.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

(Continuación.)

POR BLAS LÁZARO É IBIZA.

Abreviaturas de los nombres de autores mencionados en esta Memoria.

Alb.—Albertini.
Alb. et Schw.—Albertini y Schweinitz.
Aranz.—Telesforo de Aranzadi.
Badh —Badham.
Bagl.—Baglieto.
Bail.—Th. Bail.
Barl.—Barla.
Bat.—Bataille.
Batsch.—Batsch.
Battr.—Battarra.
Beck.—J. Beck.
Bel.—Jules Bel.
Berkl.—Berkeley.
Berl. —Berlese.
Bern.—Bernard.
Big —R. Bigeard.
Bolt.—Bolton.
Bon.—Bonorden.
Borsz.—Borszezow.
Boud.—Emile Boudier.
Boyer.—Leon Boyer.
Bref.—O. Brefeld.
Bres.—Bresadola.
Britz.—Britzelmayr.
Brot.—Avellar Brotero.
Busch.—Busch.
Bull.—Bulliard.
Buxb.—Buxbaum.
Cavara.—Fridiano Cavara.
Ces.—Cesati.

Chev.—Chevalier.
Clem. –Simón de Rojas Clemente.
Const.—Constantin.
Cooke.—Cooke.
Corda.—Corda.
Cord.—Cordier.
Curt.—Curtis.
D. C.—De Candolle (Auguste Pyrame).
Desc. –Descourtilz.
Desm.—Desmazieres.
Dass.—Dassier.
Dicks. —Dickson.
Doass.—Doassans.
D' Orb.—D' Orbigni.
Duby.—J. E. Duby.
Duf.—Leon Dufour.
Ehrenb.—C. G. Ehrenberg.
Eloffe.—Eloffe.
Erh.—Erhardt.
Favre-Guill.—Favre-Guillarmot.
Fries.—Elías Fries.
Forq.—Forquignon.
Fuck.—Fuckel.
Gauth.—Gauthier.
Guern —De Guernisac.
Gillet.—C. C. Gillet.
Gill.—X. Gillot.
Gill. et Luc.—Gillot y Lucand.
Gonn.—Gonnermann.
Gott. Halm.—Gotthold-Halm.
Grev.—Greville.
Guill.—Guillemin.
Harz.—Harzer.
Hedw.—Hedwig.
Hoffm.—G. Hoffmann.
Hogg.—Hogg.
Holms.—Holmskiold.
Huds.—Hudson.
Humm.—Hummer.
Huss.—Hussey.
Inz.—Inzenga.
Jacq.—Jacquin.
Jhonst.—Jhonst.
Kalch. –Kalchbrenner.
Karst.—P. A. Karsten.

Klot.—Klotzh.
Krombh.—Krombholtz.
L.—Linneo.
Lam.—Monnet de Lamarck.
Láz.—Lázaro e Ibiza.
Lebr.—Lebreton.
Lenz.—H. O. Lenz.
Letell.—Letellier.
Leub.—Leuba.
Lk.—Link.
Lorin.—F. W. Loringer.
Luc.—Lucand.
Lloyd.—C. G. Lloyd.
Mich.—Micheli.
Michœl.—Edmond Michæl.
Mig.—Walter Migula.
Moug.—Mougeot.
Moy.—Moyen.
Mull.—Muller.
Mull. et Busch.—Muller y Busch.
N. ab. E.—Nees von Esenbeck.
Noul.—Noulet.
Noul et Dass.—Noulet y Dassier.
Œd.—Œder.
Opat.—Opatowski.
Oudem.—Oudemens.
Pat.—Patouillard.
Paul.—Paulet.
Phœb.—Phœbus.
Pers.—Persoon.
Price.—Price.
Poll.—Pollini.
Purt.—Th. Purton.
Quel.—Quelet.
Quel. et Lebr.—Quelet y Lebreton.
Rich.—Richon.
Roze et Rich.—Roze y Richon.
Roll.—E. Rolland.
Roq.—Roques.
Rostk.—Rostkovius.
Roum.—Roumeguere.
Roze.—Roze.
Sacc.—Saccardo.
Saund.—Saunder.
Schœff.—Schœffer.

Schmid.—Schmidel.
Schrad.—Schrader.
Schwein.—Schweinitz.
Scop.—Scopoli.
Secr.—Secretan.
Seyn.—Jules Seynes.
Sic.—Sicard.
Smith.—Smith.
Sow.—Sowerby.
Sterb.—Sterbeck.
Sturm.—J. Sturm.
Tratt.—L. Trattinik.
Tul.—Tulasne.
Vaill.—L. Vaillant.
Ventur.—Venturi.
Vitt.—Vittadini.
Viv.—Viviani.
Wallr.—Wallroth.
Weinm.—Weinmann.
Wint. G. Winter.
With.—Withering.
Wulf.—Wulfen.

Obras iconográficas cuyas láminas se citan en este trabajo.

Alb. et Schw. Conspect. Fung.—*Albertini y Schweinitz,* Conspectus Fungorum (1805).

Ann. Sc. nat. Annales des sciences naturelles (Botanique, 1834-1915).

Aranz. Setas país vasco.—*Aranzadi* y *Unamuno* (Telesforo). Setas ú Hongos del país vasco (1897).

Assot fr. Association française par l'Avancement des Sciences.

Badh. Escul. Mushr.—*Badham.* The esculent Mushrooms of England (1847).

Badh. Escul. Fung.—*Badham.* A treatise on esculent funguses (1863).

Bail. Wicht. Sactz. Myc.—*Bail (Th.).* Die Wictigsten Satze derneuern Mycologie (1861).

Barla. Champ. prov. Nice.—*Barla.* Champignons de la province de Nice (1859 y 1886).

Barla. Flora Myc. ill.—*Barla.* Flore mycologique illustré (Les Champignons des Alpes Maritimes (1890-1892).

Batsch. Elench. Fung.—*Batsch.* Elenchus Fungorum (1783-1789).

Battr. Fung. agr. arim. — *Battarra.* Fungorum agri ariminensis Historia (1799).

Bel. Champ. du Tarn.—*Bel. (Jules).* Champignons du Tarn (1889).

Berkl. Outl. Brit. Fung.—*Berkeley.* Outlines of British Fungology (1860).

Bern. Champ. Roch.—*Bernard.* Champignons de la Rochelle (1882).

Big. et Jacq. Champ. sup. Saona et Loire.—*Bigeard (R.) et Jacquin (A.).* Flora des champignons superieurs du departement de Saona et Loire (1898).

Bolt. Hist. of Fung.—*Bolton.* History of Funguses (1778-1791).

Borsz. Fung. ingr.—*Borszezow.* Fungi ingriei novi (1897).

Bot. Zeit. Botanische Zeitung.

Boud. Ic. myc.—*Boudier (Emile).* Icones mycologicæ (1904-1910).

Boyer. Champ. com. et ven.—*Boyer (Leon).* Champignons comestibles et vénéneux de la France (1891).

Bresad. Fung. Trid.—*Bresadola.* Fungi Tridentini novi vel nondum delineati (1881-1900).

Briz. Hymen. Ausbg.—*Britzelmayr.* Die Hymenomyceten Ausburg (1879-1893).

Britz. Beschreib. Hymen.—*Britzelmayr.* Materialen zur beschreibung der Hymenomyceten (1893). In Botaniches Centralblatt, números 15 y 17.

Britz. Polyp.—*Britzelmayr,* Hymenomyceten.

Bull. Soc. myc. fr. Bulletin de la Société mycologique de France.

Buxb. Plat. minus. cogn.—*Buxbaum.* Plantarum minus cognitareun Centuriæ (1828-1840).

Bull. Champ. de la France.—*Bulliard.* Champignons de la France (1791-1812).

Cavara. Fung. mang.—*Cavara (Fridiano).* Funghi mangeruchi é Funghi velenosi (1897).

Cooke. Il. Brit. Fung.—*Cooke.* Illustrations of the British Fungi (1880-1890).

Corda. Ic. Fung.—*Corda.* Icones fungoreum hucusque cognitarum (1837-1854).

Cordier. Champ. France.—*Cordier.* Les champignons de la France (1870).

Dicks. Fasc. pl.—*Dickson. (J.).* Fasciculi plantarum cryptogamicarum Britanniæ (1785-1801).

Doass. et Pat. Champ. fig. et dess.—*Doassans et Patouillard.* Champignons figurés et desséchés (1882).

D'Orbig. Dict. d'Hist. nat.—*D'Orbigni.* Dictionnaire d'Histoire naturelle.

Duf. Atl. Champ.—*Dufour (Leon).* Atlas des Champignons (1891).

Dumeé. Now. Atl. Cham..—*Paul Dumeé.* Nouvelle Atlas de poche des Champignons (1901-1911).

Ehrenb. Sylv. myc. Ber.—*Ehrenberg (C. G.).* Sylvæ mycologicæ Berolinensis (1812).

Eloff. Champ. com.—*Eloffe.* Les Champignons comestibles et vénéneux (1880).

Favre-Guill. Champ. com.—*Favre-Guillarmot.* Champignons comestibles (1861).

Fl. Bat.—*Flora de Batavia (Afbeelding en Beschrijving van Neder landiche Gwassen)* (1800-1868).

Fries. Swer. Abl. Swamp.—*Fries (Elias).* Swerige Attliga Swampar (1861).

Fries. Ic. select. Hymen.—*Fries (Elias).* Icones selectæ Hymenomycetum (1867-1885).

Gauth. Champ.— *Gauthier.* Les Champignons considerés dans leurs rapports avec la Medicine (1884).

Gillet. Hymem.—*Gillet (C. C.).* Les Champignons (Fung. hymenomycetes qui croisent en France) (1874-1878).

Gill. et Luc. Cat. raiss des Champ.—*Gillet (C. C.) et Lucand.* Catalogue raissonné des Champignons supérieures (Hymenomycetes) des environs d'Autun (1891).

Gonn. et Rabh. Myc. Eur.—*Gonnermann et Rabenhorst.* Mycologia Europæa (1869-1872).

Gott. Halm. Pilz. Samml. *Gotthold Halm.* Der Pilz Sammler (segunda edición, 1890).

Grev. Scott. crypt. Fl. — *Greville.* Scottish cryptogamic Flora (1823-1829).

Harz. Nat. albild. vorz Pilze.—*Harzer.* Naturgetreue albildungen der vorzüglichsten Pilze (1842-1845).

Hoffm. T. anal. Fung.—*Hoffmann (G).* Icones analyticæ fungorum (1861-1865).

Hoffm. Nom. Fung.—*Hoffmann (G.).* Nomenclator fungorum (1789-1790).

Hogg. et Jhonst. Veg. paras.—*Hogg. et Jhonst.* Observations on the vegetable parasites (1866).

Humm. Prakt. Pilz.—*Hummer (Paul).* Praktisches Pilzbuch.

Huss. Ill. of Brit. Myc.—*Hussey.* Illustrations of British Mycology (1849-1855).

Inz. Fung. Sicil.—*Inzenga.* Fungi siciliani (1879).

Jacq. Fl. Austr.—*Jacquin.* Flora Austriaca (1773-1778).

Kalch. et Schultz. Ic. selec. Hymen. Hung.—*Kalchbrenner et Schultzer.* Icones selectæ Hymenomyceten Hungariæ (1873).

Karst. Ic. select. Hymen. Fenn.—*Karsten (P A.).* Icones selectæ Hymenomyceten Fenniæ (1885).

Klotzch. Fl. Boruss.—*Klotzch (J. F.).* Flora Borussica (1833-1841).

Krombh. Nat. albild. Schwæmm. -*Krombholtz.* Naturgetreue albildungen und beschreibungen der Schwæmme (1831-1847).

Láz. Hong. com. y ven.—*Lázaro é Ibiza.* Hongos comestibles y venenosos (1897).

Láz. Fit. Hist. nat.—*Lázaro é Ibiza.* La Fitografía y la Historia natural (1908).

Lenz. Nutzl. Schwæmm.—*Lenz (H. O.).* Nutzliche schadliche verdagtige Schwæmme (1879).

Letell. Fig. des Champ. -*Letellier (J. B.).* Figures des Champignons servent de suplement aux planches de Bulliard (1829-1842).

Leuba. Champ com.—*Leuba.* Champignons comestibles et especes veneneuses (1890).

Leveill. Ic. des Champ.—*Leveillé (J. H.).* Iconographie des Champignons (1855).

Linnœa.—Ein Journal für die Botanik in ihrem gauzen Unfange (1826 á 1892).

Lloyd. Myc. Not.—*Lloyd* (C. G.) Mycological Notes (1898-1909).

Lorin. Essb. und gift. Schwæmm.—*Loringer (F. W.).* Die wichtisten essbaren verdæchtigen und giftigen Schwæmme (1876).

Lucand. Champ. France.—*Lucand.* Champignons de la France (suites a Bulliard) (1884-1886).

Mass. Brit. Fung.—*Gorge Massee.* British Fungi (1913).

Michœl. Führ. für Pilz.—*Michœl (Edmond).* Führer für Pilzfreunde (cuarta edición, 1908).

Mich. Comm. myc. Ital.—*Michelia* (revista). Commentarium mycologiæ Italicæ (editado por Sacardo, 1877-1880).

Moyan. Les Champ.—*Moyen.* Les Champignons, Traite elementaire et pratique de Mycologie (1889).

Mig. Kryptog. Fl.—*Migula.* Kryptogamen Flora von Deuschland Œsteoreich und der Schweiz (1901-1914).

Mull. et Busch. Crypt. Deutsch.—*Muller et Busch.* Cryptogamen Deutschflora (1879).

N. ab. E. System.—*Nees von Esenbeck.* Das system der Pilze und Schwæmme (1816).

Noul. et Dass. Tr. des Champ.—*Noulet et Dassier.* Traité des Champignons (1838).

Œd. Fl. Dan.—*Œder.* Flora Danica (1761-1876).

Opat. Comm. Bolet.—*Opatowski.* Commentatio historico naturalis de familiae fungorum Boletidearum (1836).

Oudem. Fl. myc. Neder.—*Oudemens.* Flora mycologica van Nederland (1867-1887).

Pat. Tabl. anal.—*Patouillard.* Tableaux analytiques (1883-1889).

Paul. Tr. des Champ.—*Paulet (I. J.).* Traité des Champignons (1793).

Pers. Ic. et Descr.—*Persoon.* Icones et Descriptiones Fungorum (1798-1800).

Pers: Ic. pict. rar. Fung. — *Persoon.* Icones pictæ rariorum Fungorum (1803-1806).

Pers. Obs. Myc.—*Persoon.* Observationes mycologicæ (1796).

Pers. Myc. Eur.—*Persoon.* Mycologia Europæa (1822 1828).

Phoeb. Deutsch. Crypt.—*Phoebus.* Deutschlands Cryptogamische (1838).

Price. Ill. of the Fung.—*Price.* Illustrations of the Fungi (1864-1865).

Poll. Plant. nov.—*Pollini.* Plantarum novarum.

Purt. Bot. Descr.—*Purton (Th.).* A botanical description of British plants (1817-1821).

Quel. Chom. Vosg. Jura.—*Quelet.* Champignons des Vosges et du Jura (1886).

Quel. et Lebr. Cham. Norm. – *Quelet et Lebreton.* Champignons de Normandie (1880).

Rev. Myc. –Revue Mycologique.

Roll. Atl. des Champ.—*Rolland (E.).* Atlas des Champignons de France, Suitse et Belgique (1906-1909).

Roq. Hist. des Champ.—*Roques.* Histoire des Champignons comestibles et veneneux (1876).

Rostk. Deutsch. Fl.—*Rostkovius.* Deutschland Flora (1844).

Roum. Cript. ill. — *Roumeguere.* Cryptogamie illustré. Champignons (1870).

Roze et Rich. Atl. des Champ.—*Roze et Richon.* Atlas des Champignons (1888).

Sacc. Myc. Venet.—*Saccardo* Mycologiæ Venetæ Specimen. (1873).

Saund und Smith. Myc. ill.—*Saunders und Smith.* Mycological Illustrations (1872).

Schœff. Fung. Bav.—*Schœffer.* Fungorum qui in Bavaria et Palatinatu, eir Ratisbona, nascuntur Icones (1762-1764).

Seyn. Fist.—*Seynes (Jules).* Fistulines.

Seyn. Fl. Myc. Montp.—*Seynes (Jules).* Flora mycologique de la región de Montpellier (1863).

Sic. Hist. nat. Champ.—*Sicard.* Histoire naturelle des Champignons (1884).

Soc. Bot. de Fr.—Société botanique de France (Annales de la).

Sow. Engl. Fung.—*Sowerby.* Coloured Figures of English Fungi or Mushrooms (1797-1809).

Sterb. Theatr. Fung.—*Sterbeck (Franciscus von).* Theatrum Fungorum (1712).

Sturm. Deutsch. Pilze.—*Sturm (J.).* Deutschlands Pilze (1821-1851).

Swensk Botanik. Obra iconográfica redactada por Palmstruele, Venus, Billberg, Quensel, Swartz, Wahlenber y Vahlberrg. (1802-1838).

Tratt. Essb. Schwæm.—*Trattinik (L.).* Essbarem Schwæmme (1830).

Tratt. Fung. austr.—*Trattinik (L.).* Fungi austriaci (1801-1806).

Vaill. Bot. Paris.—*Vaillant (L.).* Botanicon Parisiense (1727).

Ventur. Mic. agr. Bresc.—*Venturi.* Miceti dell' agro Bresciano (1842).

Vitt. Fung. mang.—*Vittadini.* Descricioni dei Funghi mangerebbi (1835).

Viv. Fung. Ital.—*Viviani.* Funghi d'Italia (1834-1838).

Wallr. Fl. crypt.—*Wallroth.* Flora cryptogámica (1833).

Wint. Die Pilze.—*Winter (G.).* Die Pilze Deutschlands, Œsterreiches und der Schweiz (1887).

PARTE DESCRIPTIVA

DIVISIÓN EN TRIBUS

A.—Aparato esporífero reducido á una placa aplicada sobre el soporte.. Tribu 1.ª FISISPOREOS.

B.—Aparato esporífero grueso y sentado lateralmente sobre el soporte.

- Con las dos superficies muy convexas..... Tribu 2.ª TRAMETIDEOS.
- Con una superficie muy convexa y la otra plana y casi plana..... Tribu 3.ª FOMIDEOS.

C.—Aparatos esporíferos laminares ó delgados, sentados y con una superficie convexa y otra cóncava.. Tribu 4.ª POLISTICTEOS.

D.—Aparatos esporíferos pedicelados.

- Con pedicelo ramificado..... Tribu 5.ª CLADOMERIDEOS.
- Con pedicelo sencillo, lateral ó muy excéntrico..... Tribu 6.ª POLIPOREOS.
- Con pedicelo sencillo central ó apenas excéntrico.... ..... Tribu 7.ª BOLETEOS.

CLAVE DE LAS TRIBUS Y GENEROS

TRIBU 1.ª—FISISPOREOS

Hongos sin aparato esporífero, cuya única parte visible queda reducida a una placa más o menos carnosa, extendida sobre el soporte, casi siempre leñoso, y cuya superficie, cuando ha llegado a la plenitud de su desarrollo, apa-

rece sembrada de hoyitos o poros de forma y extensión variable.

1. *Gén.* — MERULIUS. 2. *Gén.* — PORIA.

TRIBU 2.ª — TRAMETIDEOS

Aparato esporífero muy grueso y sentado lateralmente sobre los leños, con las dos superficies convexas, con el contorno horizontal semirredondeado; formas diconoidea, de cojinete, semilenticular o lingüeforme.

3. *Gén.* — HEXAGONA. 4. *Gén.* — TRAMETES.
5. » — SPONGIOIDES. 6. » — HEMIDISCIA.
7. » — PSEUDOFOMES. 8. » — FRIESIA.

TRIBU 3.ª — FOMIDEOS.

Aparato esporífero grueso y sentado lateralmente sobre los leños, con una superficie muy convexa y la otra plana o casi plana, con el contorno horizontal semirredondeado; formas ungulada o mensular.

9. *Gén.* — FOMES. 10. *Gén.* — UNGULARIA.
11. » — DÆDALOIDES. 12. » — DÆDALEA.
13. » — MENSULARIA. 14. » SCALARIA.

TRIBU 4.ª — POLISTICTEOS.

Aparato esporífero laminar o delgado, sentado lateralmente, con una sola capa de tubos y con el contorno horizontal semirredondeado; formas concoidea, plana, cestiforme o navicular.

15. *Gén.* — POLYSTICTUS. 16. *Gén.* — BOUDIERA.
17. » — BULLIARDIA. 18. » — LENZITES.

TRIBU 5.ª — CLADOMERIDEOS.

Aparato esporífero con pedicelo dividido desde su base

en varias ramas, cada una de las cuales termina en un limbo laminar, o por lo menos no muy grueso, que lleva en su envés una sola capa tubífera.

19. *Gén.* — CLADOMERIS. 20. *Gén.* — CLADODENDRON.

TRIBU 6.ª — POLIPOREOS.

Aparato esporífero formado por limbo aovado o redondeado, laminar no muy grueso, provisto de un pedicelo lateral o muy marcadamente excéntrico, a veces corto, pero siempre bien manifiesto.

21. *Gén.* — FAVOLUS. 22. *Gén.* — FISTULINA.
23. » — POLYPORUS. 24. » — GANODERMA.

TRIBU 7.ª — BOLETEOS.

Aparato esporífero constituído por un sombrerillo horizontal, de contorno redondeado, y sostenido por un pedicelo central o ligeramente excéntrico.

25. *Gén.* — PELLEPORUS. 26. *Gén.* — PSEUDOPELLEPORUS.
27. » — PEPLOPUS. 28. » — BOLETUS.
29. » — STROBILOMYCES.

TRIBU 1.ª — FISISPOREOS.

Hymenio blando de consistencia gelatinosa, carnosa o cérea cuando más; poros alargados, que se anastomosan formando aberturas sinuosas o plegadas..... Gen. *Merulius.*
Hymenio seco; poros pequeños, redondos o hexagonales..... Gen. *Poria.*

Género **MERULIUS** *Haller.*

Hymenio sobre una placa carnosa nunca muy gruesa al principio, enteramente adherida a un soporte leñoso al fin

más o menos levantada en sus bordes. En la superficie se abren los poros que están distanciados, son alargados y se anastomosan formando alveolos con los bordes sinuosos, irregulares y denticulados. Hymenio blando o gelatinoso.

A.—*Esporas pardas u ocráceas.*

MERULIUS LACRIMANS *(Sow.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus lacrimans. Sow.
Auricularia pulverulenta. Sow.
Merulios destruens. Pers.
Merulius vastator. Tode.
Merulius lacrimans. Krombh.

Iconografía.

Fries. Swer. atl. Swamp., lám. 70.
Œder. Fl. Dan., lám. 2026.
Gott. Halm. Pilz. Samm., fig. 129.
Krombh. Nat. albild. Schwæmm., lám. 46, figs. 1 y 2.
Sow. Engl. Fung., láms. 213 y 214, fig. 29.
Pat. Tabl. anal., lám. 132.
Gillet. Hymen., lám. 478.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 85.
Britz. Polyp., fig. 156.
Cordier. Champ. France, lám. 42.
Harz. Nat. albid. vorz Pilze., lám. 77.
Huss. Ill. of Brit. Myc., tomo I, lám. 3.
Roum. Crypt. Ill., figs. 219 y 229.
Duf. Atl. Champ., lám. 65.
Roze. Atl. des Champ., lám. 98, fig. 216.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 30, B.
Dumee. Nouv. Atl. Champ., serie 11, lám. 53.

Descripción.—Placas grandes de diez a cincuenta centímetros, hasta de cinco milímetros de grosor total, de color amarillento muy pálido, con los bordes blancos algodonosos,

más gruesos y prominentes, aplicados al soporte y alguna vez revueltos.

Hymenio pulverulento, de color pardo, ocráceo o amarillento sucio, tapizando la porción superficial de la placa y del cual fluyen cuando se halla en vegetación activa algunas gotas de un líquido acuoso. Carne rosado-sucia con líneas finas más oscuras. Tubos pardo amarillentos, anchos, de unos cinco milímetros de longitud. Poros alargados, irregulares y sinuosos, que adquieren color rojizo, violado y al fin pardo. Espora elipsoidea, de cinco a seis μ, con frecuencia apiculadas en uno de sus extremos.

Habitación.—En los postes húmedos de las galerías de las minas y a veces sobre las maderas empleadas en las construcciones, en verano y otoño.

Area.—Comprobada su existencia en diversas localidades de las regiones septentrional, central y occidental.

Esta especie causa graves daños en las construcciones; las maderas invadidas por su micelio tienen una duración muy limitada, pues su destrucción, aunque lenta, es inevitable.

MERULIUS PULVERULENTUS *(Sow.)*: Fries.

Sinonimia.

Auricularia pulverulenta. Sow.

Descripción.—Especie de aspecto semejante a la anterior, de la que difiere por formar placas más delgadas, membranosas, que no son glutinosas al tacto, sin engruesamiento en los bordes y por estar más o menos claramente marcadas de zonas concéntricas en su cara superior y aterciopelado araneosas en la inferior. Poros con las márgenes amarillo leonadas.

Habitación.—Aparece sobre los troncos empleados en las galerías de las minas de carbón, especialmente en verano y en otoño.

Area.—Hasta hoy sólo yo le he hallado con reiteración

en las minas de carbón de algunas localidades asturianas.

MERULIUS GUILLEMOTI *Boud.*

Sinonimia.

Merulius lacrimans. Fr. var. *Guillemoti.*

Iconografía.

Boud. Ic. Myc., tomo I, lám. 165.

Descripción.—Forma placas extendidas revueltas y a veces muy gruesas, de diez a veinte centímetros de longitud, por cinco a seis de ancho y uno a dos de grueso, sedosas, algo fibrosas, con los bordes engrosados y blancos y con la superficie teñida de un matiz ceniciento y al fin ocráceo al emitir las esporas. Carne blanca, algo violácea y con zonas parduzcas. Hymenio amarillento casi gelatinoso, formando pliegues, vermiformes leonados y al fin anaranjados. Esporas elipsoideas, de doce a trece μ, por seis a siete y de color amarillento ocráceo, con la epispora sembrada de gránulos papilosos.

Habitación.—En los troncos descortezados y maderos almacenados para las galerías de las minas. Aparece al fin de la primavera y en el verano.

Area.—Hasta hoy sólo ha sido hallado por mí en la región septentrional.

B.—*Esporas incoloras.*

MERULIUS HYMANTIOIDES. Trus.

Sinonimia.

Xylomyxon croceum. Pers.

Iconografía.

Sow. Engl. Fung., lám. 346.
Pers. Myc. Eur., lám. 14, fig. 3 y 4.
Fries. Ic. Selec. Hymen., lám. 193, fig. 1.

Descripción.—Talo reducido a placas de cuatro á diez

centímetros en mayor dimensión sedoso-lanudas delgadas, aplicadas al soporte, con el borde o margen araneoso, mal definido y de color liláceo. Los poros afectan la forma de pliegues tortuosos ó vermiculares, de color amarillento, muy débil al principio y que se va luego oscureciendo hasta presentar un tono oliváceo claro. Espora amarillento-verdosa, de forma elipsoidea, de seis a siete μ de diámetro.

Habitación.—En otoño en los bosques de coníferas de las regiones montañosas, ya sobre los troncos en descomposición o ya sobre los montones de hojas pudriendo en los lugares húmedos y abrigados.

Area.—Hasta hoy apenas si puede señalarse alguna en la Península, pues no conozco de él otra mención que la de haberle hallado yo mismo en pinares y abetales del Pirineo central, en la provincia de Huesca, desde Benasque a Literola.

MERULIUS TREMELLOSUS. Fries.

Sinonimia.

Boletus arboreus. Sow.
Auricularia papyrina. Sow., non, Bull.

Iconografía.

Œder. Fl. Dan., lam. 1553 y lám. 776, fig. 1.
Sow. Engl. Fung., lám. 346 y 349.
Huss. Ill. of Brit. Myc., I., lám. 10.
Klotzch. Fl. Boruss., lám. 460.
Sic. Hist. nat. Champ., lám. 59, fig. 302.
Britz. Hymen. Ausbg., V., fig. 86.
Gillet. Hymen., lám. 479.

Descripción.—Aparato esporífero reducido a placas semiredondas, con frecuencia normales al soporte, gruesecitas, de cuatro a siete centímetros de diámetro, de consistencia entre carnosa y gelatinosa, con la superficie blanquecina y manifiestamente tomentosa, con los bordes algo encorvados, pero presentando en la zona marginal la misma consisten-

cia y aspecto que en la central. Los poros afectan a forma de pliegues irregulares, tortuosos, con los bordes dentados y el fondo rosado pálido o cárneo. Esporas hialinas, de unas seis μ de diámetro y alargadas hasta exceder del doble del diámetro.

Habitación.—En otoño sobre los tocones en los bosques de cupulíferas, betuláceas y salicáceas.

Area.—Hasta ahora no puede señalársele a esta especie mas que la banda septentrional, desde Asturias hasta la base del pirineo aragonés.

MERULLIUS PAPYRINUS *(Bull)*. Fries.

Sinonimia.

Auricularia papyrina. Bull., non Sow.
Merulios corium. Fr.
Merulius purpurascens. DC.

Iconografía.

Sow. Engl. Fung., lám. 349.
Bull. Champ. de la France, lám. 402.
Grev. Scott. crypt. Fl., lám. 147.
Doass. et Pat. Champ. fig. et dess., lám. 61.
Britz. Hymen. Ausbg. IX.
Britz. Polyp., fig. 154.

Descripción.—Aparato esporífero constituído por placas muy delgadas y extendidas, frecuentemente lobuladas en sus bordes, a veces con las márgenes revueltas hacia arriba hasta aparecer cóncavas, bastante resistente, de consistencia carnosa en fresco y con la superficie superior ocráceo pálida con zonas concéntricas oscuras, la inferior blanca y algodonosa; ambas como cubiertas de tomento fibroso fino; carne levemente rojiza. Los poros forman una nerviación reticulada, de color rojo de ladrillo no muy intenso. Esporas elipsoideas, algo alargadas, de unas ocho μ, incoloras.

Habitación.—Se encuentra durante el otoño en los sitios

sombríos de los bosques, sobre las ramas cortadas y secas que empiezan a descomponerse.

Area.—Hasta hoy sólo está bien comprobada su existencia en las regiones occidental y septentrional de la Península.

Género **PORIA** *Pers.*
(*Physisporus* Chev.).

Hongos constituídos por placas delgadas, de consistencia de fieltro, extendidas sobre troncos y con los bordes generalmente muy adherentes al soporte. Poros distribuídos por toda la superficie, redondos o hexagonales, incoloros o de muy diversos colores. Tubos cortos, pero perceptibles como distintos de la carne. Hymenio seco, no gelatinoso.

A.—*Poros leonados u ocráceos.*

PORIA CONTIGUA (Pers.). *Fr.*

Sinonimia.

Boletus contiguus. Pers.

Physisporus contignus. Fr.

Iconografía.

Rostk. Deutsch. Fl., lám. 27, fig. 5.

Descripción.—Placas de tamaño muy variable, aunque nunca grandes, extendidas, confluentes en figuras muy irregulares, algo gruesecitas, consistentes, vellosas en sus bordes cuando jóvenes, de color amarillento, más ó menos acanelado. Poros redondos iguales, de bastante tamaño, de color ocráceo intenso ó anaranjado. Esporas de unas seis μ.

Habitación.—Sobre troncos y leños podridos en los bosques, durante la primavera y el otoño.

Area.—Hallada, aunque rara, en los Pirineos y en las regiones septentrional y occidental.

PORIA FERRUGINOSA. Schrad. non Rostk.

Sinonimia.

Polyporus ferruginosus. Fr.

Iconografía.

Grev. Scott. crypt. Fl., lám. 199.

Doass. et Pat. Champ., fig. et dess., lám. 79.

Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 64.

Descripción.—Aparato esporífero reducido a placas de unos tres por cinco centímetros de diámetro extendidas sobre el soporte, gruesecitas y de regular consistencia, de color pardo rojizo oscuro u ocráceo. Tubos relativamente largos (de más de un centímetro) y delgados, que faltan siempre en la zona marginal. Poros redondeados al principio, luego desgarrados en sus bordes, de color de canela.

Habitación.—Sobre los troncos viejos, especialmente en los de aliso, en los sitios húmedos de los bosques; vive también sobre los de las acacias en las carreteras y jardines. Aparece en verano y otoño.

Area.—Bien comprobado en las regiones septentrional, occidental y base del Pirineo.

PORIA NITIDA. Pers.

Sinonimia.

Poria euporus. Kast.

Poria micaus. Rost.

Iconografía.

Boud. Ic. Myc. Tomo I, lám. 160.

Pers. Obs. II, lám. 4, fig. 1.

Descripción.—Placa membranosa y delgada, amarillenta o blanquecina, cuyas dimensiones oscilan entre diez y veintiseis centímetros de extensión, con filete marginal muy estrecho, blanco y sedoso, que se separa al fin del soporte. Los tubos cortos, sobrepuestos en varios estratos. Los poros, que sobresalen formando papilas hemisféricas, son pequeños, alveolados, finamente denticulados en sus bordes, de color blanco al principio y más tarde aparecen de color

amarillo pálido, amarillo de oro, albaricoque y aun encarnados cambiantes. Esporas de cuatro a cinco μ, ovoideas o esféricas, con la exospora punteada.

Habitación.—En lugares sombríos, sobre los troncos secos de los sauces y chopos, en otoño y primavera.

Area.—Hasta hoy sólo he visto esta especie en localidades del Pirineo y de la región septentrional; pero es muy probable en otras, sobre todo en la occidental.

B.—*Poros rojizos ó violados.*

PORIA VIOLACEA. Alb. et Schw.

Sinonimia.

Poria purpurea. Rostk. non Fr.

Iconografía.

Rostk. Deutsch. Fl. tomo IV, lám. 27, fig. 3.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 74.

Descripción.—El aparato esporífero de esta especie se reduce a placas membranosas, muy delgadas e íntimamente adheridas al soporte, de consistencia cérea o casi gelatinosa, con la superficie lampiña y la coloración de amatista, que se oscurece después pasando a violeta y aun a color de sangre. Poros de un medio milímetro de diámetro, en forma de alveolos, transparentes. Espora elipsoidea, de unas siete μ de diámetro, con la exospora sembrada de puntitos papilosos esparcidos.

Habitación.—Aparece en otoño sobre las ramas caídas de los abetos.

Area.—Hállase citada en la región occidental.

PORIA PURPUREA. Fr.

Sinonimia.

Poria lilacina. Schw.
Physisporus purpureus. Fr.

Iconografía.

Gillet. Hymen., lám. 471.

Descripción.—Constituída por placas desiguales de tamaño muy variable, aunque siempre pequeñas, delgadas y tiernas, con la superficie lampiña y la coloración rosado pálida o lilácea al principio y luego purpúreo-violácea, excepto en la región marginal, que presenta una zona relativamente ancha, blanca y sedosa. Poros muy pequeños (de un cuarto de milímetro próximamente), bastante iguales, redondeados o poligonales, del mismo color que el micelio. Esporas elipsoideas u oblongas, de unas ocho μ. de diámetro máximo.

Habitación.—Hállase en invierno y primavera sobre los troncos en descomposición, especialmente en los de cupulíferas y en los alisos.

Area.—Comprobada en las regiones occidental y septentrional.

PORIA INCARNATA. Pers.

Sinonimia.

Boletus incarnatus. Pers.
Poria cruenta. Pers.
Physisporus incarnatus. Fr.

Iconografía.

Pers. Myc. eur., tomo II., lám. 16, fig. 4.
Fries. Ic. select. Hymen., lám. 89., fig. 1.
Pat. Tabl. anal., lám. 558.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 36.
Doas et Pat. Champ. fig. et dess., lám. 53.
Gillet. Hymen., lám. 471.

Descripción.—Placas extendidas, de cuatro a doce centímetros en su máxima dimensión, coriáceas o suberosas, lisas de color rojizo claro, que va desvaneciéndose del centro a la periferia hasta quedar blanca en la zona marginal, que es sedosa; carne escasísima. Tubos de siete a ocho milímetros

de largo, a veces en dos capas, rosáceos. Poros poligonales con los bordes enteros de igual color, que comunican con verdaderos tubos, largos y desiguales, que no están orientados perpendicularmente al soporte. Esporas de seis-siete μ, elipsoideas.

Habitación.—Sobre tocones de pino en primavera en algunas localidades de Aragón.

PORIA RHODELLA. Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 442, fig. D.

Fries. Ic. selec. Hymen., lám. 189, fig. 2.

Descripción.—Constituída por placas irregulares de tamaño muy variable, membranosas, adheridas a los troncos, blandas, de color blanco rosado, excepto en el margen, que carece de este matiz. Poros reunidos en grupos desiguales, pequeños, de forma urceolar, de color rosado y como empolvados o pruinosos. Espora elipsoidea o casi esférica, de unas seis μ de diámetro y con la exospora sembrada de puntitos transparentes.

Habitación.—Suele hallarse en otoño en los bosques de las montañas sobre los troncos cortados y tocones de diversos árboles.

Area.—Comprobada, aunque nunca en abundancia, en diversas localidades de las regiones septentrional y occidental.

C.—*Poros blancos.*

PORIA VULGARIS. Fr.

Sinonimia.

Boletus inversus. Bull.

Physisporus vulgaris. Fr.

Iconografía.

Bolt. Hist. of Fungi, lám. 166, fig. a y b.

Letell. Fig. des Champ., lám. 690, fig. 2.
Rost. Deutsch, Fl., lám. 60.

Descripción.—Placas extendidas, delgadas, de contorno redondeado de cuatro a diez centímetros, muy blancas, bastante consistentes y muy adheridas al soporte, con la superficie finamente tomentosa, excepto en la zona marginal, que es lampiña. Tubos delgados, de cinco a diez centímetros, blanquecinos. Poros pequeñísimos, muy apretados, casi cerrados, cubriendo casi toda la placa, redondos, blancos, cambiantes. Esporas elipsoideas u ovoideas de unas seis pulgadas en su diámetro mayor.

Habitación.—En los sitios sombríos de los bosques, sobre troncos y ramas secas de especies muy variadas.

Area.—Comprobada hasta hoy solamente en las regiones botánicas del Norte, Centro y Oeste.

PORIA MEDULLA PANIS. *(Jacq.).* Pers.

Sinonimia.

Boletus Medulla Panis. Jacq.
Physisporus Medulla Panis. Fr.

Iconografía.

Bolt. Hist. of Fung., lám. 166, fig. C y D y lám. 167, figura 2.
Fries. Ic. selec. Hymen., lám. 190, fig. 2.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 65.
Letell. Fig. des Champ., láms. 628 y 690, fig. 1.
Michœl. Führ. fur Pilz., tomo III., lám. 36.
Mig. Krypt. Fl., tomo III., lám. I. 31.

Descripción.—Placas de color blanco, al fin muy levemente amarillentas o rosadas, variables de forma y de una longitud de cuatro a diez centímetros, de regular grosor y consistencia, y con la zona marginal casi lampiña, aun más blanca que el centro y ondeada. Poros blancos o apenas coloreados, redondos, como empolvados de cal, con los bordes enteros que comunican con tubos oblícuos o perpendicula-

res a la superficie. Esporas elipsoideas de cuatro a nueve μ de largo por tres a cuatro de ancho.

Habitación.—Sobre los troncos secos en los bosques de cupulíferas durante el otoño.

Area.—Hasta hoy solamente ha sido mencionado en la región oriental.

PORIA OBDUCENS. Pers.

Sinonimia.

Physisporus obducens. Fr.

Iconografía.

Pat. Tab. anal., lám. 17.

Descripción.—Placas extendidas de ocho a veinte centímetros de longitud, gruesas, blancas, casi duras, con los bordes adelgazados. Poros pequeñísimos, redondos, ocráceos, que faltan en la zona marginal y que comunican con los tubos de la capa superior, los cuales presentan la misma coloración; debajo de ésta suele haber otras dos o tres capas de tubos estratificados, cuya coloración es más pálida y aun nula en los estratos más próximos al soporte. Esporas ovoideas u oblongas, de unas cinco μ sobre basídios cortos y anchos.

Habitación.—Sobre tocones viejos de especies muy diversas (cupulíferas, aceráceas, fraxináceas, ulmáceas) en la estación primaveral.

Area.—Demostrada hasta hoy sólo en el Norte y centro de la Península.

Observación.—Varios autores contemporáneos consideran esta especie como una forma del *Fomes connatus* de Fries.

PORIA CORTICOLA. Fr.

Sinonimia.

Polyporus corticola. Fr.
Polyporus pertusus. Pers.
Polystictus corticola. Fr.

Descripción.—Formando costras muy extendidas, sobre todo en sentido longitudinal, blanquecinas, secas, muy adherentes, algodonosas, con la zona periférica fibrilosa y algo desflecada en los bordes. Poros distintamente separados, muy pequeños, redondos, bastante iguales, blancos, apareciendo al principio como papilas globulosas y aterciopeladas, que se abren luego por su cima. Esporas elipsoideas de unas seis μ.

Habitación.—En la superficie interna de las cortezas de los troncos de sauce podridos y huecos, desde la primavera al otoño.

Area.—Regiones del Norte y Centro.

PORIA MOLLUSCA. Pers.

Iconografía.

Œder. Fl. Dan., lám. 1299.

Sow. Engl. Fung., lám. 387, fig. 9.

Briz. Hymen. Ausbg. V., fig. 73.

Descripción.—Sus aparatos esporíferos aparecen constituídos por placas blandas y delgadas, de contorno mal definido, extendidas y adheridas á los troncos, blancas y con la zona marginal fibroso sedosa, con fibras finas y estrías radiantes. Tubos cortos, delgados y firmes. Poros pequeños, redondos y blancos al principio; luego con los bordes desgarrados y con coloración amarillenta sucia.

Habitación.—Hállase en otoño e invierno sobre los troncos podridos en los bosques de coníferas.

Area.—Hasta hoy sólo se ha mencionado en la región occidental.

PORIA RETICULATA. *(Pers.)*. Fr.

Sinonimia.

Poria fugax. Pers.

Iconografía.

Fries. Ic. selet. Hymen., lám. 16, fig. 2.

Pers. Ic. pict. rar, Fung., lám. 190, fig. 3.
Hoffm. Ic. anal. Fung., lám. 10.

Descripción.—Sus aparatos esporíferos quedan reducidos a placas pequeñas con el borde sinuoso mal definido y fibriloso, tenues y fugaces, de color blanco níveo, con la zona marginal de igual color, pero marcada por finas estrías y fibrillas radiantes. Poros anchos y poco profundos en forma de cúpulas invertidas, distanciados, con el borde redondeado, blancos al principio y luego amarillentos o pajizos. Esporas elipsoideas, de cinco a seis μ.

Habitación.—Aparece en otoño sobre diversidad de troncos en vías de descomposición en los bosques densos y sombríos.

Area.—Encuéntrase comprobada en las regiones septentrional y occidental, aunque nunca en abundancia.

PORIA VAPORARIA. Pers.

Sinonimia.

Polyporus macer. Somm.

Iconografía.

Gillet. Hymen., lám. 472.
Pat. Tabl. anal., lám. 144 (variedad).
Mass. Engl. Fung., lám. 31, fig. 3.

Descripción.—Su micelio está constituído por grandes manchas blancas, algodonosas, mal definidas en su contorno, que aparecen sobre los troncos formando isletas y sobre las cuales aparecen placas himeniales formadas por poros alveolares, de medio milímetro de diámetro por uno a cuatro de profundidad, con la superficie blanca; después de color de crema, y los bordes algo dentados. Esporas elipsoideas, de cinco a seis μ, sostenidas por esterígmatos tan largos como ellas.

Habitación.—En los troncos y tocones de los bosques de abetos en las localidades montañosas, durante la primavera.

Area.—Sólo conocida hasta hoy en nuestro país en algunas localidades del Pirineo central.

Tribu 2.ª — Trametideos

	Poros grandes y distanciados o pequeños, pero entre los cuales asoma en algunos puntos la carne	1
	Poros pequeños y muy próximos unos á otros; la carne no atraviesa nunca la capa tubífera	2
1.	Poros alveolados, hexagonales; aparato esporífero suberoso o leñoso	Gen. *Hexagona.*
	Poros oblongos o alargados; aparato esporífero duro y coriáceo	Gen. *Trametes.*
2.	Una sola capa tubífera	3
	Varias capas tubíferas estratificadas	4
3.	Formas sinuosas y confluentes, mal definidas	Gen. *Spongioides.*
	Formas no confluentes y claramente semidiscoideas	Gen. *Hemidiscia.*
4.	Aparato esporífero diconoideo o muy pronunciadamente convexo y aun giboso en ambas superficies	Gen. *Pseudofomes.*
	Aparato esporífero en forma de almohadilla semicircular, con las dos superficies ligeramente convexas	Gen. *Friesia.*

Gen. **HEXAGONA** *Poll.*

Aparatos esporíferos de forma semiorbicular y consistencia suberoso-leñosa. Poros grandes y de forma hexagonal. Tubos formados por seis caras planas, y cuya longitud aumenta con la duración del aparato esporífero y llegando a adquirir consistencia leñosa.

HEXAGONA FAVUS. *(Bull.)*. Poll.

Sinonimia.

Polyporus Gallicus. Fr.
Trametes Gallica. Fr.
Hexagona Gallica. Poll.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 421.
N. ab. E. System., lám. 222.

Descripción.—Aparato esporífero de forma mensular de cinco a ocho centímetros de diámetro, con la superficie rojiza erizada de fibrillas largas y sueltas, simulando escamitas pardas desflecadas y empizarradas. Carne suberosa, pardo-rojiza o leonada, tubos largos, hasta de dos centímetros los del centro. Poros grandes, de dos a cuatro milímetros de diámetro, profundos, redondeados al iniciarse y marcadamente hexagonales después; de color también pardo rojizo o más o menos claro.

Habitación.—Sobre los troncos secos, o en proceso de desecación, de los pinos y abetos, durante el otoño.

Area.—Comprobado hasta hoy solamente en los bosques de algunas localidades pirenaicas y de la región septentrional.

HEXAGONA MINOR. *Nov. Sp.*

Descripción.—Aparato esporífero mensular, de contorno semirredondo, de cinco a seis centímetros de diámetro y de tres a cuatro de grueso, con la cara superior casi plana y la inferior muy convexa; superficie superior, muy desigual, sembrada de granulaciones gruesecitas, sin cerdillas ni tomento, de color blanquecino, ligeramente ocráceo. Carne ocrácea pálida, no muy abundante, de consistencia suberosa, algo dura. Tubos largos, los del centro hasta de tres centímetros, de mediano grosor y de igual coloración que la carne. Poros grandes, de uno a dos milímetros, desiguales, unos hexagonales y otros redondeados, con las paredes gruesas y los bordes enteros. Esporas elipsoideas.

Habitación.—Sobre los tocones de castaño y roble, durante el otoño.

Area.—Sólo la he encontrado en los bosques de cupulíferas de Asturias, y siempre rara.

Observaciones.—Confieso que he vacilado mucho antes de resolverme a dar nombre genérico a esta especie, pues si su morfología general recuerda la de la *Hexagona Favus*, igualmente que el dibujo de su cara inferior, aunque sus poros no son típicamente hexagonales; mas como tampoco lo son todos los de la especie típica del género *Hexagona*, al menos los que he recogido y estudiado en España, no hallo nada que se oponga a la colocación de la nueva especie dentro de este género.

Por otra parte, no hallo manera de asimilar esta especie a ninguna del género *Trametes*, por el tipo de sus poros, que nada tienen de alargados ni de sinuosos, ni tampoco por la forma general de su aparato esporífero. Lo único que en esta forma me recuerda los *Trametes* es el que en algunos ejemplares se observa algún islote de carne en la superficie porífera; pero como esto se observa algunas veces en otros géneros, *Dædalea* por ejemplo, y falta en algunos ejemplares de *Trametes*, no me autorizaría dicha observación para colocar la especie en este género cuando carece de los caracteres esenciales y típicos que sirven para reconocerle.

Un *Trametes* hay cuya superficie presenta porte parecido al de la *Hexagona* que describo, que es el *Trametes campestris* de Quelet, representado en la figura 18 de los *Tableaux analytiques* de Patouillard; pero aparte de que dicho hongo afecta una forma placoidea y nunca mensular, y de que su grueso es muchísimo menor y sus tubos tres veces más cortos que los de la nueva especie, tiene aquélla los poros con el borde dentado, según hacen notar todas las descripciones y se observa muy claramente en la figura mencionada, mientras que los de la nueva especie son enterísimos.

Decidido, pues, por el género *Hexagona* y no cabiendo referir los ejemplares por mí recogidos a la *H. Favus* ni a ninguna de las especies descritas de este género, no hallo otra solución que la de describirla y denominarla como nueva.

Gen. **TRAMETES.** Fr.

Aparatos esporíferos en forma de cojinete, con saliente bien acusado por ambas caras, pero frecuentemente más pronunciado en la inferior o tubífera. Tubos desiguales dispuestos en una sola capa. Poros redondeados, oblongos o alargados, marcadamente desiguales, algunos como cegados, con el borde sinuoso, pero nunca laberintiformes. Carne dura, leñosa y ligera, penetrando a veces entre los tubos y formando isletas que aparecen entre los poros. Estos son largos, desiguales y leñosos. Especies a veces muy olorosas.

A.—*Carne coloreada.*

TRAMETES PINI. Brot.

Sinonimia.
Polyporus Pini. Pers.
Dœdalea Pini. Fr.

Iconografía.
Lucand. Champ. de la France, lám. 248.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 76.
Rostk. Deutsch. Fl. lám. 50.
Klotz. Fl. Boruss., lám. 380.
Sic. Hist. nat. des Champ., lám. 60, fig. 307.
Boud. Ic. myc., tomo I., lám. 161.
Mig. Krypt. Fl., tomo III., lám. 1, 35.

Descripción.—Aparato esporífero grueso, seco y muy duro, con la superficie superior o estéril marcada por surcos y zonas concéntricas, cubierto de grandes verrugas, prominencias tuberiformes y ondulaciones desiguales, cuya coloración general es parda y al fin negruzca, ocrácea clara en el margen. Carne de color leonado o herrumbrosa, de

consistencia suberosa, casi inodora aun en estado fresco. Un solo estrato de tubos amarillentos, relativamente cortos. Poros anchitos, oblongos o hexagonales irregulares, de color amarillento, ligeramente pardeado y luego ocráceos y aun casi rojizos, desiguales. Papilas fusiformes, grandes y parduzcas, que atravesando el himenio destacan sobre los basidios. Esporas de unas cuatro μ, aovado esféricas y de color ocráceo muy pálido.

Habitación.—Sobre los troncos de los pinos en otoño.

Area.—Comprobada en las regiones septentrional, occidental y central de la Península.

TRAMETES TROGII. Berkc.

Sinonimia.

Trametes vulpina. Kalch.

Trametes hispida. Bugl.

Iconografía.

Lucand. Champ. de la France, lám. 424.

Gillet. et Lucand. Cat. raiss. des Champ., lám. 4, fig. 1.

Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 78.

Kalch. Ic. select. Hymen. Hung., lám. 30, fig. 2.

Gillet. Hymen., lám. 471 y 472.

Descripción.—Aparato esporífero parduzco patente o algo revuelto, de cinco a ocho centímetros en su diámetro horizontal, adelgazado en su borde, con la superficie superior erizada de cerditas hasta de cuatro milímetros de longitud, leonadas o amarillentas y adelgazadas e incoloras en su ápice. Carne suberosa, seca, inodora, de color de crema claro, casi blanca cuando joven, oscureciéndose con el tiempo hasta llegar a ser parda amarillenta. Una sola capa de tubos blanquecinos hasta de 15 milímetros. Poros de un milímetro, poligonales, con el borde denticulado, poco profundos, variando desde el color de crema hasta el de café claro. Esporas alargadas hasta de doce o trece μ, cilindroideas, hialinas y con la exospora sembrada de papilas.

Habitación.—Sobre los troncos de cupulíferas, salicáceas y betuláceas en primavera y verano.

Area.—Hasta hoy sólo es conocida de la región septentrional y de algunas localidades de la central.

Observaciones.—La especie llamada *Trametes hispida* Bugl. pasa por sinónima del *Tr. Trogii* actualmente, considerándose aquélla como un estado más avanzado de ésta, opinión que parece autorizada por la coloración más oscura de las cerditas de la cara superior, que pueden llegar hasta el color pardo negruzco, y por el color pardo de la carne de la misma. Pero existe siempre alguna diferencia morfológica, pues los aparatos esporíferos del *Tr. hispida* son salientes y aun casi apiculados en el centro, mientras que el *Tr. Trogii* tiene el ápice muy obtuso y redondeado. Además, los tubos del *Tr. hispida* son mitad menores que los del *Tr. Trogii.* Ambas formas se encuentran en nuestro país.

TRAMETES RUBESCENS. A. et S.

Sinonimia.

Trametes Bulliardi. Fr.

Iconografía.

Pat. Tab. anal., lám. 21.

Alb. et Schw. Conspect. fung., lám. 11, fig. 2.

Descripción.—Aparato esporífero en forma de cojinete bastante aplanado, con un diámetro horizontal de diez a doce centímetros y adelgazado hacia el borde, con la superficie superior pubescente, algo zonada hacia los bordes, y de color blanco, rosado intenso y por fin pardo amarillento claro. Carne abundante, suberosa, blanca al principio, luego rosada, y, por último, pardo amarillenta, con zonas de distinta intensidad. Tubos relativamente muy cortos, casi tan anchos, rojizo sucios. Poros de dos a tres milímetros, muy coloreados de blanco al principio, luego rosados y con los bordes desgarrados. Espora cilindroidea, de unas diez μ de

longitud y más o menos arqueada. Esporas elipsoideas, de cinco a siete μ de longitud.

Habitación.—Sobre los tocones de los sauces, durante el verano y otoño.

Area.—Sólo se ha citado en las provincias vascongadas (Aranzadi).

Observación.—Es considerado actualmente como una forma del *Lenzites tricolor*, especie citada en casi toda la Península.

B.—*Carne blanca y poco o nada olorosa.*

TRAMETES GIBBOSA. *(L.)*. Fr.

Sinonimia.

Boletus tuberosus. L.
Trametes sinuosa. Sow.
Trametes gibbosa. Pers.

Iconografía.

Œder. Fl. Dan., lám. 1964.
Purt. Bot. Descr., tomo III, lám. 14.
Sow. Engl. Fung., lám. 194 (una variedad).
Lucaud. Champ. France, lám. 75.
Huss. Ill. of Br. Myc., tomo II, lám. 4.
Britz. Hymen. Ausbg., V, lám. 79.
Gillet. Hymen., lám. 474.
Boud. Ic. Myc., tomo I, lam. 162.
Roll. Atl. des Champ., lám. 97, fig. 212.

Descripción.—Aparato en forma de cojinete aplastado, muy hinchado o prominente en su porción central, con el diámetro horizontal de diez a doce centímetros, la superficie superior pubescente o vellosa blanca, marcada con algunas zonas concéntricas y el borde algo amarillento. Carne blanquecina abundante, de consistencia suberosa, bastante tenaz

y sin olor definido. Tubos rectos lineales, bastante iguales. Poros de uno a tres milímetros alargados, blancos o apenas amarillentos, alguna vez transformados en laminitas. Esporas elipsoideas alargadas, hasta de seis a siete μ, algo apiculadas en uno de sus extremos.

Habitación.—Sobre los tocones, preferentemente de cupulíferas, alguna vez de sauces y fresnos, en primavera.

Area.—Comprobado únicamente en los Pirineos.

TRAMETES POPULINA. Fr.

Sinonimia.

Polyporus populinus. Fr.
Fomes populina. Fr.

Descripción.—Aparatos esporíferos muy prominentes en el centro, casi ungulados, con la superficie lisa, blanca, zonada y venosa aterciopelada. Carne blanca, suberoso leñosa y casi inodora. Tubos cortos pequeños blanquecinos. Poros pequeños redondeados, blancuzcos. Espora dipsoidea de seis a siete μ de diámetro.

Habitación.—Se encuentra esta especie en los troncos viejos del álamo negro, representada bien por aparatos esporíferos solitarios bien por varios superpuestos, durante el verano y el otoño.

Area.—Es relativamente frecuente en las regiones boreal, oriental y occidental.

TRAMETES LUTESCENS. *Nov. Esp.*

Descripción.—Aparatos esporíferos de contorno semicircular desigual, de cinco a siete centímetros de diámetro máximo por tres a cuatro de altura, con la superficie superior bastante convexa, el borde adelgazado y la cara inferior casi cóncava; cara superior casi aterciopelada, por estar cubierta de escamitas fibrilosas, de color amarillento, casi anaranjado, sin zonas, pero con el borde algo más pálido. Carne blanca, inodora, no muy abundante y de consistencia

suberosa. Tubos cortos, desiguales, blancos. Poros blancos redondeados o alargados, desiguales, con el borde entero y mezclados con abundantes islotes de carne estéril.

Habitación.—Hállase sobre los troncos de los pinos *(Pinus sylvestris)* durante el otoño e invierno.

Area.—Sólo puedo atribuirle hasta hoy la de la región de Levante, pues los ejemplares que poseo proceden de Puerto Mingalbo (Teruel, rayando con Castellón) y fueron recogidos por el farmacéutico Sr. García Repullés.

Observaciones.—Pudiera asimilarse en algo esta especie con el *Trametes Trogii* Berkl., por tener erizada la superficie superior y el borde adelgazado; pero en el *Tr. Trogii* las papilas son muy largas (hasta de cuatro milímetros), y en la nueva especie no alcanzan a un milímetro, ni son incoloras en el ápice; la carne es en aquélla siempre coloreada, por lo menos de color amarillento de crema y se oscurece luego hasta alcanzar tonos pardos, mientras en el *Tr. lutescens* es perfectamente blanca; los poros en aquella especie están coloreados y tienen los bordes denticulados, en ésta son blancos y con el borde entero. No es, pues, posible, aun procediendo con un amplio criterio, referir ambos hongos a un mismo tipo específico.

C.—*Carne blanca y con olor agradable.*

TRAMETES ODORA. *Somm.* (non *olorata* Fries.)

Iconografía.

Britz. Hymen. Ausbg. V, fig. 82.
Bolt. Hist. of Fung., lám. 162.
Pat. Tabl. anal., lám. 19.

Descripción.—Aparato esporífero giboso y grueso, con la superficie superior blanca o apenas rosada y aterciopelada, al fin con una banda amarillenta clara u ocrácea en la zona

marginal. Carne blanca, gruesa, consistente, elástica y que, en fresco, desprende un olor que recuerda el del anís. Una sola capa tubífera, hasta de más de un centímetro, pardo ocrácea. Poros pequeños e iguales, redondos, con el borde al fin algo dentado, pasando del color crema al amarillo claro. Esporas ovoideas, muy levemente amarillas, de siete a ocho μ, con la exospora sembrada de puntitos redondeados.

Habitación.—Se encuentra sobre los tocones de los sauces y fresnos en los meses de la primavera.

Area.—En las vertientes del Pirineo, en la región septentrional y rara en la central.

TRAMETES SUAVEOLENS. *(Paut)*. Fries.

Sinonimia.

Boletus suaveolens. Sow. non Bull.
Polyporus suaveolens. Kromb.
Agaricus suaveolens. Paul.

Iconografía.

Œder. Fl. Dam., lám. 1849.
Sow. Engl. Fungi, lám. 288.
Harz. Nat. albild. vorz Pilze, lám. 49.
Huss. Ill. of Brit. Myc., tomo I, lám. 43.
Gott Hahn. Pilz. Samm., lám. 126.
Sterb. Teath. Fung., lám. 27, fig. D.
Pat. Tabl. anal., lám. 20.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 80.
Gillet. Hymen., lám. 473.
Cord. Champ. de la France, lám. 41, fig. 2.
Duf. Atl. des Champ., fig. 48.
Krombh. Nat. albild. Schwœmm., lám. 4, fig. 29.
Bot. Zeit. 1899, lám. 11, fig. 3.
Tratt. Fung. austr., fig. 4.
Boud. Ic. Myc., tomo I, lám. 163.
Mass. Engl. Fung., lám. 31, figs. 1 y 2.

Descripción.—Aparato esporífero en forma de cojinete, hasta de unos seis centímetros de diámetro horizontal, a veces dos sobrepuestos, blando, con la superficie superior de color de crema clara y aun blanquecina, pubescente. Carne blanca, coriácea, no muy consistente, aromática en fresco, con un olor complejo que recuerda los de la vainilla, el anís y el espliego al mismo tiempo. Tubos desiguales, los más largos de unos 12 milímetros, gruesecitos. Poros desiguales, redondeados, de un milímetro como diámetro medio, con el borde denticulado y que sucesivamente son blancos, de color crema amarillenta, grisáceos y pardos. Esporas elipsoideas, bastante alargadas hasta de diez a doce μ, incolora y con la exospora ligeramente papilosa.

Habitación.—Sobre los tocones de los sauces, en verano y otoño.

Area.—Se ha citado hasta hoy únicamente en algunas localidades de Aragón y de Galicia.

TRAMETES NICRESCENS. *Nov Sp.*

Descripción.—Aparatos esporífero en forma de cojinetes con el contorno semicircular, frecuentemente sobrepuestos y entresoldados, de unos ocho a diez centímetros de diámetro, por cuatro a nueve de grueso en el centro, algo prominente en éste, aunque mucho menor que el *Tr. gibosa*, con la superficie superior levemente pubescente al principio, lampiña después, no zonada, muy desigualmente sembrado de hoyitos y anfractuosidades, mate, de color blanco, pero ennegrecido en la parte central por la abundancia de gránulos negruzcos, desvaneciéndose en grisáceo hasta los bordes que persisten en casi blancos. Carne blanquísima y muy abundante, bastante consistente, dura en seco, con olor agradable de seta. Tubos anchos, blancos, de diez a diez y nueve milímetros de longitud y dispuestos en una sola capa. Poros muy desiguales, algunos casi redondos y otros de dos a siete veces más largos que anchos, separados por tabiques

gruesecitos. Esporas elipsoideas, incoloras, de siete a ocho μ.

Habitación.—En otoño sobre los troncos de los olmos.

Area.—Hasta hoy sólo puedo citarla en la región septentrional: en Solares (Santander), Llanes y Oviedo en Asturias. Pero, dada la abundancia con que los olmos se hallan distribuídos en nuestro país, debe suponerse que ocupe un área bastante extensa.

Observaciones.—Por su morfológica y caracteres de su carne esta especie se aproxima al *Trametes gibbosa,* mas no puede confundirse con ella por no estar ornada de zonas en su haz, ni tener el borde amarillento, por no tener la porción central prominente en forma de giba, y por su acentuada coloración negruzca; distínguense también mucho por los poros, que aunque alargados lo son proporcionalmente mucho menos y son casi iguales en el *Trametes gibbosa.*

El *Trametes suaveoleus,* el *Tr. odora* y el *populina* tienen también los poros redondeados, son perfectamente blancos en su haz y tienen pubescencia, lo que basta para distinguirlos de esta especie. El *Tr. rubescens* presenta en el haz coloraciones rojizas y leonadas, no grises ni negruzcas, y su carne se colorea al fin y presenta zonas. Se ha descrito por Fries un *Tr. inodora* que puede vivir también sobre los chopos; pero es enteramente blanco, tomentoso, con tubos mucho más cortos y poros redondeados; no es, pues, fácil de confundir con el *Tr. nigrescens.*

En cuanto al *Trametes Pini* y al *hispida,* de carne y poros coloreados, las afinidades son aún menores.

(Continuará.)

XXIII.-Registro de las señales hertzianas a grandes distancias

POR GONZALO BRAÑAS FERNÁNDEZ (*)

EL «CIMACIOGRAFO»

Muchos y muy importantes adelantos ha realizado en estos últimos años la telegrafía hertziana sin conductores, y sus aplicaciones, cada día más numerosas, han permitido resolver no pocos problemas interesantísimos, tanto en el orden de la ciencia pura como en todos los órdenes utilitarios de la vida; pero en la radiotelegrafía existen aún pendientes de solución satisfactoria dos grandes cuestiones que la mantienen en condiciones de inferioridad con relación a la telegrafía ordinaria por conductores. Estas dos cuestiones o problemas, de *vital interés* para el progreso completo de la telegrafía sin hilos, son la *sintonia perfecta* y el *registro de los radiogramas a grandes distancias.*

A buscar una solución práctica de este último problema vengo desde hace tiempo consagrando mis investigaciones, y lo que hasta la fecha he conseguido voy a exponerlo en este trabajo, en el que me propongo dar a conocer un nuevo sistema receptor radiotelegráfico: el *cimaciografo* (**) que para dicho fin he ideado, construído y ensayado.

ANTECEDENTES

Con dos grandes dificultades se tropieza al intentar el registro o inscripción de las señales radiotelegráficas a grandes distancias. Es la primera la extremada debilidad de la

---

(*) Esta Memoria se publica por acuerdo de la Academia.

(**) Nombre propuesto por el profesor Sr. Pérez Barreiro, de «kumation» o «cimacio», pequeña onda, y «grafos», descriptor.

energía captada por la antena receptora, donde las corrientes engendradas por las ondas eléctricas de procedencia lejana son comunmente de orden inferior a la *diezmillonésima de amperio* y en ocasiones no llega su intensidad ni a la centésima parte de este valor. Sólo la exquisita sensibilidad del teléfono y del oído humano ha hecho posible la percepción de señales tan débiles, y su empleo constituye, como es bien sabido, el procedimiento corriente y único hasta el día para la recepción de los radiogramas.

La otra dificultad (más importante aun que la primera) proviene de las perturbaciones eléctricas de la atmósfera, que influyen en la antena receptora, induciendo en ésta corrientes parásitas que en la mayoría de los casos tienen más intensidad que las engendradas por las transmisiones radiotelegráficas. Estas corrientes parásitas originan en los teléfonos ruidos a veces tan intensos y prolongados que la recepción e interpretación al oído de los radiogramas llega a hacerse imposible, y con mayor motivo la de las inscripciones, en las cuales se entrecruzan las señales perturbadoras y las transmitidas, formando un conjunto absolutamente indescifrable.

Para vencer la primera de las dificultades indicadas dos caminos pueden seguirse: el empleo de *relais* o sistemas relevadores extrasensibles o el de aparatos reforzadores o amplificadores, llamados así porque, aun cuando tales aparatos no son fundamentalmente otra cosa que *relais telefónicos*, sus efectos equivalen al de la amplificación de las corrientes de antena.

Examinemos qué cualidades ha de reunir un *relais* o sistema relevador de corrientes para poder ser empleado eficazmente en radiotelegrafía.

Puesto que la intensidad de las corrientes engendradas en la antena receptora oscila normalmente entre *una cienmilésima* y *una cienmillonésima de amperio*, la sensibilidad de un *relais* radiotelegráfico debe tener por límite este último valor.

Necesita poseer, además, una cualidad especial, que pudiéramos llamar elasticidad de funcionamiento, mediante la cual se acomode, sin variación en su arreglo, a cambios de intensidad muy grandes en las corrientes recibidas. Pero esto solo no basta; es preciso, finalmente, que su constante de tiempo sea pequeñísima (inferior a una centésima de segundo) para que pueda aplicarse al registro de transmisiones rápidas, cuya velocidad alcanza y aun supera a la de veinte palabras por minuto.

Ahora bien, los *relais* más sensibles (tipos Siemens, Claude, etc.) construídos hasta el día y empleados en la telegrafía por conductores, no funcionan sino con corriente cuya intensidad no descienda de la *cienmilésima de amperio*, y aun así la seguridad y regularidad de su marcha deja mucho que desear. Tales *relais* no pueden ser, pues, útilmente empleados en radiotelegrafía a distancias mucho mayores de cien kilómetros de una estación transmisora muy potente, como la experiencia lo ha demostrado ya.

Se desprende de esto que la radiotelegrafía necesita para el registro directo de sus señales, a distancias algo considerables, de aparatos y de procedimientos nuevos incomparablemente más sensibles y delicados que los que utiliza la telegrafía ordinaria por conductores. Pero estos aparatos y procedimientos son muy difíciles de encontrar, toda vez que en ellos ha de hermanarse una sensibilidad y delicadeza extraordinarias con una gran rapidez y seguridad de acción, y así se explica que para lograrlo se hayan puesto a contribución todos los recursos del ingenio humano y apelado a los medios más extraordinarios.

Dígalo, si no, el curiosísimo experimento realizado en la Facultad de Medicina de Rennes por el profesor M. Lefeuvre, quien aprovechando la extraordinaria sensibilidad galvanoscópica de las patas de la rana, consiguió con el auxilio de un aparato inscriptor de las contracciones musculares provocadas en el citado animal, por las corrientes recibidas

en la antena, registrar en Rennes, a 350 kilómetros de París, las señales horarias transmitidas radiotelegráficamente desde la torre Eiffel.

Pero se comprende que por tal procedimiento fundado en la utilización de fugaces efectos fisiológicos no llegará a encontrarse la solución práctica del registro de los radiogramas. Debe más bien buscarse ésta en los procedimientos físicos o en los fisicoquímicos, como lo han intentado Turpain y Abraham, entre otros investigadores que han perseguido el mismo fin del registro directo de las señales por el empleo de aparatos relevadores extrasensibles.

He aquí en resumen la disposición adoptada por el primero.

Un galvanómetro sensible a la *centésima de microamperio* constituído por un cuadro móvil de muy pequeñas dimensiones y escaso peso, que se mueve en un campo magnético de 3.000 gaus, cierra al recibir las corrientes del detector un circuito local, y manda de este modo corrientes de una *cienmilésima de amperio* a un *relais* telegráfico Siemens de gran sensibilidad. Este *relais* envía a su vez a un receptor Morse las corrientes necesarias para su funcionamiento.

Con esta combinación de dos *relais* montados en serie o en cascada logró Turpain, en Poitiers, registrar en la cinta del Morse, a 300 kilómetros de París, las señales horarias del Observatorio y los radiogramas meteorológicos transmitidos con manipulación lenta por la estación de la torre Eiffel.

El procedimiento ensayado y preconizado por este experimentador tiene dos graves inconvenientes que le quitan todo valor práctico. Es el primero la considerable magnitud de la constante de tiempo (superior a la décima de segundo) del galvanómetro empleado, que le incapacita para el registro de transmisiones medianamente rápidas de 15 palabras por minuto. El segundo inconveniente consiste en la escasa seguridad en el cierre, mediante dicho galvanómetro, del primer circuito local por contactos cuya presión puede eva-

luarse en una pequeñísima fracción de miligramo. Todo esto hace que el sistema ideado por Turpain diste mucho de ofrecer las garantías de funcionamiento adecuado, regular y seguro que la práctica reclama, aun dentro de los límites de distancias relativamente cortas a que ha sido ensayado y mucho menos a distancias más considerables.

Monsieur Abraham, haciendo uso también del galvanómetro, ha conseguido obviar el inconveniente de la lentitud de movimientos disminuyendo considerablemente las dimensiones, el número de espiras y la masa, por tanto, del cuadro móvil; pero como al mismo tiempo quedaban disminuídas en igual proporción la sensibilidad y la fuerza disponibles para cerrar el circuito de un *relais*, tuvo que apelar al procedimiento fotográfico para obtener el registro de las señales.

Consiguió por este medio el resultado interesantísimo, desde el punto de vista científico, de registrar en Washington las señales horarias del Observatorio de París, lanzadas por la torre Eiffel al través del Atlántico. Mas la aplicación a la radiotelegrafía del procedimiento fotográfico adoptado por Abraham en sus experimentos tampoco puede ser sancionada por la práctica, pues, además de ser delicado y dispendioso, su misma excesiva sensibilidad es causa de que se registren en el papel fotográfico, no sólo las señales radiotelegráficas, sino también toda clase de perturbaciones, aun las de menor intensidad, imposibilitando esto, en la mayoría de los casos, la interpretación de las gráficas obtenidas.

Mejor camino para llegar a una solución verdaderamente práctica es, en mi opinión, el refuerzo o amplificación de las corrientes de la antena receptora, bien por procedimiento directo, mediante detectores amplificadores, bien por procedimiento indirecto, haciendo uso de los aparatos amplificadores a que antes he aludido. Realizando esto hay la enorme ventaja de poder recibir al oído los radiogramas sin necesidad de auriculares, al mismo tiempo que se hace el registro

de las señales en la cinta del Morse y existe, además, la posibilidad de aplicar a los sonidos intensificados un sistema de sintonia acústica que complete los efectos de la sintonia eléctrica.

Muchos son los métodos que en estos últimos años se han indicado y ensayado para obtener la amplificación de las corrientes alternativas débiles, de baja o de alta frecuencia, que tan importante papel desempeñan en la telefonía, en la radiotelegrafía y en la radiotelefonía; pero hasta hoy, de muy pocos ha podido la práctica sacar partido provechoso, a pesar del ruido que el advenimiento de alguno de dichos métodos ha producido en el mundo científico.

El punto de partida de todos ellos es la utilización de las variaciones de energía de las corrientes débiles que se quiere amplificar para la producción de cambios de resistencia o caídas de potencial en un circuito donde circula una corriente continua de valor más elevado, provocando en ésta variaciones de intensidad que reproducen en mayor escala las de aquéllas.

Entre los mencionados métodos merecen citarse los siguientes: el de acción mecánica sobre contactos de presión variable; el de las acciones bolométricas en circuitos apropiados; el de las caídas de potencial provocadas en un arco sensible por la superposición de la corriente objeto de amplificación, y el de las alteraciones producidas en un flujo catódico por el campo electrostático o magnético variable creado por dichas corrientes débiles.

Sólo el primero y el último han conducido a resultados susceptibles de traspasar los límites del laboratorio, y por tanto, me ocuparé únicamente en el examen y la crítica de los aparatos amplificadores en que se ha hecho más acertada aplicación del método de las acciones mecánicas y del de las variaciones del flujo catódico o descargas en gases enrarecidos, examinando en primer término el amplificador de la Compañía alemana Telefunken, que puede conside-

rarse como el tipo más perfecto de todos los fundados en el principio del *telemicrófono*, indicado y ensayado primeramente, con éxito, por Berget para obtener la amplificación de las vibraciones telefónicas.

Consta dicho amplificador de tres *telemicrófonos* montados en serie y de un teléfono de alta voz, en serie también con los primeros, que en lugar del pabellón o bocina de uso corriente, lleva un resonador arreglado a la frecuencia de mil vibraciones por segundo. El primer teléfono de la serie recibe las corrientes del detector y los tres restantes la de una pequeña batería de acumuladores regulada mediante resistencias variables.

Los micrófonos de este aparato sólo se diferencian de los de uso corriente en telefonía en que el anillo de fieltro que en éstos mantiene en su lugar los granos de carbón ha sido substituído por otro de felpa, mucho más blando y ligero, y en que la presión de los granos sobre la placa vibrante se puede aquí graduar con gran afinamiento haciendo girar unos poderosos imanes que actúan a distancia sobre las cápsulas que contienen dichos granos.

Las corrientes, muy amplificadas por tres reproducciones microfónicas sucesivas, que llegan al teléfono de alta voz tienen un valor medio bastante elevado y muy variable, por lo cual no son aptas para hacer funcionar ningún *relais*. Para obviar este inconveniente en el amplificador de la Telefunken pasan dichas corrientes por el primario, de un pequeño transformador, en cuyo secundario se engendran corrientes sólo cuando hay variaciones rápidas en el primario, o sea cuando se reciben señales. Pero estas corrientes inducidas en el secundario son, necesariamente, alternativas e inadecuadas también, por tal motivo, para actuar un *relais* polarizado como el que forma parte del aparato para efectuar el registro de las señales en el Morse y tiene que pasar antes por una válvula eléctrica constituída por un simple detector de pirita que suprime una de las fases de dichas corrientes.

A pesar de lo concienzudamente que ha sido estudiado y construído este aparato, tanto en conjunto como en todos sus detalles, los resultados prácticos obtenidos con él han sido tan poco satisfactorios que la misma Compañía Telefunken abandonó ya su empleo. Los principales defectos o inconvenientes de que adolece son los siguientes:

Este aparato, como todos sus similares, no refuerza mas que las señales de cierta intensidad, mostrándose insensible a las débiles, porque las vibraciones que éstas originan en el primer teléfono son absorbidas por la masa relativamente grande de los granos de carbón que gravitando sobre la placa vibrante dificulta o impide sus movimientos.

Aun en el caso de ser algo fuertes las corrientes dadas por el detector, el aparato no refuerza bien mas que aquellas señales que en los teléfonos (que son de los llamados de cuerdas) originan la nota musical de quinientos períodos para que estos teléfonos han sido construídos.

El arreglo o regulación de los tres telemicrófonos para obtener un funcionamiento no más que mediano, es sumamente laborioso, y los resultados son siempre de muy poca estabilidad.

Finalmente, los órganos destinados al registro de las señales requieren un arreglo todavía más cuidadoso, necesitándose para que el Morse funcione, nada más que medianamente (y esto sólo en el caso de recepciones muy fuertes), que el detector-válvula tenga muy poco uso y que éste y el *relais* estén esmeradamente arreglados y afinados al máximum de sensibilidad, condiciones que evidentemente son incompatibles con la seguridad y regularidad del funcionamiento.

Entre los amplificadores basados en las variaciones del flujo catódico o de las corrientes de descarga en gases muy enrarecidos merecen citarse especialmente los ideados y construídos por los alemanes Lieben y Reisz y por el norteamericano De Forest.

Obtiénese el efecto de amplificación en el aparato de Lieben y Reisz del modo siguiente:

En un tubo de vidrio que no contiene mas que vapores de mercurio muy rarificados se mantiene normalmente, con el concurso de la corriente de una batería de acumuladores de 220 voltios, un flujo catódico a esta tensión relativamente baja, utilizando la propiedad de emitirlo en tales condiciones los óxidos alcalino-térreos fuertemente calentados, para lo que se utiliza la corriente de otra batería de acumuladodores. Sobre este flujo actúan mediante un anodo auxiliar las corrientes que se trata de amplificar provocando sus variaciones de potencial desviaciones en dicho flujo, que se traducen en cambios de intensidad en el régimen normal de la corriente al través del tubo.

El amplificador de De Forest, llamado *audión* por su autor, es algo menos complicado que el anterior (aun cuando necesita también el empleo de dos baterías de acumuladores), pues no se hace uso en él del flujo catódico y sí sólo del efecto Edisson en una pequeña lámpara de incandescencia construída *ad hoc*, en que el filamento de tungsteno hace de catodo y una lámina de níquel de anodo, llevando también un anodo auxiliar constituído por una tela metálica interpuesta entre los dos primeros.

Ambos amplificadores tienen la ventaja de reproducir fielmente, sin deformación alguna, las corrientes débiles primarias, cualquiera que s ,a su frecuencia y su intensidad; pero, a cambio de esto, presentan dificultades grandes de construcción y de manejo, sobre todo el de Lieben y Reisz, que unidas a lo costoso que relativamente resulta su funcionamiento les quita una gran parte del valor práctico que de ótra manera tendrían.

Por otro lado, su poder amplificador es relativamente pequeño. En el aparato de De Forest no pasa de cinco, y, aun cuando su fidelidad en la reproducción de las corrientes permita montar varios de estos aparatos en serie o en cas-

cada para obtener una amplificación mayor, esto supone una complicación y un gasto inaceptables en la práctica. A más de esto, con tres amplificaciones sucesivas, se obtiene sólo un aumento de 120 veces, que es insuficiente para hacer registrables con el Morse las señales de procedencia lejana, cuya intensidad es, como queda dicho, del orden de la *centésima de microamperio* y precisa ser aumentada 10.000 veces para que hagan funcionar en buenas condiciones un *relais* telegráfico ordinario de marcha segura.

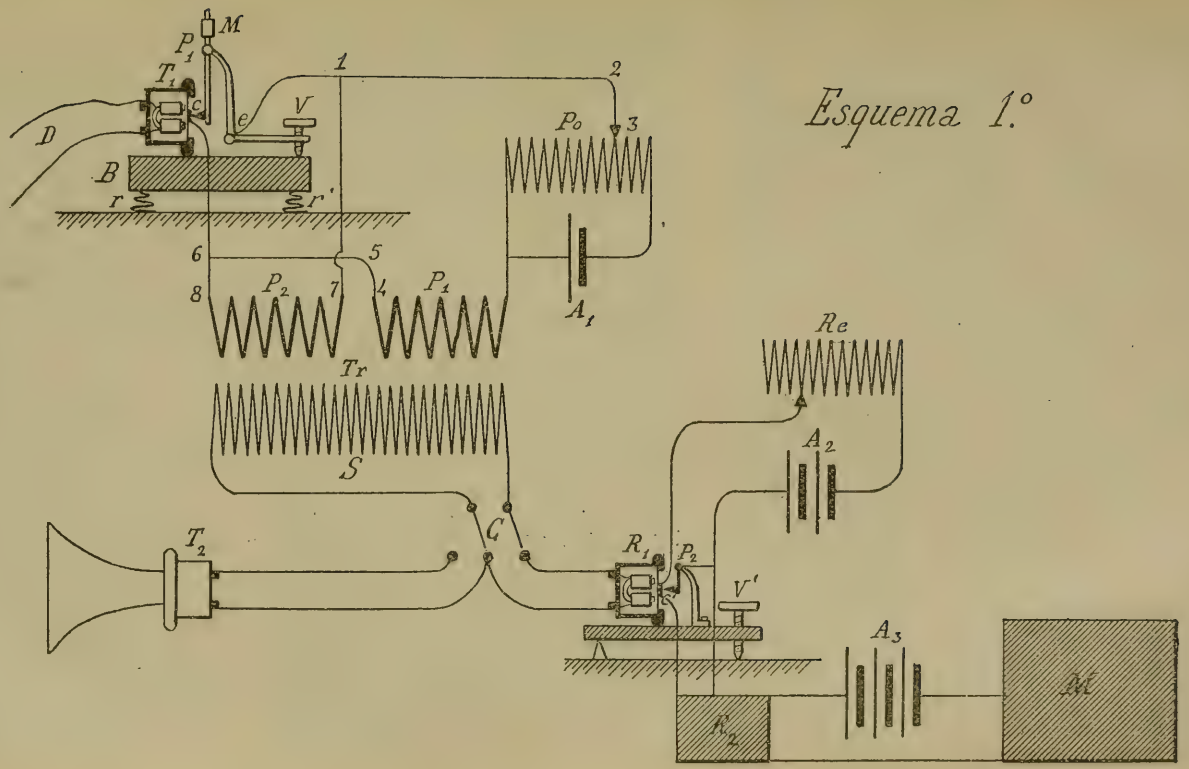
Pensando que un procedimiento mecánico de amplificación exento de los defectos del *telemicrófono*, indicados al hacer la crítica del aparato de la Telefunken podría servir de base para obtener un poderoso amplificador, de fácil construcción, escaso coste, económico entretenimiento y gran seguridad y eficacia para la intensificación sonora de las señales y su registro práctico a largas distancias en la cinta del Morse, mediante el empleo de un *relais* adecuado, encaminé mis investigaciones a este fin, logrando, después de muchos ensayos preliminares, combinar y construír el nuevo receptor radiotelegráfico que voy a describir.

EL «CIMACIOGRAFO»

En su disposición primitiva (esquema 1.°) consta este sistema receptor de dos partes principales, que son: el *amplificador* y los *relais*.

Amplificador.—Se compone, a su vez, de dos partes: el amplificador propiamente dicho y el transformador.

El amplificador está formado esencialmente por un teléfono *T*, de resistencia adecuada a la del detector, el cual teléfono lleva soldada en el centro de la placa vibrante una laminita *c* de platino, y por un péndulo P_1 que puede ser de período variable mediante el corrimiento de una masa *M* situada por encima del eje de suspensión, cuyo péndulo lleva



Esquema 1.°

en su parte inferior una punta de platino iridiado, que se apoya ligeramente sobre la laminita de la placa telefónica, pudiendo graduarse la presión del contacto mediante el tornillo *V* que hace bascular el soporte sobre el eje *e*. De este modo es posible reducir el valor de dicha presión hasta una décima de miligramo o menos aun.

Para evitar el efecto perturbador de las trepidaciones o vibraciones parásitas, el amplificador va colocado sobre una peana o base *B* de gran masa sostenida por resortes *r r'* u otro medio apropiado a dicho fin, pudiendo también encerrarse en una caja que evite la acción de las ondas sonoras transmitidas por el aire.

Transformador.—Es éste un pequeño transformador *Tr* de circuito magnético abierto, con dos primarios P_1 y P_2 y un secundario *S*.

La punta del péndulo y la lámina de platino de la membrana del teléfono cierran, cuando están en contacto, dos circuitos a la vez. Uno de estos circuitos, el *c, e,* 1, 2, 3, 4, 5, 6, *c* contiene un potenciómetro *Po* montado sobre un elemento de acumulador A_1 y uno de los primarios P_1 del transformador *Tr*. El otro circuito *c, e,* 1, 7, 8, *c* contiene solamente el segundo primario P_2 del mencionado transformador, dispuestas las conexiones de manera que la corriente dada por el potenciómetro circule en sentido inverso en estos dos primarios P_1 y P_2, compuestos ambos del mismo número de vueltas y con igual resistencia.

Relais.—Las corrientes inducidas en el secundario del transformador son enviadas mediante un conmutador *c*, bien a un teléfono de alta voz T_2 para la audición a distancia de las señales, o bien a un *relais* especial R_1, muy sensible, basado en los mismos principios que el amplificador antes descrito y constituído por un teléfono que lleva, como el del amplificador, un contacto *c'* en la placa vibrante y un pequeño péndulo P_2 con punta de platino en su parte inferior que se apoya con presión graduable, gracias al torni-

llo V', sobre el contacto de la placa y cierra, igualmente, dos circuitos, uno de los cuales contiene la resistencia Re y una batería eléctrica A_2 y el otro un receptor Morse especial o un *relais* ordinario R_2.

En el caso de no disponerse de un Morse especial bastante sensible, las corrientes dadas por el *relais* R_1 son substituídas, mediante el *relais* R_2, por otras más enérgicas suministradas por la batería A_3, capaces de hacer funcionar un Morse cualquiera M.

Funcionamiento.—Las corrientes procedentes del detector que, como ya se ha visto, pueden ser del orden de la diezmillonésima de amperio, o más débiles aun, llegan por los conductores D al teléfono T_1 cuya placa vibra entonces, ocasionando variaciones de presión en el contacto c de la lámina y de la punta del péndulo, el cual por su inercia relativamente grande y por el valor, considerable también, de su período oscilatorio, no puede seguir a la lámina vibrante en sus rápidos movimientos. De aquí resultan variaciones notables de resistencia en el mencionado contacto y, por consecuencia, variaciones considerables de intensidad en la corriente de valor bastante elevado que normalmente circula en los primarios P_1 y P_2, aumentando en uno de ellos la intensidad al mismo tiempo que disminuye en el otro; pero como los dos circuitos son recorridos en sentidos inversos por la misma corriente, los efectos de inducción producidos en el secundario S por esas variaciones son de igual signo y se suman, por tanto, sus efectos.

Si las vibraciones de la placa del teléfono T son suficientemente enérgicas, puede llegar a suprimirse por completo el contacto en c. Los efectos obtenidos alcanzan entonces su valor máximo y sería de temer en tal caso la destrucción o alteración de las piezas de contacto por las descargas disruptivas de extracorriente; pero la circunstancia de actuar como un *shunt* uno de los primarios P_1 y P_2 que tienen igual resistencia y autoinducción y de circular en ellos la corrien-

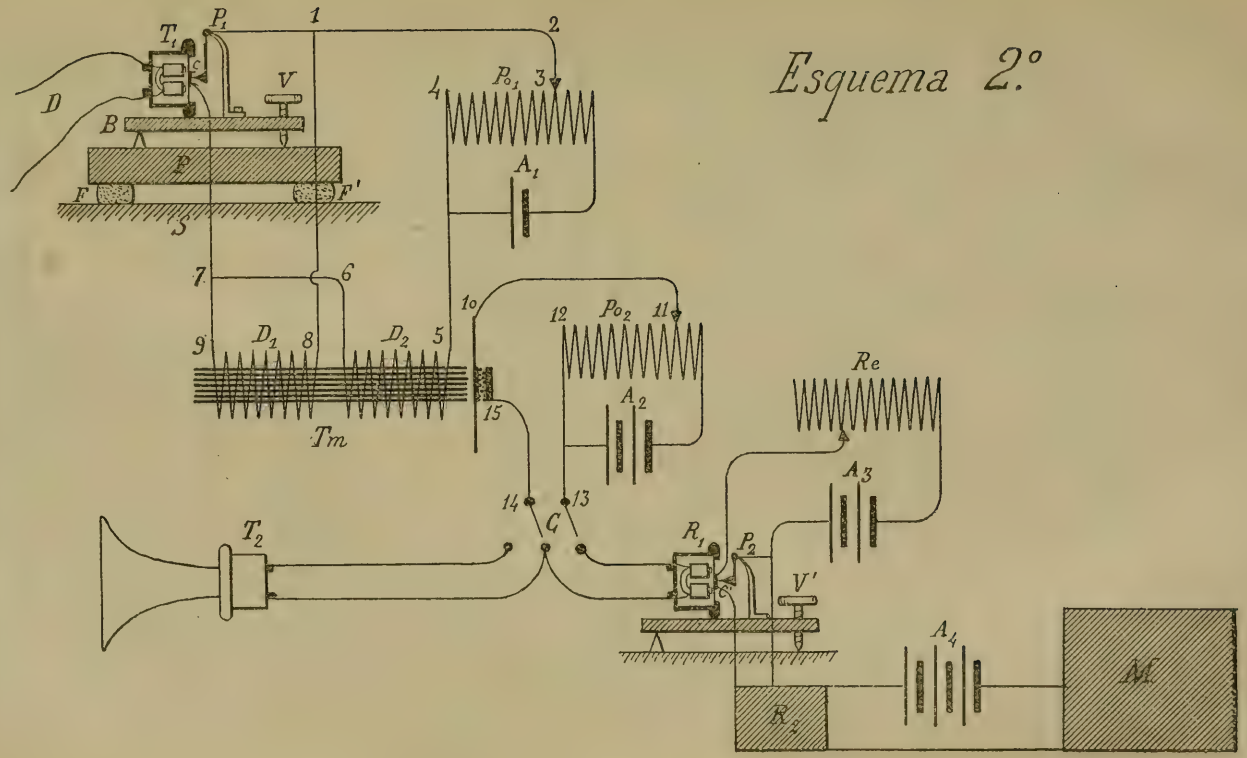
te en sentido inverso, hace que dichas descargas no se produzcan o tengan un valor completamente despreciable. Tiene esto, a mi juicio, grande importancia y creo que basta para explicar la constancia y regularidad del funcionamiento del sistema, así como también su gran poder amplificador equivalente al obtenido con el empleo de tres *telemicrófonos* en serie.

Las corrientes inducidas en el secundario S del transformador son suficientemente enérgicas para que dirigidas al teléfono de alta voz T_2 produzcan sonidos de gran intensidad, siendo perceptibles las señales radiotelegráficas, amplificadas así más de mil veces, a muchos metros de distancia, aun en el caso de recepciones débiles. Las mismas corrientes llevadas mediante el conmutador C al *relais* R_1, originan vibraciones muy enérgicas en la placa telefónica de éste, y las piezas de contacto qne en estado de reposo están unidas con presión suficiente para que la corriente derivada en el circuito del *relais* R_2 tenga un valor despreciable, se separan en cada vibración, pasando entonces a este último circuito corrientes de intensidad bastante para hacer funcionar un Morse sensible, o, en su defecto, al mismo *relais* R_2 que las substituye por otras capaces de mover un Morse M cualquiera.

Modificaciones y *perfeccionamientos* (esquema 2.°).—Con objeto de subsanar algunos pequeños defectos de esta primera disposición dada al sistema, asegurando la regularidad de su funcionamiento y aumentando aún más su poder amplificador y eficacia para el registro de señales lejanas, he introducido en él últimamente algunas modificaciones y perfeccionamientos que considero de interés dar a conocer.

Para evitar el efecto perturbador sobre la membrana telefónica de las ondas sonoras transmitidas por el aire se ha reducido dicha membrana a una estrecha banda.

El péndulo de masa movible y período variable ha sido substituído por dos péndulos más cortos, de menor masa y


Esquema 2.º
T1
P1
1
2
D
V
B
P
F
F'
S
4
Po1
3
A1
7
6
10
12
Po2
11
9
D1
8
D2
5
15
Tm
A2
Re
A3
14
C
13
T2
R1
P2
V'
A4
R2
M

de período fijo, con lo que he logrado aumentar la sensibilidad del sistema y obtener mayor regularidad y seguridad de funcionamiento.

Al contacto de platino de la lámina vibrante se le ha dado la forma de una capsulita que contiene una gota de aceite mineral, cuyo objeto es resguardar los contactos de la acción del polvo manteniéndolos en perfecto estado de limpieza.

El transformador se ha reemplazado por un *telemicrófono* $T\,m$ con dos devanados D_1 y D_2 en sus bobinas, cuyas conexiones con el potenciómetro Po_1 y con los contactos c del amplificador son idénticas a las de los dos primarios P_1 y P_2 (esquema 1.°) del mencionado transformador. Así se consigue el mismo favorable efecto del *shunt* sobre los contactos, evitándose la pérdida de energía por transformación y además se obtiene una nueva amplificación de las corrientes en el circuito 10, 11, 12, 13, 14, 15 que contiene otro potenciómetro Po_2.

El *amplificador* y el *telemicrófono* van colocados en peanas B, P, independientes, con movimiento bascular para su regulación, las cuales descansan sobre trozos de fieltro $F\,F'$ muy grueso, y el conjunto formado por estos dos aparatos y por el teléfono de alta voz va montado sobre una base común de gran masa, sostenida por una suspensión antivibratoria.

Por todo lo expuesto puede fácilmente apreciarse que el *cimaciografo* ofrece en relación con los demás sistemas mecánicos de amplificación y registro cinco novedades sumamente ventajosas.

Es la primera la substitución de los contactos microfónicos múltiples de carbón por uno o dos contactos simples de un metal inalterable como el platino iridiado mucho más sensibles que aquéllos a las variaciones de presión a causa de su mejor conductividad eléctrica.

La segunda es el empleo del soporte pendular y del movimiento de báscula para disminuir y graduar fácilmente en-

tre límites muy amplios la presión de los contactos y la carga sobre la placa vibrante, dejando a ésta toda su libertad de movimientos.

Se refiere la tercera al uso del transformador de *dos primarios* o al del telemicrófono de *dos devanados*, haciendo uno de ellos el papel de *shunt* sobre los contactos, entre los cuales no se producen de este modo chispas de ruptura que los desgasten o alteren.

Constituye la cuarta la adopción del *relais telefónico* especial, cuya original disposición queda indicada, el cual evita el uso de la válvula eléctrica, es extraordinariamente sensible, funciona con regularidad, acomodándose a todos los cambios de intensidad y da corrientes bastante enérgicas para hacer funcionar un Morse sensible o, en su defecto, un *relais* ordinario de marcha segura.

Y consiste, por último, la quinta en la regulación de las corrientes locales por medio de potenciómetros, conservando sensiblemente constante la resistencia de los circuitos, lo que permite afinar extraordinariamente y obtener con prontitud el arreglo de la amplificación, pues he podido comprobar que el valor del potencial influye mucho más eficazmente que el de la intensidad de la corriente en la fidelidad con que las variaciones de resistencia responden a las de presión en los contactos metálicos.

RESULTADOS OBTENIDOS CON EL «CIMACIOGRAFO»

En el Laboratorio de Automática que dirige el Sr. Torres Quevedo, bajo cuyo patrocinio realizo desde hace tiempo mis trabajos de investigación, he podido construir, estudiar y ensayar el nuevo sistema de recepción radiotelegráfica que acabo de describir, con la ayuda también de importantes elementos de trabajo amablemente facilitados por el contiguo Laboratorio de Investigaciones Físicas que dirige el se-

ñor Cabrera, sin contar los del Taller del Instituto del Material Científico, cuya Jefatura técnica me está encomendada, y los resultados obtenidos con el mencionado sistema han sido desde un principio tan alentadores que me decidí a darles inmediata publicidad, describiendo con el nombre de *microrradiógrafo* la primera disposición de mi sistema (*).

Valiéndome de la pequeña antena que para estos estudios míos en el Laboratorio de Automática y otros del de Investigaciones Físicas he instalado en el mismo edificio que ambos ocupan, conseguí registrar correctamente por primera vez en la cinta del Morse las señales horarias del Observatorio de París transmitidas desde la torre Eiffel el día 30 de Abril del año próximo pasado y en fechas posteriores diversos radiogramas de noticias transmitidas por las estaciones radiotelegráficas de París, de Poldhu y de Norddeich a distancias de 1.100, 1.200 y 1.800 kilómetros aproximadamente, cuadruplicando así el alcance conseguido por Turpain en sus experimentos antes mencionados.

Deseando, después de esto, hacer pruebas en mayor escala con el *cimaciografo* instalándolo en una estación dotada de una antena potente, para aquilatar el valor práctico del nuevo sistema, he solicitado y conseguido mediante la eficaz gestión del General Banús, que por Real orden del Ministerio de la Guerra se me autorizase para efectuarlo en la estación radiotelegráfica de La Coruña, situada geográficamente en excelentes condiciones para la recepción de los radiogramas transmitidos por los buques desde alta mar y por las estaciones continentales americanas.

El programa de trabajos que me he propuesto realizar en dicha estación es el siguiente:

(*) *Le microrradiographe*, par G. Brañas. «Comptes rendus.» De la Academia Francesa, 6 de Julio de 1914.—*Registro con el receptor Morse de las señales horarias del Observatorio de París* y *El microrradiógrafo*, por G. Brañas. Sociedad Española de Física y Química, sesiones del 4 de Mayo y del 6 de Julio de 1914.

1.° Recepción al oido con el amplificador, prescindiendo, por tanto, de los auriculares, de los radiogramas procedentes de todas las estaciones terrestres, tanto nacionales como extranjeras, comprendidas en el radío de alcance de la estación y registro automático con el Morse de dichos radiogramas.

2.° Recepción y registro en las mismas condiciones de los transmitidos por los buques desde alta mar en su ruta a América, averiguando a qué distancia máxima puede hacerse esto con el *cimaciografo*.

3.° Estudio de las señales procedentes de las grandes estaciones americanas, Table-Head, Saywille, etc., viendo si es posible obtener por el nuevo sistema receptor su amplificación y registro.

La circunstancia de realizarse obras en la estación mencionada durante todo el tiempo (desde fines de Agosto a principios de Octubre últimos) en que comencé en ella mis trabajos, impidiéndome realizarlos durante el día, y la frecuencia e intensidad inusitada de *atmosféricos* durante la noche, debido al tiempo tormentoso, cuyo período de perturbaciones equinocciales ha tenido este año excepcional duración, ha limitado por desgracia extraordinariamente mi labor (especialmente en lo relativo al registro de las señales) no permitiéndome hasta ahora realizar mas que una parte de mi programa.

Hice, no obstante, algunas observaciones y comprobaciones que creo de interés dar a conocer.

Se refiere una de ellas a la posibilidad de abandonar el uso molesto del casco telefónico mediante el empleo de mi sistema amplificador.

He podido comprobar repetidas veces que es posible recibir en La Coruña, prescindiendo de dicho casco, las transmisiones de la estación militar de Carabanchel, pues con el *cimaciografo* las llamadas y radiogramas de esta estación se percibían con suficiente intensidad en toda la sala de apa-

ratos para que dominasen el ruido de una conversación y pudiese verificarse la recepción al oído desde cualquier punto del local.

De igual manera ha sido factible, de noche, recibir sin el auxilio de los auriculares, los radiogramas de las demás estaciones de la red militar (incluso las de Africa) como igualmente de la red civil y de los buques.

Los procedentes de estaciones extranjeras de gran potencia, como París, Poldhu, Norddeich, etc., se han oído con intensidad tan grande que, no sólo dentro de la sala, sino también fuera del edificio, a más de cincuenta metros de distancia, se ha podido verificar la recepción de los mismos.

En cuanto al registro en la cinta del Morse poco nuevo me ha sido posible hacer, a causa de no disponer entonces de un soporte antivibratorio para evitar los efectos de las trepidaciones producidas por las obras durante el día y a causa también de la gran frecuencia e intensidad de los atmosféricos durante la noche.

Aprovechando algunos intervalos de tranquilidad relativa, pude, sin embargo, apreciar que con mi sistema es posible el registro en condiciones prácticas de todas las estaciones antes mencionadas, incluso de las de nuestras posesiones de Africa, mereciendo señalarse la circunstancia de que algunas de ellas distan de La Coruña cerca de 1.000 kilómetros, y su potencia es tan sólo de dos y medio kilowatios.

Fáltame ahora averiguar, y me propongo hacerlo en circunstancias más favorables, si las señales de las estaciones de América, que algunas noches he oído en La Coruña, y las de los buques situados a más de 1.000 kilómetros de la costa pueden ser también registradas en la cinta del Morse.

Finalmente, en el Congreso científico celebrado en Valladolid a fines de Octubre último por la «Asociación Española para el progreso de las Ciencias», se exhibió mi nuevo receptor radiotelegráfico, y para que los señores congresistas pudieran apreciar sus cualidades y ventajas en la práctica,

viéndole funcionar, se instaló una antena formada por tres alambres de cobre tendidos entre la torre de la catedral y la de la Universidad, mediante la cual realicé públicamente durante todos los días que duró el Congreso numerosas pruebas y experimentos, obteniendo los resultados siguientes:

En la sala, de unos veinte metros de fondo, donde tenía instalados los aparatos se oyeron diariamente en toda la extensión de la misma y con gran intensidad las señales horarias del Observatorio de París transmitidas a las 10 h. (científicas) y a las 10 h. 45 m. (vulgares) e igualmente las correspondientes a las 23 h. 30 m. y 23 h. 45 m., dominando dichas señales los ruidos originados por la entrada y salida de visitantes en las salas contiguas de la exposición.

Del mismo modo y con igual o mayor intensidad se hicieron oir con el *cimaciografo* en toda la mencionada sala y hasta fuera de ella los radiogramas de prensa transmitidos por la estación de la torre Eiffel y por las de Poldhu, Norddeich y Nauen (próxima a Berlín), distante de Valladolid esta última 2.000 kilómetros aproximadamente, pudiendo ser recibidos e interpretados al oído dichos radiogramas a muchos metros de distancia del receptor por varios telegrafistas a la vez, experimentos que realicé, como otros muchos, con el concurso del Jefe y Oficiales del Centro telegráfico de Valladolid, señores Santos, Blanco, Gutiérrez Abril, Arias y otros.

Pudieron también oirse a todas horas con gran intensidad las señales de la estación militar de Carabanchel y recibir sin necesidad de auriculares los radiogramas de la misma, así como también los de las demás estaciones de la red militar y de la civil españolas.

En cuanto al registro de las señales y radiogramas con el Morse he conseguido en Valladolid resultados altamente satisfactorios a pesar de lo tormentoso del tiempo y de la abundancia relativamente grande aun de los atmosféricos.

Se registraron correctamente en la cinta del Morse, sin interrupción alguna, series completas de radiogramas con noticias de prensa transmitidas por las estaciones de París, Poldhu, Norddeich y Nauen, e, igualmente, muchos despachos de servicio oficial o privado procedentes de la militar de Carabanchel y de otras estaciones de la red española, mereciendo notarse la circunstancia de que el registro de alguno de estos despachos se hizo en pésimas condiciones atmosféricas, coincidiendo con máximos de perturbaciones.

De ello he podido deducir que, merced a la facilidad con que todos los órganos del *cimaciografo* responden a la regulación de sensibilidad, es posible, cuando las recepciones son suficientemente intensas, vencer la dificultad de las perturbaciones atmosféricas y obtener inscripciones casi limpias de señales parásitas. Basta, a este objeto, disminuír la inducción de los aparatos de sintonia y rebajar por consecuencia la intensidad de las señales y de los atmosféricos conjuntamente, hasta que estos últimos no se perciban o tengan un valor despreciable, conservándose aún perceptibles las primeras, y aumentar, luego, en compensación, la sensibilidad del amplificador y del *teléfono relais.*

En todos los experimentos y pruebas realizados hasta la fecha con el *cimaciografo* se han hecho notar siempre las cualidades sumamente ventajosas que posee y que le dan una superioridad grande sobre todos los sistemas de amplificación y registro de las señales hertzianas por procedimiento mecánico. Estas cualidades son las siguientes:

La intensidad de sonido obtenida es mucho mayor que la alcanzada en el aparato de la Telefunken con sus tres refuerzos sucesivos y las señales salen en el *cimaciografo* más limpias y mejor timbradas, conservándose bastante bien la característica musical de las transmisiones.

Las recepciones más débiles son susceptibles de ser amplificadas y registradas con el *cimaciografo* si se regulan cuidadosamente los aparatos.

El arreglo, tanto del amplificador como del *relais teléfono*, se hace rápida y fácilmente sin tener mas que actuar sobre dos tornillos y un cursor, y el arreglo obtenido se conserva mucho tiempo sin modificación.

El nuevo *relais teléfono* permite, por su gran sensibilidad y pequeña constante de tiempo, registrar en el Morse las señales de cualquiera intensidad y velocidad de trasmisión (incluso las rapidas de 25 y más palabras por minuto) aun cuando éstas sean muy débiles y poco reforzadas, siendo la seguridad y amplitud de su funcionamiento mucho mayores que la de todos los sistemas relevadores extrasensibles hasta el día ensayados.

APLICACIONES DEL «CIMACIOGRAFO»

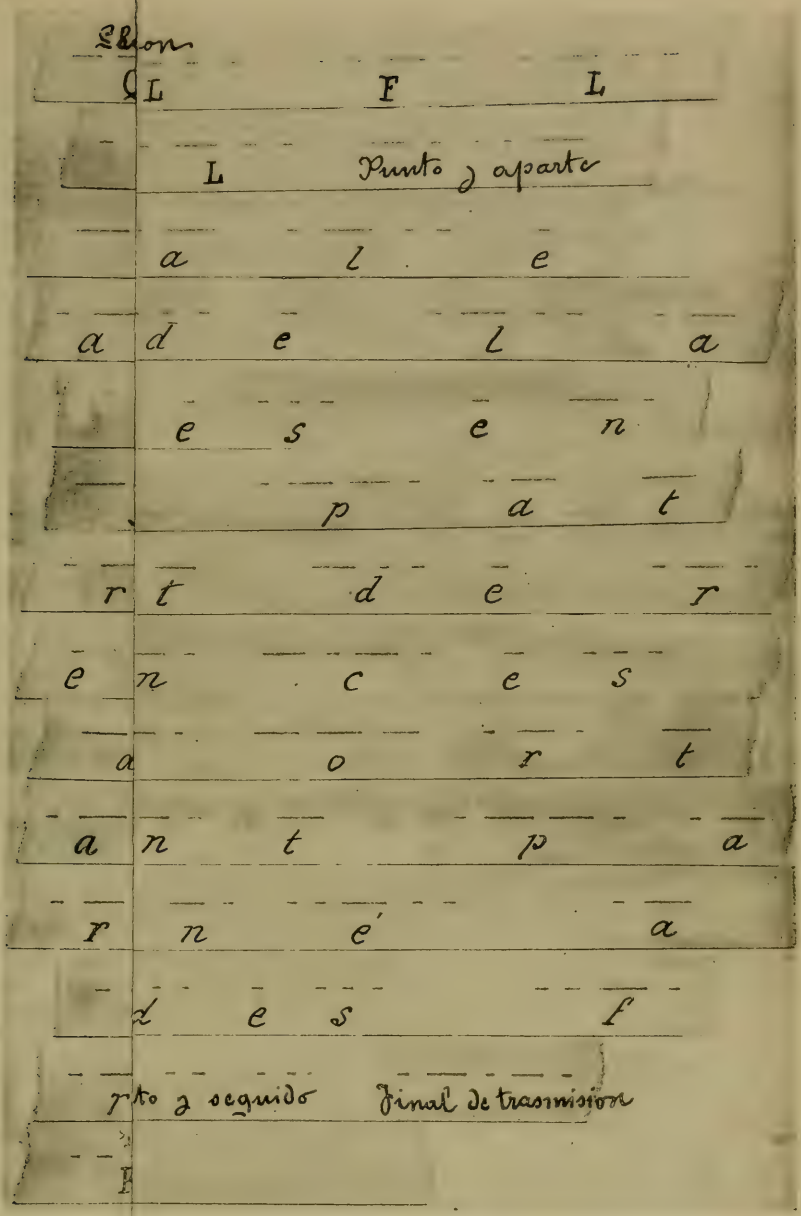
Aparte el empleo que de este nuevo sistema receptor podrá hacerse en la práctica corriente de la radiotelegrafía cuando, como espero, haya logrado darle la forma que dicha adaptación requiere, creo que el *cimaciografo,* ya en su forma actual, es susceptible de algunas aplicaciones útiles y provechosas para la ciencia y también para la enseñanza.

A una inmediata se presta de gran interés y utilidad para los Observatorios, y es el registro y confrontación cronométrica automáticos de las señales horarias del de Paris a distancias que yo creo podrán exceder de 3.000 kilómetros, cuestión propuesta y recomendada por vez primera en la Conferencia internacional de la hora celebrada en Octubre de 1912, y que no ha sido aún resuelta por carecerse hasta ahora de aparatos como el *cimaciografo*, capaces de registrar mecánicamente de un modo seguro y a grandes distancias las señales hertzianas. A conseguirlo dedico actualmente mis trabajos por iniciativa y con el concurso del Sr. Cabrera.

Finalmente, la regularidad de funcionamiento del *cimaciografo* y su gran poder simplificador, que permite intensifi-

car los sonidos de tal modo que las señales de estaciones distantes más de 2.000 kilómetros, pueden oirse desde todos los puntos de un gran salón, al mismo tiempo que se registran en la cinta del Morse, hacen posibles las conferencias de carácter práctico sobre radiotelegrafía ante auditorios numerosísimos, y la enseñanza en las Escuelas de telegrafía sin hilos puede hacerse más amena y fructífera, substituyendo el aparato *zumbador*, hasta ahora generalmente usado para adiestrar a los futuros operadores en la práctica de recepción al oído, por el *cimaciografo* que permite realizar estos ejercicios con señales auténticas transmitidas por estaciones nacionales y extranjeras.

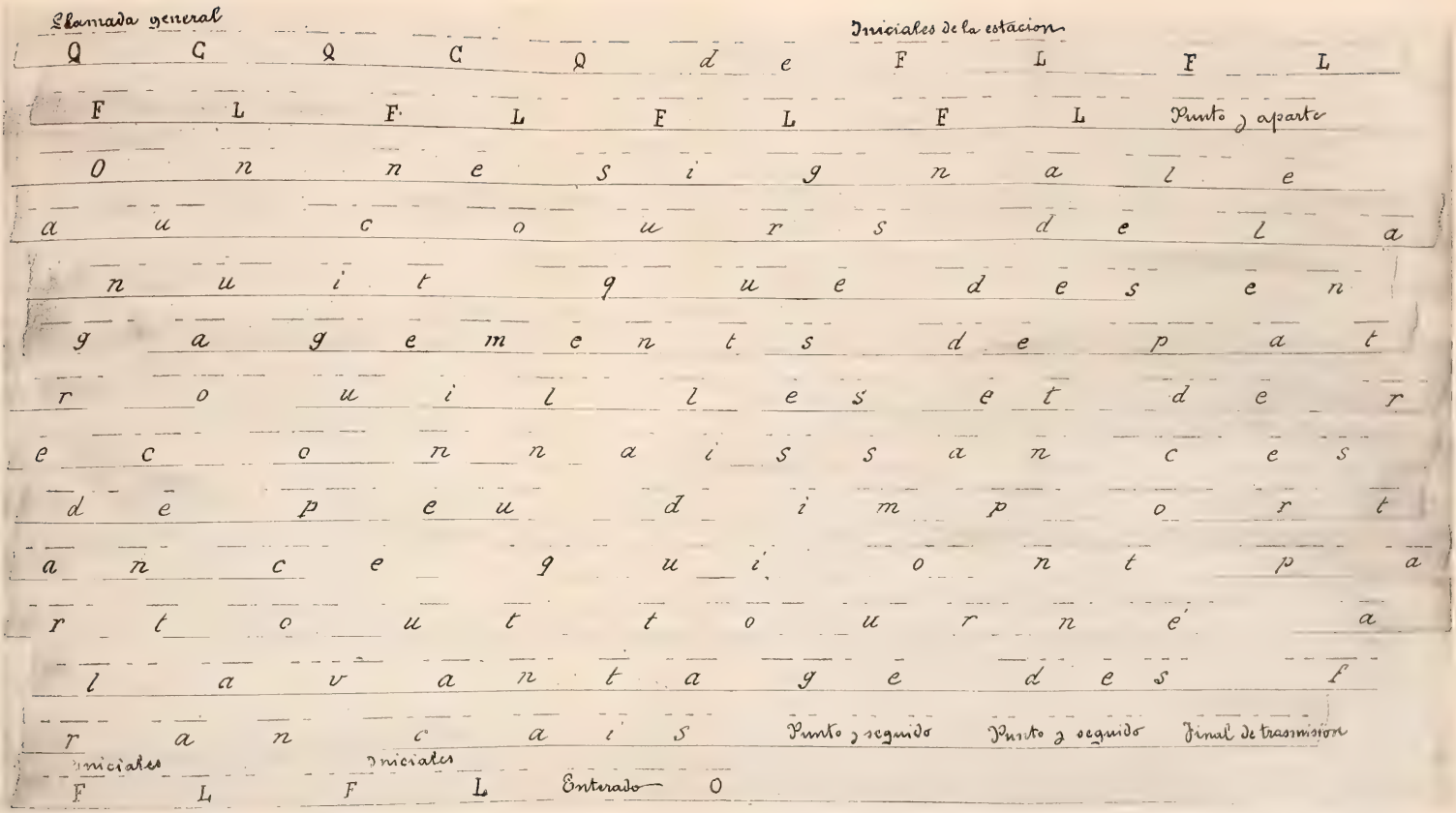
Madrid, 18 de Diciembre de 1915.



Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

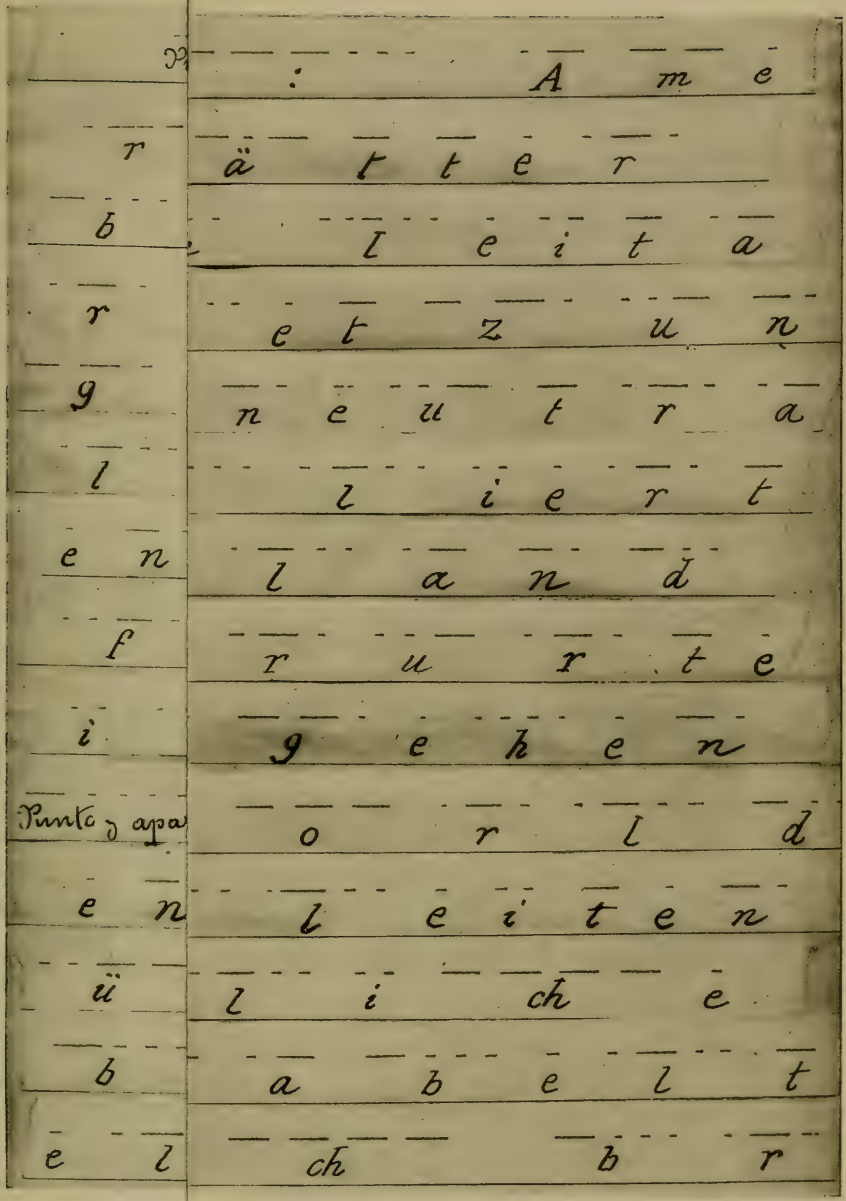
Octubre de 1915,

olid.



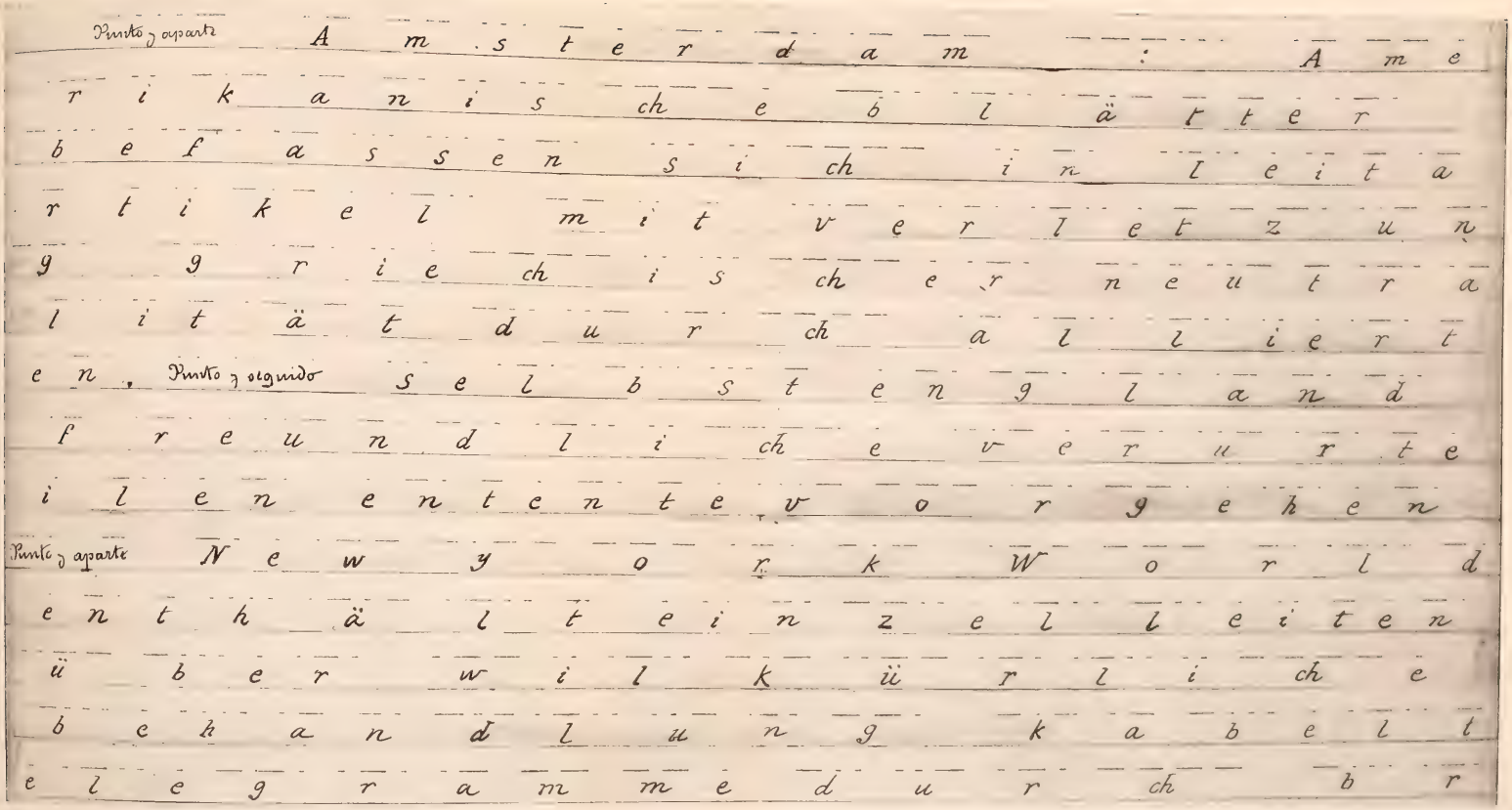
Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

Radiograma de Paris trasmitido por la estación de la torre Eiffel el dia 23 de Octubre de 1915, á las 23 h. 50 m. y registrado con el "CIMACIOGRAFO" en Valladolid.



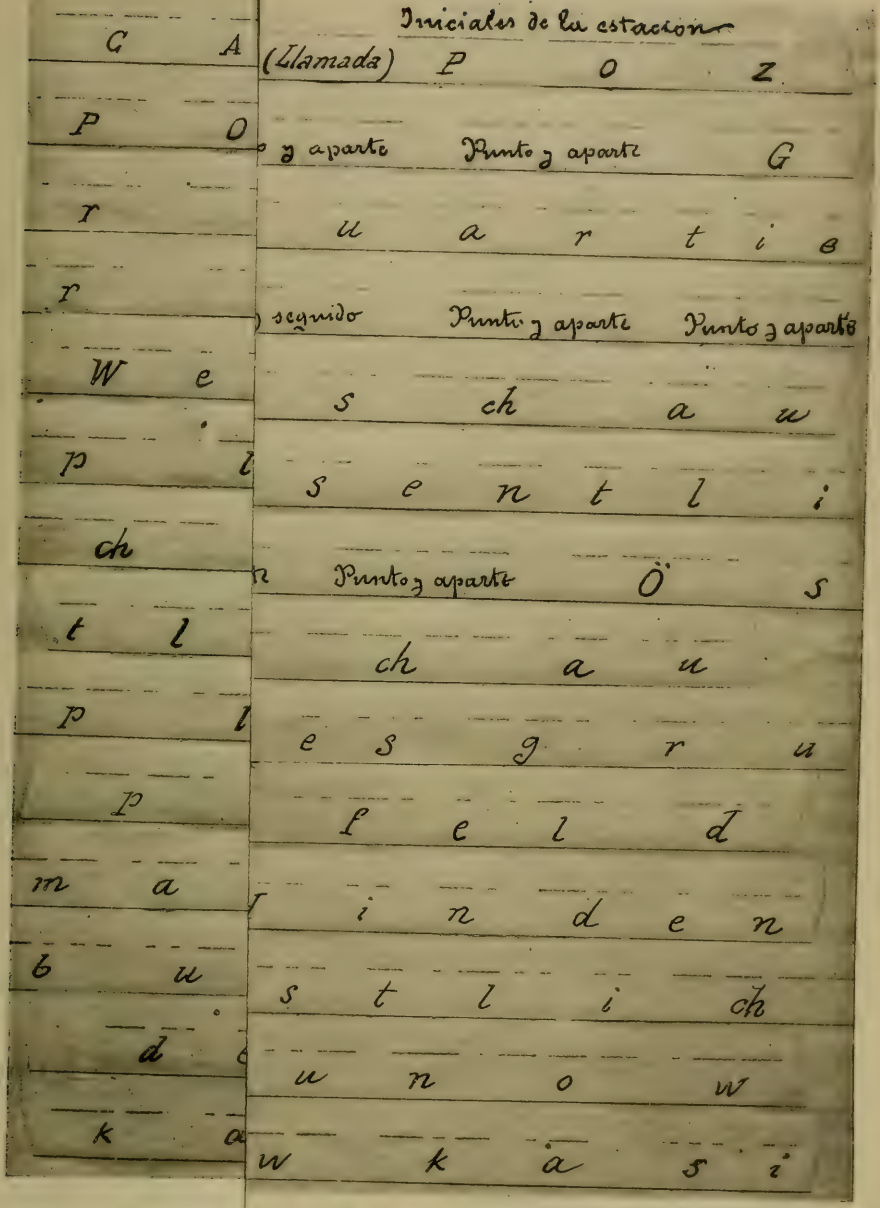
Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

ia 27 de Octubre de 1915,
en Valladolid.



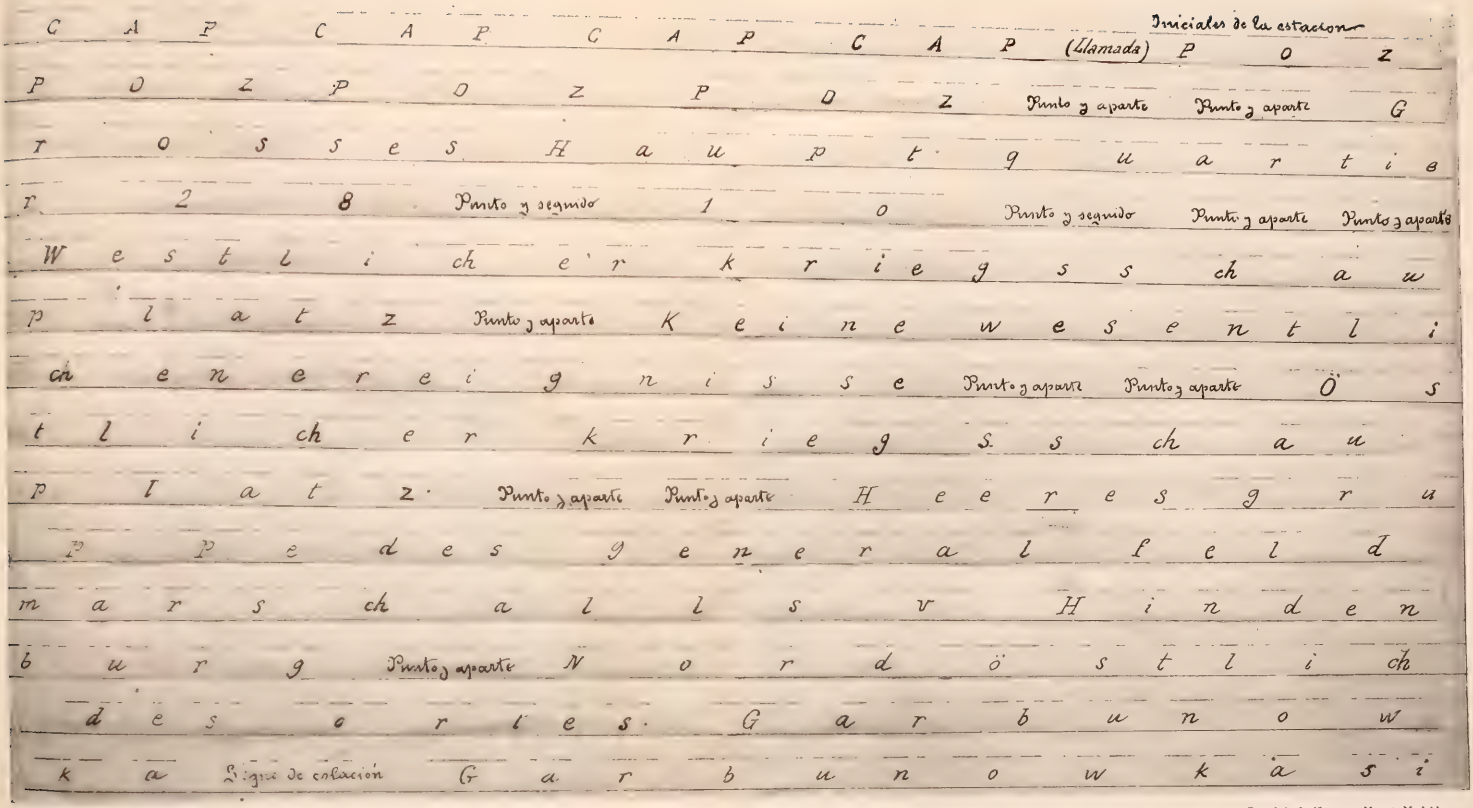
Fotoupia de Hauser y Menet.-Madrid

Radiogramas finales de una serie trasmitida por la estación alemana de Norddeich el dia 27 de Octubre de 1915, á las 22 h. (con muchos atmosféricos) y registrada con el "CIMACIOGRAFO" en Valladolid.



Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

Primer ma á Berlin) el dia 28 de
en Valladolid.



Fototipia de Hauser y Menet.-Madrid

Primera parte de una serie de radiogramas trasmitida por la estación alemana de Nauen (próxima á Berlin) el dia 28 de Octubre de 1915, á las 23 h. (con atmosféricos) y registrada con el "CIMACIOGRAFO" en Valladolid.

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NUMERO

PÁGS.

XXI.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia undécima 469

XXII.—Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia) (continuación), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 488

XXIII.—Registro de las señales hertzianas a grandes distancias, por *Gonzalo Brañas Fernández* 525

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, **1,50 pesetas**.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

FEB 7 1926
National Museum

TOMO XIV.—NÚMERO 9.
MARZO DE 1916

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXIV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia duodécima.

SEÑORES:

Habíamos empezado en la conferencia precedente el 5.° *problema* de la serie, que corresponde al tercer ejemplo que vamos estudiando.

Era este problema el del choque de dos discos, uno del primero y otro del segundo sistema. Y como dicho problema es un poco más complicado, que los que hasta aquí hemos tenido que resolver, creímos oportuno recordar algunos principios de la teoría general del choque de cuerpos elásticos.

Suponiendo que chocaban dos discos, el uno o y el otro O, que por ser de forma circular chocarían precisamente en la línea de los centros, como se ve en la figura 28 de la conferencia precedente, representamos aparte el disco o en la figura 29, que ahora reproducimos en mayor escala para más claridad en la figura 30.

Decíamos que el disco o estaba sujeto a una velocidad de traslación u; es la que tiene el centro de gravedad g, como si toda la masa m del disco estuviera reconcentrada en dicho centro de gravedad. Y debemos calcular la modificación finita que experimenta este movimiento de traslación, cuyo nuevo valor representaremos por u', después del choque.

El disco está sujeto además a un par de dos fuerzas R y $R' = R$, que tenderán a hacerle girar alrededor del centro de gravedad como si estuviera fijo; porque cualquier par aplicado al disco en cualquier sentido sabemos, por la teoría

de los pares o de los momentos, que no altera el movimiento de traslación y que sólo modifica el movimiento de giro, como si el centro de gravedad estuviese inmóvil. Resultando de aquí que por efecto del choque el giro que antes estaba representado por la velocidad ω tendrá un nuevo valor ω'.

Debemos, pues, calcular u' y ω' en función de los datos, que son u y ω, y de la percusión R, que por el pronto suponemos conocida; luego veremos el modo de calcularla.

Empecemos por determinar una ecuación que nos dé el valor de u'.

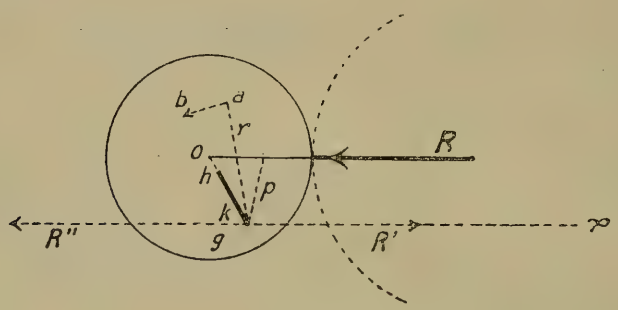


Figura 30

1.° Aplicando un principio análogo al de D'Alambert, diremos que en la línea gx, en que está el centro de gravedad, línea paralela al eje de las x del sistema, y en que actúa la fuerza $R'' = R$, debe haber equilibrio entre las cantidades de movimiento perdidas y la percusión $R'' = R$.

Del par R, R' prescindimos ahora porque no influye en el movimiento de traslación.

Si la cantidad de movimiento antes del choque, del punto g, era mu, y la cantidad de movimiento de este punto, después del choque, es mu', la cantidad de movimiento perdida será

$$mu - mu'.$$

Y entre esta magnitud, que la consideraremos como un

vector, y $R'' = R$, que es la percusión que el centro de gravedad recibe, y que debe llevar el signo — puesto que en la figura su dirección es negativa, será preciso establecer la ecuación de equilibrio, que será la suma de ambos vectores igualada a cero. Es decir,

$$mu - mu' - R = 0.$$

O bien

$$mu' - mu = -R,$$

que también puede escribirse

$$u' - u = -\frac{R}{m}. \qquad (1)$$

Esta ecuación nos da ya el valor de u', velocidad de traslación después del choque, en función de u y de R.

Pasemos ya a la determinación de la nueva velocidad de giro ω'.

2.° Supondremos ahora el centro de gravedad fijo y bajo la acción del par R, R' el disco girará alrededor de g.

Este par R, R', no es un par de fuerzas; es un par de percusiones, porque la R es aquel impulso que estaba representado por una integral; es decir, por la suma en un intervalo infinitamente pequeño de una fuerza muy grande por un incremento infinitamente pequeño de tiempo.

Según el principio que antes citábamos, el giro alrededor de g se traduce por una ecuación de equilibrio; se supone que los momentos perdidos de giro deben dar un momento resultante que equilibre al par R, R'.

Aunque todo esto es elemental, y ya deben conocerlo mis alumnos, no estará demás recordarlo.

Cada punto material a del disco gira alrededor de g describiendo un arco infinitamente pequeño ab, en un tiempo ∂t.

Esto antes del choque, que durante él ya hemos dicho que se supone que todos los puntos quedan inmóviles.

Pero antes del choque, ∂m tendrá una velocidad de rotación ω alrededor de g; luego su cantidad de movimiento, que siempre es la masa por la velocidad, será

$$\partial m \cdot \omega r,$$

llamando r a la distancia ga.

Su momento, es decir, el momento de esta cantidad de movimiento con relación al punto g, será el producto de la cantidad anterior por el brazo de palanca $ga = r$.

De suerte *que el momento de la cantidad de movimiento del punto material* a, *con relación al centro de gravedad* g, *o si se quiere a un eje que pase por* g perpendicularmente al disco y al plano en que los discos se mueven, será

$$\partial m \cdot \omega r^2.$$

Y repitiendo esto para todos los puntos del disco y sumando todos los ejes de estos momentos, que es como se halla el momento resultante, tendremos que el momento de las cantidades de movimiento del disco antes del giro estará representado por la integral

$$\int \partial m \cdot \omega r^2$$

extendiéndose la integral a toda la masa del disco de que se trata. Puesto que ω, que es la velocidad del giro alrededor del eje que pasa por el centro de gravedad, es constante, podrá sacarse fuera de la integral, con lo cual la expresión precedente se convertirá en

$$\omega \int \partial m \cdot r^2.$$

Pero se sabe que esta integral puede ponerse bajo otra forma más sencilla. En efecto, si por el centro de gravedad g y por el centro de figura o hacemos pasar una recta og, sobre ésta podemos tomar una longitud $g\,h = k$, tal que el momento de giro del disco sea igual al momento del punto h si en él se reuniese toda la masa m del disco. Es decir, que podemos establecer la ecuación

$$\int \partial m \cdot r^2 = m\,k^2,$$

lo cual es evidente, por otra parte, pues basta determinar k de modo que quede satisfecha dicha ecuación.

Y con esto el momento de las cantidades de movimiento que corresponden al giro alrededor de g tomará evidentemente la forma

$$\omega\, m\, k^2.$$

Este será el momento de giro antes del choque. Si después de verificarse éste representamos la nueva velocidad de giro por ω', el nuevo momento de giro tendrá la misma forma con sólo sustituir, en vez de ω, la variable ω', en que todavía ω' será una cantidad desconocida.

Tendremos, pues, para el momento de giro posterior al choque

$$\omega'\, m\, k^2.$$

Mas el principio análogo al de D'Alambert, que hemos recordado, establece que debe haber equilibrio entre el momento de giro perdido por el choque y el momento de la percusión. Como los ejes son paralelos, basta sumar sus valores e igualar a cero.

El momento de giro perdido por el choque, o sea el valor numérico del eje que lo representa, será

$$\omega\, m\, k^2 - \omega'\, m\, k^2;$$

es decir, el momento antes del choque menos el momento después.

Por otra parte, el par de percusión R, R', cuyo brazo de palanca es p, o sea la perpendicular bajada desde el centro de gravedad g a la percusión R, tendrá por valor

$$R\,p,$$

con signo positivo, porque, según indica la figura, actúa este par en el sentido positivo de las rotaciones. Y tendremos la

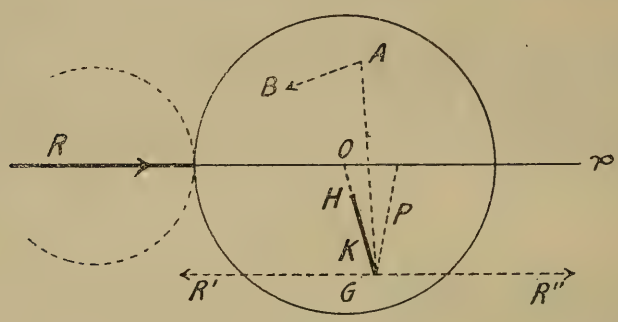


Figura 31

ecuación de equilibrio, o sea la suma de los valores numéricos de los ejes que miden los momentos

$$(\omega - \omega')\, m\, k^2 + R\,p = o,$$

o bien

$$\omega' - \omega = \frac{R\,p}{m\,k^2} \qquad (2)$$

Esta ecuación daría el valor de la rotación ω' después del choque si conociéramos R.

3.° Lo que hemos dicho respecto al disco o del primer sistema podemos repetir respecto al disco O del segundo sistema, según resulta en la figura 31, en que hemos representado este segundo disco.

En rigor, no hay que agregar más que esta observación: En la figura 30, la percusión R actuaba en el sentido negativo del eje de las x; en la figura 31, relativa al disco O del segundo sistema, la percusión R, igual a la anterior, obra en sentido contrario que ella, puesto que el choque desarrolla dos fuerzas iguales y contrarias.

Repitiendo todos los razonamientos precedentes, sin más que tener en cuenta este cambio de signo de R y del par $R\,P$, y sustituyendo siempre a las letras minúsculas las letras mayúsculas, que corresponden á los discos del segundo sistema, tendremos para la ecuación de equilibrio paralelamente al eje de las x del centro de gravedad G

$$U' - U = \frac{R}{M} \tag{3}$$

designando, como ya sabemos, por U' la velocidad paralela al eje de las x del disco O después del choque; por U, la velocidad de este centro de gravedad antes del choque; por M, la masa del disco O del segundo sistema, y por R la percusión que recibe en la línea de los centros.

Por último resultará:

4.° Para la ecuación de equilibrio respecto al giro de este disco O, alrededor de su centro de gravedad,

$$\Omega' - \Omega = -\frac{PR}{MK^2}. \tag{4}$$

En esta ecuación, enteramente análoga a la segunda, Ω' representa la velocidad del giro alrededor de un eje perpendicular al plano del disco O, en su centro de gravedad G, después del choque; Ω la velocidad del giro antes del choque; M la masa del disco O; K la distancia $H\,G$ del centro de gravedad al en que se puede suponer condensada toda la masa M, dando este solo punto H una cantidad igual a la

integral de los momentos de las masas elementales, como antes explicábamos.

Por último, R representa la percusión que recibe el disco O, y vemos que el par $R\ P$ tiende a hacer girar el disco en sentido contrario al que hemos establecido como positivo. Por eso, el segundo miembro de la fórmula (4) tiene signo contrario al de la fórmula (2).

Con las velocidades perpendiculares al eje de las x no hay que contar, porque la componente de la percusión R perpendicularmente a dicho eje es nula. De modo que resultará:

$$v' = v, \ V' = V.$$

Es decir, en los dos discos las componentes, perpendiculares al eje de las x antes del choque, que son v y V, son iguales a las componentes después del choque, que por simetría de las notaciones representaremos por v' y V'.

*
* *

Las cuatro ecuaciones (1) (2) (3) (4) nos determinarían los elementos del movimiento después del choque u', ω', U', Ω', si conociésemos R.

Pero ésta todavía es una cantidad desconocida.

Para resolver el problema por completo, será preciso establecer una ecuación más, o acaso establecer una nueva hipótesis respecto al choque; que en estos problemas complicados de la Física, y el choque es uno de ellos, no siempre se consigue evitar por completo las hipótesis.

El autor inglés que nos sirve de guía en esta conferencia establece, desde luego, la siguiente hipótesis, a saber: que las velocidades relativas son iguales antes y después del choque.

Nosotros no creemos necesario acudir a esta hipótesis, sino a un principio mucho más directo y mucho más general: el de las fuerzas vivas.

Admitiremos, pues, que cuando dos cuerpos ó dos sistemas chocan, la suma de las fuerzas vivas antes del choque es igual á la suma de las fuerzas vivas después de él.

Esto supone que los cuerpos son perfectamente elásticos.

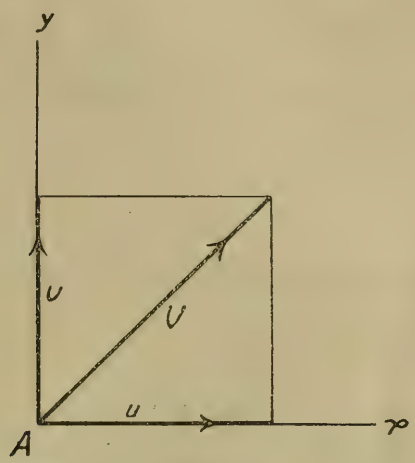


Figura 32

Claro es que si no lo fueran, una parte de la fuerza viva se emplearía en las deformaciones, y aun en el caso de una perfecta elasticidad habría que tener en cuenta la transformación de una parte de la fuerza viva en calórico.

Pero nosotros prescindimos de todas estas circunstancias y suponemos que no hay pérdida de fuerza viva.

Admitiendo esto, la quinta ecuación que nos falta será la que exprese, como antes indicábamos, que la suma de las fuerzas vivas de cada dos discos que chocan permanece constante.

Calculemos, pues, la fuerza viva de cada uno de ellos antes del choque.

***

Recordemos algunos principios de mecánica, aunque es seguro que mis alumnos los conocen de antemano.

Sea un punto A de masa m (fig. 32) y representemos por U su velocidad.

Su fuerza viva, por definición, será

$$m U^2.$$

Pero si descomponemos la velocidad U en la dirección de dos ejes rectangulares Ax, Ay, y representamos por u y v las componentes, tendremos, en cualquiera de los triángulos rectángulos de la figura

$$U^2 = u^2 + v^2.$$

Y sustituyendo en la expresión de la fuerza viva

$$m U^2 = m (u^2 + v^2) = m u^2 + m v^2 .$$

Pero $m u^2$ es la fuerza viva de la masa m, que corresponde a la componente u; y $m v^2$ es asimismo la fuerza viva de la misma masa m, correspondiente a dicha velocidad v.

Luego la fuerza viva de la masa m es igual a la suma de las fuerzas vivas de la misma masa m respecto a los dos ejes coordenados *rectangulares*.

Pero entiéndase que esta especie de descomposición de fuerzas vivas, según dos ejes, supone que éstos son rectangulares; si no lo fueran, el teorema caería en defecto.

No se descomponen, por decirlo así, fuerzas vivas como fuerzas.

Después de recordar este principio, calculemos la fuerza viva de uno de los discos; por ejemplo, o, en su movimiento de traslación y de giro. Sea o (fig. 33) el disco de que se trata. Este disco está animado de una velocidad de traslación cuyas componentes paralelas a los ejes x e y hemos representado por u y v.

El centro de gravedad está representado en el punto g.

Consideremos un punto cualquiera a de dicho disco. Descompongamos la velocidad o las varias velocidades del punto a, según dos ejes x', y' rectangulares, paralelos a los x e y, y apliquemos el principio antes sentado.

Sea un punto cualquiera del disco, a, cuya masa representaremos por ∂m y su distancia $a\,g$ la designaremos por f.

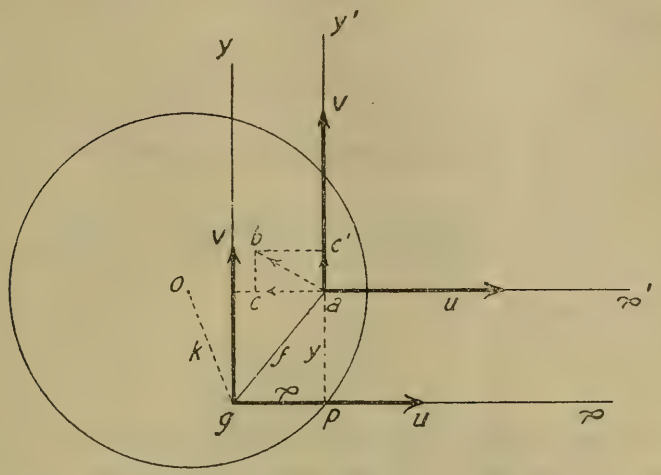


Figura 33

Este punto a está sujeto a tres velocidades.

La velocidad u, paralela al eje de las x.

La velocidad v, paralela al eje de las y.

Que son las mismas, porque son las del movimiento de traslación, que las u, v del centro de gravedad g.

Ambas velocidades u, v ya actúan según los dos ejes trirrectangulares x', y'.

Pero el punto a está sujeto a una tercera velocidad, que es la velocidad $a\,b$, que corresponde al giro del disco alrededor del punto g.

La velocidad $a\,b$, que representando por ω la velocidad de rotación será evidentemente igual a ωf, actuará perpen-

dicularmennte a $g\,a$, y si la representamos por $a\,b$, deberemos determinar sus componentes $a\,c$, $a\,c'$, según los ejes x', y', porque sólo a componentes rectangulares podemos aplicar el principio anterior.

Y tendremos evidentemente en la figura:

$$a\,c = a\,b \cos b\,a\,c = \omega f \cos g\,a\,p = \omega f \frac{y}{f}$$

luego

$$a\,c = \omega\,y\,.$$

Análogamente tendremos para la componente $a\,c$

$$ac' = ab \cos bac' = \omega f \cos agp = \omega f \frac{x}{f}$$

y, por tanto,

$$ac' = \omega\,x.$$

De aquí resulta, atendiendo a que el sentido de ac es el de las x' negativas, que las velocidades del punto a paralelamente $a\ x'$ e y' serán las del movimiento de traslación sumadas algebraicamente con las componentes de la rotación del punto a.

Es decir,

componente de la velocidad de a paralela a x . . . . . $u - \omega\,y$;
componente de la velocidad de a paralela a y . . . . . $v + \omega\,x$.

Luego la fuerza viva del punto a de masa $\partial\,m$, según el principio antes citado, tendrá esta forma:

fuerza viva de a . . . . . $dm\,(u - \omega y)^2 + dm\,(v + \omega x)^2$.

Como lo que hemos dicho para el punto a lo podemos decir para todos los puntos del disco, no hay más que integrar

la expresión precedente en toda la extensión de dicho disco. Y resultará:

$$\text{fuerza viva del disco} = \int \Big[\partial m\,(u - \omega y)^2 + \\ + \partial m\,(v + \omega x)^2 \Big]$$

o desarrollando

$$= \int \Big[\partial m \cdot u^2 + \partial m \cdot \omega^2 y^2 - 2\partial m u \omega y + \partial m v^2 + \\ + \partial m \omega^2 x^2 + 2\partial m v \omega x \Big]$$

Y descomponiendo en diversas integrales

$$= \int \partial m\,(u^2 + v^2) + \int \partial m \cdot \omega^2 (x^2 + y^2) - \\ - 2u\omega \int \partial m y + 2v\omega \int \partial m x.$$

Pero x, y coordenadas de un punto cualquiera a se refieren al centro de gravedad g, y por la propiedad de dicho centro de gravedad las integrales

$$\int \partial m \cdot x, \qquad \int \partial m \cdot y$$

serán nulas, puesto que equivale cada una de ellas al valor de la coordenada del centro de gravedad por la masa, producto que será igual a cero por coincidir este centro g con el origen.

Y tendremos, sacando las constantes fuera de las integrales:

$$\text{fuerza viva del disco} = (u^2 + v^2)\int \partial m + \omega^2 \int \partial m\,(x^2 +$$

$$+ y^2) = (u^2 + v^2)\int \partial m + \omega^2 \int \partial m f^2.$$

Pero

$$\int \partial m = m \text{ y } \int \partial m f^2 = m k^2$$

luego:

$$\text{fuerza viva del disco } o = m u^2 + m v^2 + m \omega^2 k^2. \quad \text{(a)}$$

Esta es la expresión de la fuerza viva del disco o antes del choque.

La del disco O se obtendrá de la misma manera, y no hay más que sustituir a las letras minúsculas letras mayúsculas.

Tendremos, por tanto,

$$\text{fuerza viva del disco } O = M U^2 + M V^2 + M K^2 \Omega^2. \quad \text{(A)}$$

Y la fuerza viva de los dos discos o y O antes del choque será la suma de las dos últimas expresiones que hemos obtenido (a) y (A), es decir:

$$m u^2 + m v^2 + m \omega^2 k^2 + M U^2 + M V^2 + M K^2 \Omega^2.$$

Después del choque, la fuerza viva de ambos discos se expresará análogamente con sólo acentuar las velocidades, según la notación establecida.

Así la fuerza viva del conjunto de ambos discos después del choque será:

$$m u'^2 + m v'^2 + m \omega'^2 k^2 + M U'^2 + M V'^2 + M K^2 \Omega'^2$$

y como el principio, o si se quiere, la hipótesis que hemos

establecido es la de la conservación de la fuerza viva del sistema de los dos discos, igualaremos las dos expresiones anteriores.

Y resultará:

$$mu^2 + mv^2 + m\omega^2 k^2 + MU^2 + MV^2 + MK^2\Omega^2 =$$
$$= mu'^2 + mv'^2 + m\omega'^2 k^2 + MU'^2 + MV'^2 + MK'^2\Omega'^2.$$

Esta ecuación expresa la conservación de la fuerza viva en cada choque parcial.

Pero hemos dicho que las componentes paralelas al eje de las y se conservan; es decir, que se tiene

$$v = v', \; V = V'$$

luego podremos suprimir en ambos miembros los términos iguales

$$mv^2 = mv'^2, \; MV^2 = MV'^2$$

y la ecuación, simplificada, queda reducida a la siguiente:

$$mu^2 + m\omega^2 k^2 + MU^2 + MK^2\Omega^2 =$$
$$= mu'^2 + m\omega'^2 k^2 + MU'^2 + MK^2\Omega'^2,$$

que también puede escribirse pasando todos los términos del segundo miembro al primero

$$m(u^2 - u'^2) + mk^2(\omega^2 - \omega'^2) + M(U^2 - U'^2) +$$
$$+ MK^2(\Omega^2 - \Omega'^2) = 0.$$

Y descomponiendo los términos en dos factores

$$m(u + u')(u - u') + mk^2(\omega + \omega')(\omega - \omega') +$$
$$+ M(U + U')(U - U') + MK^2(\Omega + \Omega')(\Omega - \Omega') = 0.$$

Mediante las ecuaciones (1) (2) (3) (4) podemos eliminar

$$u - u', \omega - \omega', U - U', \Omega - \Omega',$$

y resultará

$$m(u + u')\frac{R}{m} - mk^2(\omega + \omega')\frac{pR}{mk^2} -$$

$$-M(U + U')\frac{R}{M} + MK^2(\Omega + \Omega')\frac{PR}{MK^2} = 0;$$

y simplificando

$$u + u' - p(\omega + \omega') - (U + U') + (\Omega + \Omega')P = 0.$$

Esta es la ecuación que establece directamente mister Watson, y que expresa que las velocidades relativas, antes y después del choque, son iguales, pero en sentido contrario, como se comprueba directamente, según las fórmulas que hemos establecido para las velocidades á lo largo de la línea de los centros.

***

Tenemos, pues, para resolver el problema, las cuatro ecuaciones (1) (2) (3) (4) que reproducimos y la que acabamos de obtener:

$$u' - u = -\frac{R}{m}, \omega' - \omega = \frac{pR}{mk^2}$$

$$U' - U = \frac{R}{M}, \Omega' - \Omega = -\frac{PR}{MK^2}$$

$$u' + u - (U' + U) - p(\omega' + \omega) + P(\Omega' + \Omega) = 0.$$

Estas cinco ecuaciones, que son idénticas á las del autor

inglés y con las mismas notaciones, porque creemos que están bien elegidas, sirven sin dificultad de ningún género para resolver el problema.

Los datos son: las velocidades antes del choque

$$u,\ \omega,\ U,\ \Omega,$$

y las incógnitas son: las velocidades después del choque y además la percusión R.

$$u',\ \omega',\ U',\ \Omega',\ \mathrm{R}$$

son cinco incógnitas; pero tenemos cinco ecuaciones de las más elementales, pues son de primer grado.

Primero obtendremos R sustituyendo en la última ecuación los valores de u', ω', U', Ω'.

Y hallaremos:

$$u - \frac{R}{m} + u - \left(U + \frac{R}{M} + U\right) - p\left(\omega + \frac{pR}{mk^2} + \omega\right) +$$
$$+ P\left(\Omega - \frac{PR}{MK^2} + \Omega\right) = 0;$$

o bien

$$2(u - U) - 2(p\omega - P\Omega) = R\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{p^2}{mk^2} + \frac{P^2}{MK^2}\right)$$

Y, por fin,

$$R = \frac{2(u - U - p\omega + P\Omega)}{\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{p^2}{mk^2} + \frac{P^2}{MK^2}} \qquad (5)$$

O representando el denominador que ha de observarse, que es eminentemente positivo, por $2\,D$, de modo que

$$\frac{1}{m} + \frac{1}{M} + \frac{p^2}{mk^2} + \frac{P^2}{MK^2} = 2\,D,$$

tendremos

$$R = \frac{u - U - p\omega + P\Omega}{D}$$

Sustituyendo este valor en las cuatro primeras ecuaciones se halla inmediatamente:

$$\begin{aligned} u' &= u - \frac{1}{mD}(u - U - p\omega + P\Omega) \\ \omega' &= \omega + \frac{p}{mk^2D}(u - U - p\omega + P\Omega) \\ U' &= U + \frac{1}{MD}(u - U - p\omega + P\Omega) \\ \Omega' &= \Omega - \frac{P}{MK^2D}(u - U - p\omega + P\Omega) \end{aligned} \qquad (6)$$

El problema del choque queda, pues, resuelto.

Pasemos al problema siguiente en la serie propia de este ejemplo.

6.° Este problema es siempre el mismo: Establecer la igualdad entre el número de pares eficaces antes del choque y el número de pares transformados después de verificarse el choque, o mejor dicho en forma sintética: el número de choques de las letras *sin acento* y el número de choques de las letras con acento y signo cambiado.

Podíamos referirnos a los ejemplos anteriores y establecer desde luego la igualdad.

Pero esta es la parte más delicada de la teoría que vamos exponiendo, y no ha de extrañarse que insistamos en ella, quizá por última vez, procurando aclarar lo que en la demostración pueda haber de vago y de poco preciso, que a decir la verdad no nos satisface por completo, por lo menos en cuanto a la claridad se refiere, la demostración del autor inglés que nos va guiando en nuestra tarea.

Esforcémonos en precisar los conceptos.

Hemos establecido la fórmula siguiente para el número N_p de pares eficaces de discos comprendidos en los límites i, L y Δ.

Y decíamos

$$N_p = C\chi(u, v, \omega)\chi_1(U, V, \Omega)\partial u \partial v \partial \omega \partial U \partial V \partial \Omega \partial y (u_1 - u'_1)\partial t$$

en que provisionalmente representábamos por $u_1 - u'_1$ las velocidades de los dos discos en la línea de los centros.

Y vimos después que esta diferencia $u_1 - u'_1$ que era la velocidad relativa de ambos discos, estaba representada en nuestro caso por

$$u_1 - u'_1 = u - U - p\omega + P\Omega.$$

De suerte que el número de pares eficaces para el choque venía dado de este modo:

$$N_p = C\chi(u, v, \omega)\chi_1(U, V, \Omega)\partial u \partial v \partial \omega \partial U \partial V \partial \Omega \partial y$$
$$(u - U - p\omega + P\Omega)\partial t. \qquad (N_p)$$

Dicha fórmula expresa, pues, el número de pares eficaces para el choque y compuestos de un disco del primer sistema y otro disco del segundo.

Para el primer sistema, los discos que entran en los pares tienen sus velocidades de traslación y de giro comprendidas en los siguientes límites, que representamos abreviadamente por l en la siguiente ecuación simbólica:

$$l = \begin{vmatrix} u \ldots\ldots u + \partial u \\ v \ldots\ldots v + \partial v \\ \omega \ldots\ldots \omega + \partial \omega. \end{vmatrix}$$

Los discos del segundo sistema tienen, para sus velocidades, límites marcados por el siguiente simbolismo:

$$L = \begin{vmatrix} U \ldots\ldots U + \partial U \\ V \ldots\ldots V + \partial V \\ \Omega \ldots\ldots \Omega + \partial \Omega. \end{vmatrix}$$

Por último, la distancia de los centros, de cada dos discos, que constituyen un par, están comprendidos en rectángulos cuyas dos dimensiones se expresan en el siguiente cuadro simbólico:

$$\Delta = \begin{vmatrix} y \ldots\ldots y + \partial y \\ o \ldots\ldots (u - U - p\omega + P\Omega)\, \partial t. \end{vmatrix}$$

Podemos decir abreviadamente que los pares están comprendidos en los límites (l), (L), (Δ).

Tal es la significación de la fórmula N_p.

Todos los pares comprendidos en estos rectángulos chocan en el espacio de tiempo ∂t.

Y si no chocasen todos chocarían una parte, que sería una fracción numérica, fracción que suponemos comprendida en la constante C.

Por virtud de estos choques, las velocidades de los discos de cada par se convierten, según las notaciones admitidas, en las siguientes:

$$u', v', \omega', U', V', \Omega'.$$

v' y V' son las mismas que antes del choque, de suerte que la línea anterior de valores de velocidades puede sustituirse por ésta:

$$u', v, \omega', U', V, \Omega'.$$

Los valores de u' y de U', ω', Ω' están determinados por la fórmula (6).

A cada par eficaz de los comprendidos en el número (N_p) corresponderá evidentemente un número igual de pares, cuyas velocidades serán, como acabamos de indicar,

$$u', U', \omega', \Omega'.$$

Y podemos afirmar que los discos del primer sistema tendrán, después del choque, velocidades comprendidas en los límites

$$l' = \left| \begin{array}{l} u' \ldots\ldots u' + \partial u' \\ v \ldots\ldots v + \partial v \\ \omega' \ldots\ldots \omega' + \partial \omega'. \end{array} \right|$$

Los discos del segundo sistema tendrán por límites, para sus velocidades,

$$L' = \left| \begin{array}{l} U' \ldots\ldots U' + \partial U' \\ V \ldots\ldots V + \partial V \\ \Omega' \ldots\ldots \Omega' + \partial \Omega'. \end{array} \right|$$

Y vemos en ambos cuadros que los límites para v han quedado los mismos que en los cuadros primitivos.

Por último, sus centros estarán comprendidos en rectángulos, que tendrán por dimensiones

$$\Delta' = \left| \begin{array}{l} y \ldots\ldots y + \partial y \\ o \ldots\ldots (U' - u - P\Omega' + p\omega')\,\partial t. \end{array} \right|$$

y estas dimensiones son las mismas que las de los rectángulos antes del choque.

Porque la v ha quedado invariable, y como las velocida-

des relativas son iguales y de signos contrarios, hemos visto que se tiene

$$u - U - p\omega + P\Omega = U' - u' - P\Omega' + p\omega'.$$

Agregando a esto, que suponemos que ∂t es la misma, resulta que el rectángulo representado por Δ' tiene las mismas dimensiones que el rectángulo representado por Δ.

A decir verdad, el rectángulo en que están comprendidos después del choque podrá ser cualquiera; pero nosotros suponemos que el intervalo de tiempo ∂t es el mismo en ambos rectángulos.

Comprendido lo que precede, sigamos la demostración y formemos la siguiente expresión:

$$(N'_p) \qquad N'_p = C_1 \chi(u', v', \omega') \chi_1 (U', V', \Omega')$$
$$\partial u' \partial v' \partial \omega' \partial U' \partial V' \partial \Omega' \partial y (U' - u' + P\Omega' - p\omega') \partial t.$$

Consideremos esta expresión en sí, prescindiendo de todos los precedentes, y es claro que representará el número de pares de discos de ambos sistemas, cuyas velocidades y centros satisfacen a los límites l', L', $\Delta' = \Delta$ en que de propósito hemos puesto otra constante C_1 y el mismo rectángulo.

Permítasenos insistir sobre este punto.

El número de pares antes del choque comprendidos en los límites l, L y Δ, demostramos que era igual a la expresión N_p, pero con una cierta constante C_1.

Para tener en cuenta todos los accidentes del choque y para no prejuzgar si todos los pares de discos eran eficaces, modificamos la constante C_1 y escribimos en la fórmula (N_p) otra constante C.

Asimismo la fórmula (N'_p) expresa todos los pares de discos que corresponden a los límites l', L', $\Delta' = \Delta$.

Pero hemos puesto la misma constante C_1 que hubiéra-

mos aplicado a los pares anteriores al choque correspondiente a los límites (l) (L) (Δ), porque en la demostración que dimos de esta fórmula y admitiendo una regularidad estadística, y empleamos el adjetivo de siempre, en los sistemas pusimos en evidencia que C_1 era, en efecto, una constante.

Y explicado esto continuemos nuestra demostración.

Si, como hace Watson, cambiamos el signo a todas las velocidades de los discos en este último conjunto de pares, se verificarán una serie de choques.

Si todos chocasen deberíamos conservar la constante C_1.

En la contingencia de que no haya tantos choques como pares, el número de pares útiles se obtendrá modificando dicha constante C_1 y admitiendo siempre la uniformidad en estos diferentes casos, a la constante C_1 deberemos sustituir la misma constante C que entra en la fórmula (N_p).

De suerte que el número de pares eficaces será:

$$(N'_p) \qquad (N'_p) = C\chi(u', v'\,\omega')\,\chi_1(U', V', \Omega')$$
$$\partial u'\,\partial v'\,\partial\omega'\,\partial U'\,\partial V'\,\partial\Omega'\,\partial y\,(U' - u' + P\Omega' - p\omega')\,\partial t.$$

Mas en este choque hipotético que resulta de haber cambiado los signos a u', ω', U', Ω', choques que serán tantos como marca la fórmula (N'_p) desharemos, si vale la palabra, lo que antes hicimos y vendremos a parar al sistema de pares de velocidades u, ω, U, Ω, comprendidos en los límites l, L, Δ.

Esto es evidente. Si por ejemplo un disco o marcha con una velocidad u paralelamente al eje de las x tras un disco O que marcha con la velocidad U y le alcanza y chocan y resulta el disco o con la velocidad u' y el disco O con la velocidad U' mayor que la anterior, y en este punto cambiamos las velocidades de u' y U', el disco O volverá a chocar

en sentido contrario que antes con el disco o, y las fórmulas (1) (2) (3) (4) (5) demuestran fácilmente que el disco o volverá a adquirir su velocidad primitiva u, aunque en sentido contrario, y el disco O su velocidad primitiva U, aunque también en sentido contrario.

Es decir, que se vendrá a parar al sistema primitivo y el número eficaz de pares N'_p se habrá convertido en el número eficaz de pares N_p; luego ambos números son iguales.

Y aquí reproducimos la clave de la demostración en forma sintética.

Si aparecen los *discos con acento* por el choque, *otros análogos existirían ya* por la permanencia de la distribución.

Y en el mismo tiempo ∂t, y al mismo tiempo que los *discos sin acento*, chocarán y reproducirán los primeros.

En suma dos sistemas chocan en el tiempo ∂t: discos sin acento y con acento.

Los *segundos* reproducen los *primeros*.

Los *primeros* reproducen los *segundos*.

Dos observaciones:

La primera, relativa al cambio de signos.

El valor de R es una función lineal de u, U, ω, Ω; pero si hubiésemos despejado R, no en función de u, U, ω, Ω, sino de u', U', ω', Ω', también hubiéramos obtenido una función lineal, como es evidente en razón a la simetría de las fórmulas, y entonces R hubiera cambiado de signo.

Ahora bien; tomemos la primera fórmula (1), y lo que de ella digamos podríamos decir de las demás:

$$u' - u = -\frac{R}{m}.$$

Si consideramos como incógnita á u' en este choque hipotético y consideramos a u como incógnita, hemos visto que también deberá cambiarse el signo de R, y en este caso,

la ecuación precedente nos demuestra que el valor que obtuviéramos para u como incógnita sería el mismo que antes, pero con signo cambiado.

Y como lo mismo podemos repetir para ω', resulta comprobado lo que antes dijimos: que por estos choques hipotéticos los pares eficaces N'_p se convertirán en los pares eficaces del sistema N_p íntegramente en su número. Es decir, que podremos igualar N'_p a N_p.

A decir verdad, en el nuevo sistema de pares, después del choque hipotético, no obtendremos un conjunto de pares idéntico al primitivo, porque las u y ω aparecen con signos cambiados.

Pero esto importa poco, porque la orientación no influye en estos números y el nuevo sistema de pares, si no es idéntico al primitivo, es, por decirlo así, simétrico, y valga la palabra.

Además, discutimos todo esto minuciosamente en la conferencia cuarta (véase la figura 14 bis).

Hemos demostrado, pues, la igualdad que nos proponíamos:

$$C\chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega)\,\partial u\,\partial v\,\partial\omega\,\partial U\,\partial V\,\partial\Omega\,\partial y$$
$$\Big(u - U - (p\omega - P\Omega)\Big)\,\partial t = C\chi(u', v', \omega')\,\chi_1(U', V', \Omega')$$
$$\partial u'\,\partial v'\,\partial\omega'\,\partial U'\,\partial V'\,\partial\Omega'\,\partial y\,\Big(U' - u' - (P\Omega' - p\omega')\Big)$$

Esta es la igualdad que ha de servirnos, como siempre, para determinar las funciones χ y χ_1.

Y esto será lo que haremos en la conferencia próxima.

XXII.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

(Continuación.)

POR BLAS LÁZARO E IBIZA.

Gen. **SPONGIOIDES.** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos constituídos por grandes pliegues irregularmente superpuestos, muy salientes, ondeados y confluentes en algunos puntos, que aparecen adheridos a los troncos. Tanto la superficie superior como la inferior son convexas, generalmente aquélla más que ésta; pero la irregularidad de sus formas y el gran desarrollo de su dimensión horizontal, muchas veces mayor que la vertical o altura, aleja mucho sus formas de las diconoideas, ungulares y mensulares. Una sola capa tubífera, con los tubos verticales y bastante largos (unos dos centímetros por término medio). Poros pequeños e iguales.

SPONGIOIDES CRYPTARUM. *(Bolt.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus resupinatus. Bolt.
Polyporus cryptarum. Bull.
Polystictus undatus. Pers.

Descripción.—Aparatos esporíferos patentes o revueltos, de 10 a 20 centímetros de diámetro, sobrepuestos o aglomerados, de grosor variable, aunque nunca muy grande, ondeados o plegados, con la superficie superior tomentosa sedosa, desigual, muy sinuosa, de color pardo claro o leonado, que palidece con el tiempo. Carne esponjosa o acorchada

de color pardo bastante claro. Tubos bastante largos, relativamente, delgados, del mismo color que la carne. Poros pequeños, de color amarillento sucio.

Habitación.—Es frecuente sobre los troncos de coníferas que se pudren en la oscuridad, especialmente sobre los de pinos empleados en las galerías de las minas.

Area.—Esta especie ha sido hallada en diversas localidades de las regiones septentrional, occidental, central y oriental de la Península.

Gen. **HEMIDISCIA.** *Nov. gen.*

Aparato esporífero lingüeforme o semidiscoideo, con ambas superficies ligeramente convexas, con la dimensión vertical varias veces menor que la horizontal y en ésta el radio antero-posterior o longitudinal predominante sobre el lateral, a veces igualando y aun excediendo a la anchura total de la base. Estos aparatos esporíferos son anuales y presentan una sola capa tubífera en su sección vertical Tubos verticales. La sección vertical simula siempre el contorno de una lengua. Las especies viven sobre los árboles.

A.—*Especies con carne blanca.*

HEMIDISCIA LACTEA. (*Sow.*). Láz.

Sinonimia.

Boletus hibridus. Sow.
Polyporus lacteus. Fr.
Polyporus apalens. Lez.
Polystictus lacteus. Fr.

Iconografía.

Rostk. Dentsch. Fl.. lám. 23 (estado joven).
Sow. Engl. Fung., lám. 289.

Fries. Ic. select. Hymen., lám. 182, fig. 1.
Beitz. Hymen. Ausgb., V, fig. 88.
Pat. Tabl. anal., lám. 244.

Descripción.—Aparato esporífero ungulado, fibroso carnoso y de cuatro a ocho centímetros, con la superficie superior blanca y pubescente. Carne blanca, tierna y con sabor acídulo, frágil al secarse. Tubos delgados dispuestos en una sola capa de color blanco de leche, en fresco. Poros pequeños, blancos, oblongos, con el borde dentado, luego desgarrados y formando un dibujo dedaloideo. Esporas elipsoideas, de cinco o seis μ.

Habitación.—Sobre tocones y ramas secas en los bosques húmedos de hayas, encinas y otras cupulíferas, durante el verano y otoño.

Area.—En las faldas de ambos Pirineos.

HEMIDISCIA CŒRULESCENS. *(Œd.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus candidus. Bull.
Boletus olbidus. Sow.
Polystictus cœsius. Schrad.
Polyporus cœrulescens. Œd. non Fr.
Polyporus cœsius. Fr.

Iconografía.

Sow. Engl. Fung., lám. 206.
Britz. Hymen, Ausbg., lám. V, fig. 2.
Gillet. Hymen., lám. 458.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, D, fig. 2.

Descripción.—Aparatos esporíferos semicirculares de dos a ocho centímetros de diámetro horizontal, frecuentemente agrupados y superpuestos, con la superficie superior más convexa que la inferior, vellosa o erizada, de color blanco o ligeramente sombreada de un gris azulado. Carne blanca,

abundante, jugosa en fresco, blanda y tierna. Tubos finos, en una sola capa, de un centímetro próximamente, blanquecinos. Poros pequeños, blancos, oblongos, desiguales, dentados, que por compresión toman color azul ceniciento. Espora elipsoidea alargada de unas cinco μ.

Habitación.—En los tocones y troncos cortados de los bosques sombríos, en verano y otoño.

Area.—Hasta hoy solamente ha sido mencionada en las Provincias vascongadas.

B.—*Especies con carne coloreada.*

HEMIDISCIA HISPIDA. *(Bolt.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus hispidus. Bolt.
Dendrosarcos rutilenis. Paul.
Polyporus hispidus. Fr.
Polystictus hispidus. Bull.
Boletus spongiosus. Light.
Boletus volutinus. Sow.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 210 y 493.
Bel. Champ. du Tarn., lám. 161.
Huss. Ill. of Brit. Myc., tomo I, láms. 29 y 31.
Krombh. Nat. albild. Schwœmm., lám. 48, figs. 7 a 10.
Sow. Engl. Fung., lám. 345.
Quel. Champ. Vosg. Jura., lám. 18, fig. 3.
Pat. Tabl. anal., lám. 140.
Gillet. Hymen., lám. 461.
Britz. Hymen. Ausgb. V, fig. 37.
Grev. Scott. Crypt., lám. 14.
Sic. Hist. nat. des Champ., lám. 55, fig. 283.

Boud. Ic. Myc., tomo I, lám. 158.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, C.
Mass. Engl. Fung., lám. 29, fig. 1.

Descripción.—Aparato esporífero de quince a veintinueve centímetros de diámetro, por cuatro a ocho de grueso en su centro, redondeado, erizado de cerdas desiguales de cinco a diez milímetros, rígidas y ásperas, amarillo algo anaranjado, variando de color pardo al rojizo negruzco en la vejez, ocráceo en la base. Carne fibrosa en fresco, luego seca y frágil, de sabor algo ácido y cuya coloración, alternada de zonas más claras y más oscuras, comienza por ser amarillo-pálida oscureciéndose luego hasta llegar al pardo ocráceo. Tubos largos, hasta de tres centímetros, en el centro pardo ocráceos. Poros redondos, amarillentos, leonados, a veces algo pruinosos cuando jóvenes, que luego presentan el borde franjeado o denticulado. Espora esferoidea, de unas diez μ, con la exospora granulada.

Habitación.—Sobre los troncos viejos de fresnos, olmos, nogales, manzanos, perales, moreras, soforas y otros en la estación veraniega.

Area.—Se ha demostrado su existencia en todas las comarcas de la Península, aun en las meridionales, si bien en éstas con menor frecuencia. En los ejemplares que para este estudio me han sido remitidos esta especie es la más abundantemente representada.

Observaciones.—Esta especie es de las más vulgares y diseminadas por todos los ámbitos de la Península. No obstante el tamaño que algunos ejemplares alcanzan, se trata de una especie manifiestamente anual, si bien sus aparatos muertos subsisten sobre los árboles durante mucho tiempo y tardan años en desaparecer, pues su descomposición es lenta y van cayendo en fragmentos a medida que las repetidas impregnaciones y desecaciones rápidas, sobre todo en las épocas en que los árboles carecen de hojas, los van

agrietando y dividiendo paulatinamente, destruyéndolos por una especie de erosión.

Las especies arbóreas en que pueden vivir son muy numerosas. En las que más frecuentemente he hallado esta especie es en las hayas, robles, olmos, chopos, moreras, manzanos, nogales, fresnos y plátanos de sombra; aunque su forma es poco varia entre los numerosos ejemplares por mí estudiados, hay alguna que merece especial mención.

Variedad **subtomidea**, caracterizada porque sus aparatos esporíferos presentan muy prominentes la parte central de su cara superior, resultando de ello una forma que tiende a ser ungulada, aunque realmente nunca llegue a serlo.

Los ejemplares de esta variedad proceden del Jardín Botánico de Madrid, recogidos por el Sr. Del Coto sobre una morera y uno de Valverde del Júcar (Cuenca) sobre olmo, el cual me fué aportado por D. Juan Antonio Valbuena.

HEMIDISCIA RUTILANS. *(Bull.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus tuberosus. Bull.
Boletus rutilaus. Pers.
Polystictus rutilans. Pers.
Polystictus nidulans. Fr.
Polyporus nidulans. Fr.
Polyporus sanguineus. Krombh.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 482.
Pers. Ic. ef Descr., lám. 6, fig. 4.
Saund. and Smith. Myc. ill., lám. 45, figs. 1 a 7.
Gillet. Hymen., lám. 460.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, D, fig. 1.

Descripción.—Aparato esporífero redondeado o semirredondeado, de cinco a ocho centímetros, muy tierno, con la superficie superior revestida de tomento fino al principio y

después lampiña, con la coloración rojizo leonada. Carne blanda y elástica, que se arrolla al cortarla, rojiza, con zonas poco marcadas y con olor agradable. Tubos no muy gruesos pardo rojizos. Poros medianos, redondos, luego poligonales y con el borde dentado; la superficie inferior aparece de color rojizo pálido, manchado de púrpura, como otras partes del hongo. Esporas elipsoideas, de unas cuatro μ.

Habitación.—Sobre las ramas muertas de diversos árboles (robles, abedules, pinos) en los sitios sombríos y húmedos de los bosques, durante el verano y el otoño.

Area. Hallado en las provincias vascongadas.

HEMIDISCIA RHEADES. *(Fries)*. Láz.

Sinonimia.

Polyporus rheades. Fr.

Iconografía.

Bresad. Fung. Trid., lám. 136.

Descripción.—Sombrerillo semiorbicular, de cinco a ocho centímetros de diámetro, carnoso, bastante convexo por la cara superior y menos por la inferior, no muy grueso, con zonas concéntricas estrechas, con el borde entero y algo revuelto hacia arriba y la superficie superior amarillento ocrácea, erizada, aterciopelada al principio, luego lampiña y casi lisa, con zonas fibrilosas incompletas y no muy marcadas. Carne esponjosa en fresco, dura y frágil en seco, amarillenta. Tubos medianos, pardo amarillentos largos. Poros casi iguales de color amarillento acanelado, redondos, de unos cinco milímetros de diámetro. Espora elipsoidea, de unas seis μ en su diámetro mayor.

Habitación.—Sobre los troncos de los árboles y especialmente de los olmos.

Area.—Hallado rara vez en las regiones occidental y septentrional.

HEMIDISCIA PRUNORUM. *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero de cuatro a nueve centímetros de diámetro máximo horizontal, por dos a cuatro de grosor vertical, muy variable en su forma. La más típica es de contorno semicircular, á veces algo lobulada, pero cuando nace sobre ramas delgadas toma la forma pavicular y se adhiere por su quilla; otras veces los lóbulos se sobreponen unos a otros, entresoldados, y la forma se enmascara o deforma. La superficie superior, en las formas definidas, es lampiña y mate, resquebrajada, de color pardo fuliginoso en la porción central, más clara y aun grisácea en la parte intermedia, con un solo surco muy marcado paralelamente al borde y después una zona marginal, de un centímetro escaso, de color leonado. Carne dura y al fin leñosa, de color pardo ocráceo muy intenso y mezclado con algunas fibrillas blancas. Tubos delgados, de longitud mediana (seis a diez milímetros), formando un solo estrato de color de canela. Poros finísimos, redondeados, de color pardo ocráceo, y que se distancian de un modo muy marcado al aproximarse al borde. Espora elipsoidea, de unas seis μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los troncos de amigdaláceas cultivadas (ciroleros, cerezos, almendros y melocotoneros), y alguna vez sobre pomáceas *(sorbus Aucuparia)* durante el verano.

Area.—Primeramente he conocido esta especie en Asturias, en diversas localidades, y más tarde he recibido ejemplares de Pontevedra recogidos por el Prof. Crespi.

Observaciones.—El nombre específico con que designamos la nueva especie es, a nuestro juicio, el más indicado, dadas las especies en que vive; mas como un nombre análogo a éste ha sido propuesto alguna vez para otro poliporáceo *(El Fomes pomaceus,* Pers., lleva entre sus sinónimos el de *Fomes prunastri,* A. et S.), debemos advertir que la nueva especie nada tiene de común con el *Fomes pomaceus;*

éste es tomentoso, y la *Hemidiscia prunorum* es lampiña; la carne de ésta presenta fibrillas blanquecinas, de que carece la de aquél; los poros de aquél son grisáceos pruinosos, y sus tubos estratificados; caracteres que difieren marcadamente de los correspondientes de la nueva especie.

La frecuencia con que el hombre visita los árboles en que esta especie vive y el cuidado con que, por tratarse de frutales, arranca los hongos algo desarrollados, hace raros los ejemplares adultos o perfectos, siendo mucho más frecuentes los que aun no han alcanzado la forma definitiva; razón por la cual ofrecen interés las formas jóvenes, por lo que he de mencionar las más características.

Forma **placoidea.**—Formando grandes placas redondeadas, de cuatro a seis centímetros de diámetro, a veces del doble, por uno a dos de grueso, las que confluyendo a veces se suman formando placas largas, hasta de uno a veinte centímetros; los bordes se levantan y engruesan considerablemente, presentando ya entonces en su cara externa las coloraciones y caracteres propios de la forma tipo; los tubos son también mitad más cortos que en éste.

Pontevedra.—Sobre cerezos (recogida por el Sr. Crespi).

Forma **plicata.**—Constituída por una serie de aparatos perfectamente desarrollados y que confluyen formando rosetones irregulares.

Hallada en Pillarno (Asturias) sobre melocotonero y en Pontevedra (recogida por el Sr. Crespi) sobre cirolero.

Gen. **PSEUDOFOMES.** Nov. gen.

Aparatos esporíferos de forma de medio diconoide, con ambas superficies muy convexas, pronunciadamente conoideas o gibosas con la dimensión vertical tan larga o casi tan larga como el diámetro máximo horizontal; estos aparatos viven varios años, y se endurecen hasta adquirir una consistencia equivalente a la leñosa. El aparato se prolonga

cada año en sus bordes, por lo que en la superficie superior aparecen visibles surcos y zonas concéntricas. En la sección vertical se observan manifiestamente capas tubíferas sobrepuestas en forma de estratos. Tubos rectos, verticales, estratificados y muy adheridos a la carne, de la que es muy difícil arrancarlos.

PSEUDOFOMES NIGRICANS. (*Bull.*) Láz.

Sinonimia.

Polyporus igniarius. Bull. non L.
Polyporus nigricans. Fr.
Fomes nigricans. Fr.

Iconografía.

Rostk. Deutsch. Fl., lám. 51.
Fries. Ic. select. Hymen., lám. 184, fig. 2.
Pat. Tabl. anal., lám. 139.
Boud. Ic. Fung., tomo I, lám. 155.
Roll. Atl. des Champ., lám. 93, fig. 206.

Descripción.—Aparato esporífero muy pronunciadamente giboso en ambas superficies, de diez a catorce centímetros de diámetro, horizontal, grueso, muy duro, con surcos concéntricos profundos y zonas ondeadas en su superficie superior, la cual se halla revestida por una capa dura, lisa, brillante, de color casi negro, que se desvanece gradualmente hasta ser blanquecino en los bordes. Carne fibrosa en capa no muy gruesa, de consistencia más bien leñosa que suberosa, de color pardo ocráceo. Tubos estratificados, en capas numerosas, no muy largos. Poros muy pequeños, pardo-rojizos, como empolvados de blanco. Esporas aovadas, casi esféricas, de unas ocho μ de diámetro.

Habitación.—Durante todo el año sobre troncos y tocones de cupulíferas y salicáceas, en los bosques húmedos y sombríos.

Area.—Comprobado hasta hoy en Cataluña y en la región central.

Observaciones.—La coloración casi totalmente negra que en esta especie presenta al menos el área central de la cara superior, no es carácter tan constante como pudiera creerse al haberse empleado para la denominación de la especie. No solamente existen tonos diversos en esa coloración pardo negruzca, sino que hay algún otro que puede justificar la admisión de una nueva variedad.

Variedad **fuscescens**, que difiere marcadamente del tipo por la coloración pardo-ocrácea, más bien rojiza que negruzca, de la cara superior del aparato esporífero. Los demás caracteres, incluso el relieve de esta superficie y el reborde blanquecino, son idénticos a los del tipo.

Esta variedad la he hallado reiteradamente sobre cupulíferas, principalmente en varias localidades del centro de España.

PSEUDOFOMES PINICOLA. *(Sow.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus pinicola. Sow.
Boletus fulvus. Schœff.
Boletus semiovatus. Schœff.
Fomes marginatus. Pers, var. *pinicola.*
Fomes pinicola. Fr. Swartz.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 262 y variedad, lám. 270.
Œd. Fl. Dan., lám, 953.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 53 y variedad en la fig. 57.
Doas et Pat. Champ. fig. et dess., lám. 96.
Lucand. Champ. France., lám. 173.
Gillet, Hymen., lám. 464.
Michœl, Führ. für Pilz., tomo III, lám. 39.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 32, B.

Descripción.—Aparato esporífero muy convexo por el haz y por el envés de diez a doce centímetros de diámetro, con la superficie superior ondeada verrugosa, de color pardo oscuro, mate, con el borde algo ondeado, confusamente zonada de rojo y de negruzco, rojizo o anaranjado siempre en el margen. Carne blanco-marillenta o pardo-clara. Tubos delgados y finos con estratificación manifiesta. Poros menores y pardos muy pálidos o blanquecinos.

Habitación.—Durante todo el año sobre los pinos; rara vez sobre otros árboles.

Area.—Recogido en diversas localidades del Centro y Este.

Observaciones.—A veces presenta en la cara porífera y cerca del margen algunas gotitas de un líquido ácido.

El tipo más frecuente en nuestra flora es el representado con bastante fidelidad por Gillet (Hymen., lám. 464); pero hay láminas que difieren considerablemente, sobre todo algunas láminas alemanas, tanto antiguas (Schœffer. *Fung. Bav.*, láminas 262 y 270) como modernas (Michæel, *Führer für Pilzfreunde,* tomo III, lám. 39), que no nos parece que todas puedan referirse en realidad a una misma especie.

PSEUDOFOMES PRUNICOLA. Nov. sp.

Descripción.—Aparatos esporíferos diconoideos, pequeños, de contorno semicircular y ondeado, de seis a nueve centímetros de diámetro por seis a siete de distancia vertical entre ambos ápices; cara superior desigual, mate, lampiña y resquebrajada, de color pardo negruzco, que se aclara en algunas partes hasta ostentar algunas manchas cenicientas. Carne muy escasa, fuertemente coloreada de pardo ocráceo, fibrosa y de consistencia casi leñosa, inodora. Tubos en estratos numerosos que forman casi toda la masa del aparato, delgados, de menos de un centímetro y del mismo color que la carne. Poros muy finos, redondeados, pardo-ocráceos, pero de matiz mucho más claro que los tubos y la

carne, con leve pruina pardo-blanquecina, formando una superficie algo deprimida en su porción media y en su ápice decurrente sobre el soporte.

Habitación.—Esta especie parece habitar únicamente sobre los troncos de las amigdaláceas, durante todo el año.

Area.—Hasta hoy sólo puedo certificar de su existencia en el Centro y Este de la Península, pues los ejemplares que poseo proceden solamente de dos localidades, Aranda de Moncayo (Zaragoza), donde la recogí primeramente, y Lucena del Cid, en la provincia de Castellón, de donde me trajo algún ejemplar D. Enrique Ortiz y Soriano.

PSEUDOFOMES CERATONIÆ. *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero semidiscoideo, de contorno semicircular entero, de ocho a doce centímetros de diámetro por cinco a seis centímetros de grueso, con ambas superficies convexas y aun gibosas en su centro; la superior mate, desigual y rugosa, dividida por surcos concéntricos estrechos y profundos en varias zonas concéntricas, de las que las incernas son pardo-oscuras, y la externa, más ancha y prominente; contrasta por su color, es ocráceo claro y termina en un filete estrecho, algo amarillento y algo aterciopelado. La carne es pardo-ocrácea, de consistencia suberosa y ocupa la mitad próximamente del grueso del aparato esporífero. Tubos estratificados, delgados, de siete a ocho milímetros de longitud y de color pardo grisáceo. Poros redondos pequeñísimos, de coloración de canela clara, extendiéndose hasta cerca del reborde marginal amarillo. Esporas.

Habitación.—Hállase durante todo el año en los troncos de los algarrobos.

Area.—Encontrada en un envío de poliporáceos, que para su estudio me remitió el distinguido y laborioso naturalista D. Eduardo Boscá y Casanoves, quien recogió esta especie en Oliva y en Alginet (Valencia). Dada la abundan-

cia de algarrobo en el E. y S. es de suponer que la especie exista en otras localidades levantinas.

Observaciones.—Esta especie parece algo polimorfa, y aunque en todos los demás caracteres aparezcan como pertenecientes a una especie bien definida, hay algún ejemplar que autoriza al reconocimiento de una variedad.

Variedad **marginata**, caracterizada por ser menos prominente en el haz y porque el filete marginal es más ancho y más intensamente amarillo, y haciéndose prominente constituye un reborde sobre la zona marginal.

El ejemplar, remitido también por el Sr. Boscá, procede de Oliva (Valencia).

Gen. **FRIESIA.** Nov. gen.

Aparatos esporíferos en forma de medios cojinetes, almohadillas o medios discos de forma semicircular, con ambas superficies ligeramente convexas y su dimensión mayor, que es el diámetro horizontal, próximamente de igual al doble del radio antero-posterior. Estos aparatos viven más de un año y en su cara superior presentan, cuando han vivido varios, surcos concéntricos más ó menos marcados. Su sección vertical, en los que cuentan más de un año, presenta capas tubíferas sobrepuestas o estratificadas. Tubos rectos, verticales, muy adherentes a la carne, de la que con gran dificultad se separan.

FRIESIA APPLANATA. *(Pers.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus applanatus. Fr.
Polyporus applanatus. Wallroth.
Fomes applanatus. Fr.
Fomes iguiarius. Bull. non. L.
Boletus Lipsiensis. Batsch.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 454, fig. C.
Batsch. Elench. Fung., lám. 29, fig. 130.
Rostk. Deutsch. Fl., lám. 27.
Klotzch. Fl. Boruss., lám. 393.
Britz. Hymen., Ausbg., V, lám. 42.
Gillet. Hymen., lám. 466.
Quel. Champ. Vosg. Jura, lám. 19, fig. 4.
Myg. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 32, C.

Descripción.—Aparatos esporíferos grandes, relativamente poco gruesos, de diez a cuatro centímetros de diámetro, con grueso de dos a seis centímetros, generalmente reunidos y superpuestos, discoideos semicirculares o casi orbiculares en su contorno, con la superficie superior ondeada, asurcada y recubierta de una capa crustácea y frágil, pulverulenta, cuyas coloraciones oscilan entre el amarillento ocráceo pálido al café con leche, blanqueando en algunas partes, y muy principalmente en los bordes. Carne olorosa en fresco, acorchada, que se arrolla en copitos algodonosos al cortarla, blanquecina al principio y que se va oscureciendo hasta llegar al color de castaña. Tubos delgados y pardos rojizos formando dos o más capas, de un centímetro o más cada una. Poros blancos, que se manchan de pardo por la presión o por el contacto. Espora elipsoidea de unas ocho μ, de color leonado claro, y con la exospora finamente equinulada.

Habitación.—Sobre los tocones de hayas, robles y fresnos en los bosques montañosos durante el verano y otoño.

Area.—En la zona pirenaica, provincias septentrionales y del Noroeste. Del valle del Oro (Pontevedra) me ha aportado algún ejemplar D. Antonio Casares.

FRIESIA ANNOSA. (*Fries.*) Láz.

Sinonimia.

Fomes annosus. Fr.
Fomes resinosus. Rostk.

Iconografía.

Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 29.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 4.
Fries. Ic. select. Hymen., lám. 186, fig. 2.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 32.

Descripción.—Aparato esporífero, a veces angostado en la base formando un rudimento de pedicelo, semirredondeado, de 10 a 15 centímetros de diámetro horizontal, aplanado y delgado, con la superficie superior rugosa o tuberculosa, asurcada, zonada, con brillo, sedosa y de color caoba al principio y después con revestimiento crustáceo y pardo-negruzco, con el borde más pálido. Carne seca, aun en fresco, blanquecina y suberosa. Tubos relativamente largos, de color blanco sucio o crema. Poros medianos, redondos o polígonales obtusos, blanquecinos, luego amarillentos, cambiantes. Esporas elipsoideas, de seis a siete μ, incoloras, con la exospora erizada de aguijoncitos cortos.

Habitación.—En verano sobre los tocones viejos de coníferas abietáceas.

Area.—Hasta hoy sólo ha sido mencionado en los Pirineos y en las provincias septentrionales.

La lámina de Migula *(Kryptogamen Flora,* tomo III, lámina I, 32), aunque lleva el nombre de *Fomes annosus*, no puede referirse a esta especie, y por sus condiciones más bien parece representar una *Poria* o un *Physisporus*, pues no representa un hongo fomideo.

FRIESIA VEGETA. *(Fries).* Láz.

Sinonimia.

Placodes vegetus. Quel.
Fomes vegetus. Fries.
Feosporus vegetus. Schroet.

Iconografía.

Fries. Ic. select. Hymen., lám. 183, fig. 3.

Descripción.—Aparato esporífero de contorno semirredondeado de dos a tres decímetros de diámetro, regularmente grueso, de consistencia entre esponjoso y suberoso, cuya cara superior ostenta surcos y zonas salientes concéntricas, de coloración parda casi homogénea y mate. La carne, que forma una capa poco más gruesa que las tubíferas (unos dos centímetros), es pardusca, algodonosa y se desprende fácilmente, tanto de la cutícula, que es relativamente gruesa, como de las capas tubíferas. Tubos estratificados muy delgados, de unos diez y nueve milímetros de longitud, de color pardo-oscuro mal definido. Poros pequeños, blanquecinos al principio y al fin pardo-oscuros.

Habitación.—Aparece al final del verano y primera parte del otoño sobre los troncos viejos de los olmos, tilos y nogales.

Area.—Reconocido únicamente en la región occidental, en Galicia; en Asturias y en el Guadarrama.

Observaciones.—Aunque esta especie no es de las más polimorfas, presenta una variante curiosa que denominaremos:

Variedad **decuorens**: se distingue principalmente por su forma, en la que la superficie inferior o porífera aparece decuorente y el borde del aparato esporífero se separa poco del tronco, presentando solamente un saliente de tres a cuatro centímetros; el borde es relativamente delgado y las dimensiones mucho menores que en el tipo (diez centímetros de diámetro máximo). Además vive sobre el abedul, especie en que la forma tipo no ha sido nunca mencionado.

Los ejemplares proceden de Cibea (Asturias) y me fueron remitidos por el Dr. D. A. Rodríguez.

FRIESIA RUBRA. Nov. sp.

Descripción.—Aparato esporífero semidiscoideo o alguna vez discoideo, aplanado, de doce a quince centímetros de diámetro por cuatro a cínco de grueso en el centro, con la

superficie superior muy desigual, sembrada de surcos radiantes y tuberosidades redondeadas y salientes, a veces con algún surco concéntrico con el borde; coloración pardo-oscura en la porción central, rodeando luego a ésta una ancha zona rojizo-amoratada, después una zona blanquecina y un color ocráceo pálido en el borde; en los ejemplares viejos la coloración de la zona central pasa a ser grisácea y se extiende a expensas de la zona amoratada. Carne amarillenta pardusca muy clara y sin zonas, suberoso-leñosa, dura y que se arrolla en copos al serrarla. Tubos estratificados de cinco a siete milímetros de longitud, muy estrechos, de un blanco apenas amarillento. Poros pequeñísimos, redondeados o apenas poligonales, con el borde entero, de color de crema blanco-amarillenta, muy clara, que se oscurece algo por la desecación. Esporas de nueve a diez μ en su mayor dimensión.

Habitación.—Se encuentra en verano y otoño sobre los troncos de las hayas viejas.

Area.—Es prematuro establecerla tratándose de una especie nueva; pero las localidades en que yo la he recogido (hayedales de Benasque, en pleno Pirineo central y Bosque de Muniellos, en Asturias) y remitida también de Cibea (Asturias) por el Dr. Rodríguez, me permiten asignarle por lo menos la extensión de la cordillera pirenaica.

FRIESIA RESINACEA *(Boud.) Láz.*

Sinonimia.

Fomes resinaceus. (Boud.)

Descripción.—Aparatos esporíferos de forma almohadillada irregular y contorno semicircular y desigual; superficie superior con zonas concéntricas y surcos anchos y profundos cuando joven, luego más próximos y menos profundos, recubierta de un barniz lacáceo de color pardo-rojizo, castaño o caoba, al principio, pero que luego pasa,

en los ejemplares secos, a un *negro intenso y muy brillante;* la zona marginal es, en los ejemplares jóvenes, ancha, blanquecina, algo pubescente y el borde obtuso. Carne suberosa, de color pardo-ocráceo claro. Tubos no muy largos, estratificados, de color de canela claro. Poros pequeños, redondeados, blanquecinos y al fin pardo-claros. Espora de diez a doce μ por seis o siete; elipsoidea, parda y con la exospora enteramente lisa.

Habitación.—Hállase durante todo el año sobre los robles.

Area.—En la región septentrional; comprobada reiteradamente en diversas localidades de Asturias.

Observaciones.—No estoy muy seguro de que la especie española coincida exactamente con el tipo dado a conocer por Baudier, aunque los caracteres de la espora y el cambio de coloración de la capa vernicosa me inclinan mucho a esta identificación. En todo caso pudiera constituir una variedad, dentro del tipo específico, más bien que una especie realmente diversa de aquélla.

(Continuará.)

XXVI. — Neurópteros nuevos de España.

Por el R. P. Longinos Navás, S. J.

(Segunda serie)

Familia Crisópidos.

11. **Chrysopa vulgaris** Schn var. **striolata** nov.

Similis var. *aragonicæ* Nav.

Caput flavum, striola fusca ad genas.

Prothorax stria nigra longitudinali ad angulos anteriores et alia striola longitudinali fusca ad utrumque latus fasciæ flavæ ante sulcum transversum.

Abdomen singulis fere tergitis striola fusco-rufa obliqua ad utrumque latus, antrorsum demissa et latiore.

Cetera ut in typo.

Long. corp.....	9	mm.
— al. ant.....	13,5	—
— al. post.....	12,8	—

Patria. Bosost (Valle de Arán, provincia de Lérida), 22 de Julio de 1915. (Col. mía.)

12. **Chrysopa ciliosa** sp. nov.

Similis *inornatæ* Nav. Viridis.

Caput nullis maculis notatum, labro in margine anteriore fuscescente, oculis in sicco nigris; palpis viridibus, articulo ultimo atro; antennis flavidis, duobus primis articulis viridibus.

Prothorax latior quam longior, antice angustatus, tribus punctis nigris ad marginem lateralem, duobus punctis fuscis in disco.

Abdomen viride, pilis flavidis.

Pedes virides, fusco pilosi, tarsis flavescentibus.

Alæ hyalinæ, irideæ, apice acutæ; reticulatione viridi; stigmate viridi; pilis tenuibus, fuscis, longis, fere se mutuo contingentibus ex una et altera vena; fimbriis densis, flavis; costa puncto basilari nigro notata.

Ala anterior venula prima costali, subcostali, procubitali et cubitali totis nigris, reliquis plerisque totis viridibus; primis costalibus ad subcostam nigro punctatis; quatuor marginalibus posterioribus (2.ª, 3.ª, 4.ª et 5.ª) seu apice venarum et ramorum ad marginem posticum nigris; tribus intermediis, prima ante apicem cellulæ divisoriæ inserta; venulis gradatis fere 5/7.

Ala posterior venula prima costali viridi, sequentibus 5-7 nigris, etiam nigris duabus primis procubitalibus, cubitalibus et postcubitalibus; gradatis fere 4/6.

Long. corp.....	♂ 9,8 mm.	♀ 9,5 mm.
— al. ant.....	12,7 —	13,8 —
— al. post....	11,4 —	12,5 —

Patria. Marín (Pontevedra), 4 de Julio de 1915. (Col. m.)

13. **Chrysopa linensis** sp. nov.

Similis *albæ* L., major.

Caput flavum, nulla penitus macula distinctum; oculis in sicco fuscis; palpis flavis, solum externe leviter fusco lineatis; antennis flavis, ala anteriore paulo brevioribus.

Prothorax trapezoidalis, antice angustior, nullatenus maculatus, viridis, dorso fascia longitudinali media viridi-flava. Meso-et metathorax virides.

Abdomen viride, viridi pilosum, pilis longiusculis.

Pedes vividi-pallidi, pilis concoloribus, tenuibus, longiusculis, tibiis posticis linea impressa longitudinali manifesta; tarsis paulo flavescentibus; unguibus fuscis, basi fortiter dilatatis.

Alæ grandes, reticulatione et stigmate viridibus, pilis fimbriisque fuscis, tenuibus, longiusculis; venulis radialibus mediis leviter flexuosis; furculis marginalibus fere 11.

Ala anterior apice elliptice rotundata; area costali prope basim sat dilatata; venulis costalibus, subcostali basilari, prima intermedia ante apicem cellulæ divisoriæ pertingente, gradatis fere 8/8 vel 9/9, ultima procubitali et prima cubitali totis, aliquot radialibus initio, 4 intermediis fine, 6 procubitalibus medio, marginalibus posterioribus aliquot fine nigris. Venulæ intermediæ 6.

Ala posterior apice subacuta; venulis costalibus, subcostalibus et gradatis 7/7 del 8/8, furculis marginalibus ad angulum posteriorem nigris.

Long. corp.....	8,5	mm.
— al. ant.....	15	—
— al. post....	13,5	—

Patria. Artiga de Lin, valle de Arán (Lérida). Un solo ejemplar cogido en el eremitorio el día 25 de Julio de 1915, mangueando en los avellanos de junto al río Juéu.

Los siguientes caracteres distinguen fácilmente esta especie de las que conozco, además de los sacados del color y dibujo.

El campo costal del ala anterior está bastante dilatado cerca de la base, más de lo que suele en especies análogas.

Las venillas radiales que preceden al estigma en ambas alas tienden a hacerse flexuosas, formando ángulo con los ramos del sector del radio.

Además hay que notar en el ejemplar que tengo a la vista que las venillas gradiformes son más numerosas (una más en cada serie) en el ala derecha que en la izquierda, y en el ala anterior derecha aparece una más, también negra, intercalada entre ambas series.

14. **Chrysopa flavifrons** Brau. var **antennalis** nov.

Antennæ duobus primis articulis stria fusca longitudinali externa notatæ.

Prothorax superne vix flavus ad medium; margine laterali 2-3 punctis fuscis; disco ad latus striola curva media et puncto ad angulum anticum, nigris. Mesonotum duobus punctis fuscis ad præscutum notatum.

Abdomen viride, striola laterali rufescente ad pleraque tergita, inferne pallidius.

Alæ reticulatione viridi, pilis fuscis.

Ala anterior venulis gradatis 4/7 vel 3/6, nigris.

Ala posterior venulis gradatis 3/5, nigris.

Cetera ut in typo.

Long.	corp.....	7,8	mm.
—	al. ant.....	12,7	—
—	al. post....	11,5	—

Patria. La Guardia (Pontevedra), 25 de Junio de 1915. (Col. m.)

Por las marcas del abdomen esta variedad se parece a la *vestita* Nav., por las de las antenas a la *cosmeta* Nav., de la cual difiere en tener también señalado el segundo artejo, y en otros caracteres.

15. **Chrysotropia melaneura** sp. nov.

Viridis.

Caput flavum, immaculatum, palpis concoloribus, oculis in sicco fuscis; antennis flavis, ala anteriore brevioribus, ultra medium leviter fuscescentibus, articulo primo grandi.

Thorax viridis, fascia dorsali longitudinali flava. Prothorax latior quam longior, antrorsum angustatus.

Abdomen viride, inferne pallidius, flavido pilosum, lamina subgenitali ♂ longa, cercis duplo longiore, flava, apice rufescente, in medio basilari lata, superne concava, in medio apicali angusta, superne clausa; cercis cylindricis, declivibus, rectis.

Pedes virides, pallidi; tarsis flavescentibus, unguibus fuscis, basi fortiter dilatatis.

Alæ hyalinæ, irideæ, apice acutæ; reticulatione et stigmate viridibus, pallidis; fimbriis pilisque pallidis; venulis costalibus, radialibus et gradatis totis nigris.

Ala anterior venula subcostali basilari, duabus primis intermediis et cubitalibus, et omnibus procubitalibus totis, reliquis intermediis et primis marginalibus posterioribus apice nigris; sectore radii initio, venula divisoria tota nigra. Venulæ gradatæ 6/7. Venula prima intermedia intra cellulam divisoriam prope ejus apicem finiens.

Ala posterior angustior acutiorque, sectore radii tractn medio nigro, venulis gradatis 5/6.

Long. corp.....	♂	8	mm.
— al. ant.....		13,5	—
— al. post.....		11,8	—

Patria. Les, Valle de Arán (Lérida), 21 de Julio de 1915. (Col. m.)

He llamado *melaneura* esta especie del griego μέλας negro y νεῦρον nervio, por alusión al rasgo negro del sector del radio en el ala posterior. Este carácter distingue a primera vista la nueva especie de los restantes Crisópidos de Europa, pues no recuerdo haberlo visto en otra, así como es peculiar de varias especies americanas.

16. **Chrysotropia melaneura** Nav. var. **furcata** nov.

Alæ furculis marginalibus ad angulum posteriorem plus minusve nigratis, distinctius longiusque in ala posteriore; tractu sectoris radii in eadem ala interrupte vel parum nigrato.

Long. corp.....	♂	8,2	mm.	♀ 8,4	mm.
— al. ant.....		12,4	—	15	—
— al. post....		11,4	—	13,5	—

Patria. Las Bordas, Valle de Artiga de Lin (Lérida), en los avellanos y otros árboles, 19 y 20 de Julio de 1915. (Col. m.)

17. **Chrysotropia melaneura** Nav. var. **absona** nov.

Sector radii in ala posteriore basi niger, in reliquo totus viridis, cum basi ramorum inde procedentium; furculæ marginales in eadem ala vix nigratæ.

Reliqua ut in typo.

Long. corp.....	♀	8	mm.
— al. ant.....		15	—
— al. post.....		12,8	—

Patria. Valle de Arán, Artiga de Lin (Lérida), 20 de Julio de 1915. (Col. m.)

Familia Sócidos.

18. **Stenopsocus lineolatus** sp. nov. (fig. 3).

Caput flavum, pilis concoloribus; vertice longitudinaliter sulcato, sulco parum profundo; macula inter ocellos fusca, antrorsum extenta et sensim evanescente; fronte convexa, fuscescente, striis angularibus griseis; labro transverso, antice truncato vel levissime concavo, marginibus lateralibus convexis; oculis in sicco nigris, prominulis; palpis flavis; antennis flavis basi, in reliquo fuscis, pilis fuscis.

Thorax superne piceus, nitens, inferne fulvus.

Abdomen ovale, fulvum, processu ultimi tergiti subtriangulari, flavo, apice rotundato.

Pedes fulvi, fulvo pilosi, tarsis primo articulo longo, flavo, reliquis fuscescentibus.

Alæ hyalinæ, reticulatione fusca.

Ala anterior (fig. 3) stigmate elongato, parum dilatato, toto sulphureo, margine externo et venula stigmali fusco

limbatis, margine interno seu posteriore sulphureo, juxta venulam stigmalem fusco fuscoque limbato; ramis procubiti parum divergentibus, subparallelis, furca apicali prima longiore suo petiolo; procubito et cubito usque ad divisionem prioris et usque ad marginem posticum flavis.

Fig. 3.
Stenopsocus lineolatus Nav.
Ala anterior.
(Col. m.)

Ala posterior apice subparabolico; furca apicali prima ramo anteriore triplo breviore posteriore seu externo.

Long. corp.....	2,6	mm.
— al. ant.....	4,7	—
— al. post.....	3,2	—

Patria. Solares (Santander), 10 de Julio de 1915. (Col. m.)

El color del estigma y su raya negruzca que lo limita exteriormente distinguen muy claramente y a simple vista esta especie de otras similares.

19. **Trichopsocus hirtellus** Mac Lachl. var. **angulata** nov. (figura 4).

Fig. 4.
Trichopsocus hirtellus M' L.
var. *angulata* Nav.
Ala anterior y extremo de la posterior.
(Col. m.)

A typo differt alis abunde fusco limbatis.

Ala anterior linea duplici fusca in angulum fuscum, fere in >, ad medium alæ, ramo anteriore tractu sectoris usque ad confluentiam cum procubito, ramo posteriore tractu procubiti a cubito usque ad confluentiam cum sectore radii; margine

posteriore tribus umbris: umbra fusca ad apicem postcubiti, ad apicem cubiti ante cellulam posticam, ad ipsum apicem cellulæ posticæ.

Ala posterior venula seu ramo anteriore furcæ apicalis primæ ad costam, apice procubiti et cubiti ad marginem externum, fusco limbatis.

Cetera ut in typo.

Patria. La Guardia (Pontevedra), 25 de Junio de 1915). Santiago (Coruña), 2 de Julio de 1915. Varios ejemplares juntamente con la forma típica. (Col. m.)

Familia Filopotámidos.

30. **Wormaldia ambigua** sp. nov. (fig. 5).

Similis *occipitali* Pict.

Caput fuscum, verrucis occipitalibus concoloribus, vel vix pallidioribus; palpis fuscis; antennis fuscis, late testaceo annulatis, vel testaceis fusco annulatis (nam fere æqualiter fusco ac testaceo pictæ sunt).

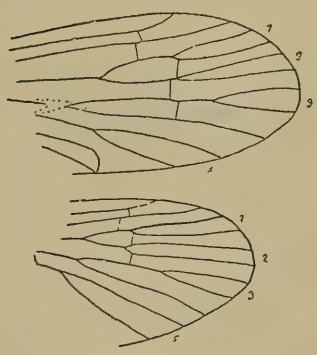


Fig. 5.
Wormaldia ambigua Nav.
Extremo de las alas.
(Col. m.)

Thorax fusco-niger, nitidus.

Abdomen fuscum, ultimis segmentis testaceis.

Pedes testacei.

Alæ (fig. 5) apice elliptice rotundatæ, reticulatione fusca, forti; membrana fusco-ferrugineo suffusa; furca apicali tertia saltem sesquilongiore suo petiolo.

Ala anterior stria pallida ad anastomosim, ad thyridium, ad arculum; venula cubitali citra vel prope ortum rami cubiti, longe citra confluentiam axillarium.

Ala posterior venis procubitali et cubitali in medio interno pallidis, parum sensibilibus.

Long. corp.....	♀	4,7	mm.
— al.....		5,7	—
— al.....		5	—

Patria. Les, valle de Arán (Lérida), 21 de Julio de 1915. (Col. m.)

Aunque no he visto sino dos ejemplares ♀, no pudiendo identificarlos con ninguna de las especies conocidas me he atrevido a describirlos con nombre de especie nueva.

Por la estructura de las alas se avecina a la *occipitalis* Pict., según la descripción y figura de Mac Lachlan (Revisión, p. 389, pl. XLI).

El tamaño es menor, la horquilla apical tercera no tan larga, aunque lo es mayor que su pecíolo. En esto se diferencia asimismo de la *subnigra* Mac Lachl., con la cual también tiene afinidades. Item la venilla cubital en el ala anterior cae más adentro con relación al mismo cúbito, y sobre todo a la confluencia de las axilares.

Además, la venilla basilar de la celdilla apical sexta del ala anterior, o sea detrás del pecíolo de la horquilla apical tercera es muy manifiesta en esta especie, y no la señala la figura de Mac Lachlan para la *occipitalis*.

Fuera de esto, el segmento abdominal antepenúltimo es proporcionalmente más largo y más estrecho, las verrugas occipitales y el pronoto más obscuro, etc.

Zaragoza, 19 de Enero de 1916.

XXVII.—Sobre la teoría científica de la música (*)

POR JUAN DOMÍNGUEZ BERRUETA

DEMOSTRACIÓN DIMENSIONAL DEL TEMPERAMENTO

BASES DE UNA NUEVA ARMONÍA

Toda la regeneración de la gama de los sonidos radica en la idea exacta que se tenga del *temperamento* musical. Es inconcebible, si no se viera, hasta dónde han llegado los prejuicios y los errores en la idea de la atemperación.

En una obra sobre estética musical científica se formula esta amplia definición de temperamento: «Es un fenómeno universal en las artes, algo que permite adivinar entre varias interpretaciones. No consiste en una economía o pereza de espíritu para *confundir* y no *distinguir*, sino en una actividad que en un sonido inerte sabe y quiere descubrir sentidos ocultos o sugeridos. Exigencia del pensamiento, que suple, crea, organiza, transforma o deforma los datos que le suministran los sentidos.

Como el ojo en su visión binocular superpone imágenes, imposibles de superponer geométricamente, y percibe una visión en relieve, diferente de las dos imágenes, lo mismo el oído hace de cada punto de movimiento sonoro, ya una tendencia, un reposo, o una distancia entre dos jalones fijos.»

No carece de sentido filosófico esta concepción de temperamento, en general, y en idealidad. Pero en la realidad de la música, el temperamento desciende de esas altas esferas filosóficas para convertirse en una *convención*, utilitaria y empírica en su origen y desarrollo histórico hasta hoy, y

(*) Resumen de una obra en preparación.

artística y científica en lo sucesivo para los que, como el autor del presente trabajo, tratan de dar del *temperamento* una demostración matemática al mismo tiempo que musical.

Los antiguos tratadistas de la teoría científica de la música (véase *Tosca)* hablaban de un *círculo músico.* Consistía en disponer las cuerdas *con tal arte, que de cualquiera parte se hallasen las consonancias en la misma proporción.*

Este círculo era imposible si las consonancias fuesen justas; pero era fácil *sacando las consonancias de su lugar, de modo que no ofendieren al oído.*

Es decir, que con tal de hacer posible el *círculo músico,* se admitía, y se admite hasta hoy, el absurdo de preferir la *igualdad en la inexactitud* de las consonancias, a la *justeza en la desigualdad* de los mismos intervalos.

Todo por hacer cómoda y fácil la *transposición* de las composiciones musicales, de un tono a otro. Esto es, la supresión de los tonos diferentes, con la igualdad absoluta de los intervalos respectivos en todos ellos.

Además, no se crea que es tan sencillo poner de acuerdo a los partidarios del *círculo músico*—hoy se llama *temperamento igual*—sobre lo que ha de ser el *intervalo justo* fundamental. La inmensa mayoría no discute siquiera la idea de que la *octava* deje de ser justa. Pero modernamente, y con razones científicas muy atendibles, sostiene *Guillemin* (*) que la *octava* no es necesario que sea justa, y defiende, en cambio, la exactitud de la *cuarta. Guido de Arezzo* es sabido que estableció la justeza de la *tercera,* no importando que no lo fuera la *quinta.* Y ya se sabe también que es clásico, desde los griegos acá, lo de las *quintas justas,* como base ineludible para la generación de todos los demás intervalos.

Partiendo del principio filosófico de que todo error científico encierra una parte de verdad, y toda tendencia uni-

---

(*) *Les premiers éléments de l'Acoustique musicale* (París, 1904).

versal instintiva supone un elemento de voluntad racional, no veo inconveniente en admitir la idea *cíclica* de la atemperación

Que la *octava*, como primer intervalo distinto del *unísono*, sea *justa*.

Con esa base, y ante la necesidad práctica de establecer un número limitado de notas, dentro del ilimitado, teóricamente posible, en la *octava*, buscaremos la identificación de las notas que tienden a acercarse, al aparecer periódicamente con nombres análogos en las *octavas* sucesivas.

Fuera de esto, como fundamento, ¿qué razón científica, ni artística, se opone a que haya *tonos* y *semitonos* «mayores» y «menores», *terceras* «mayores» y «menores» y hasta *cuartas* y *quintas* «mayores» y «menores»?

Guido de Arezzo estableció las *quintas* disminuídas en $\frac{1}{4}$ de *coma* de las justas, y las *cuartas* aumentadas en lo mismo; y los *tonos mayores* disminuídos en $\frac{1}{2}$ de *coma*, para aumentar lo mismo a los menores; y los *semitonos* mayores disminuídos en $\frac{1}{4}$ de *coma*, para aumentar lo mismo a los menores. Y todo ello para sostener un *temperamento igual* tomando por base convencional la *tercera justa*, para hacer todos los *tonos* iguales, y los *semitonos* también.

¿Se le opondrá al autor del presente trabajo la sinrazón de la rutina, en nombre de no sabemos qué intangibilidad de intervalos, para negársele el derecho á la modificación de una *coma* en las *quintas*?

Y al llegar aquí he de desarraigar otros prejuicios acerca también de la *coma*.

Todavía hay autores que hablan de la *coma* como de un intervalo infinitesimal, inapreciable, insignificante, y del que hay que prescindir además como de una cosa anticientífica, que ha aparecido en la música, por generación espontánea,

como impureza de la realidad. Y no se explican la disminución de la *coma* en la gama de *Tolomeo* mas que como quien rebaja «un poco» la longitud del metro para que quepa exactamente en una distancia determinada.

Otros en cambio, por el extremo opuesto del error, adoptan la *coma* como *intervalo-unidad* fundamental para medir intervalos.

Ni una cosa ni otra. Con acierto dice un autor, *Barbereau* (*), que no hay que «excusar» la *coma* como una «tolerancia» del oído, cuando en realidad es una «exigencia».

La *coma*, intervalo tan pequeño, ha sido por mucho tiempo, y lo es aún, el objeto de interminables discusiones. Pero es, sobre todo, aunque no lo sospechen siquiera los discutidores inconscientes, la piedrecita angular donde estriba el *temperamento*, y por tanto el edificio completo de la gama musical.

Antes de pasar más adelante digamos algo de la «pequeñez» de la *coma*. Es, próximamente, la *quinta* parte de un *semitono*. Y tenemos en los *órganos de Corti* de nuestro oído cerca de 33 fibrillas acústicas correspondientes a cada *semitono*. Es decir, que para una *coma* hay, próximamente, seis *órganos de Corti*, seis *notas* perceptibles desde luego. Si es exacto lo establecido por Weber, de que un oído educado puede percibir hasta $\frac{1}{64}$ de *semitono*, entonces en el intervalo de una *coma* se podrían distinguir hasta *12* notas diferentes, dos para cada órgano de *Corti*.

Sea de ello lo que quiera, el aspecto «cuantitativo» de la *coma* es menos importante para nosotros que el «cualitativo», es decir, su razón de ser en la formación de la gama, con la generación del *temperamento*. Recordemos la ecuación: $3^x = 2^y \times 5^z$.

Esa es la fórmula matemática del *temperamento toloméico*.

(*) *Etudes sur l'origine du système musical* (1857).

Como la ecuación $3^x = 2^y$ es la fórmula del *temperamento pitagórico.*

¿Qué relación tiene la *coma* con el temperamento?

Es suficiente poseer la noción elemental de *factores primos* que se estudia en Aritmética para comprender que ninguna de esas ecuaciones puede resolverse exactamente para valores enteros de las incógnitas x, y, z.

Y como el problema de la atemperación exige, por su naturaleza, que x, y, z sean *números enteros* de *quintas*, *octavas* y *terceras,* respectivamente, resulta lo que en términos matemáticos se llama un problema *imposible.*

Pero resolvamos esas ecuaciones *aproximadamente*, como lo requiere la misma naturaleza del mismo, y aparecerá un nuevo *factor*, que es la *coma.*

En efecto:

$$3^4 = 2^4 \times 5 \times \frac{81}{80} \text{ (coma toloméica)}$$

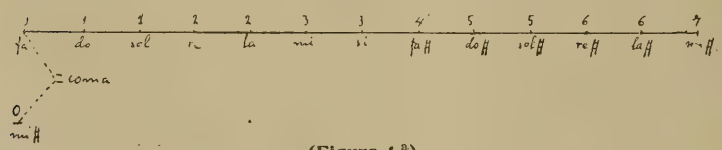
$$3^{12} = 2^{19} \times \frac{3^{12}}{2^{19}} \text{ (coma pitagórica).}$$

Expliquemos esas fórmulas.

Empezando por la pitagórica, resulta que la traducción al lenguaje músico de dicha fórmula es:

> «doce quintas ascendiendo, menos siete octavas descendiendo, dan una diferencia de una coma pitagórica, respecto de la primera nota».

El esquema es éste:

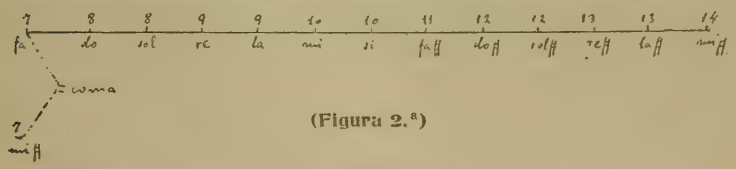


(Figura 1.ª)

De modo que la idea ciclica se observa aquí, repitiendo

en *octavas* sucesivas, con un retraso de una *coma*, la misma generación de quintas.

Puede decirse que todo ese desarrollo del *temperamento*



(Figura 2.ª)

pitagórico está contenido en la *definición* de la *coma:*

$$\frac{3^{12}}{2^{12}} = 2^7 \times \frac{3^{12}}{2^{19}}; \text{ o también: } \frac{3^{12}}{2^{12}} : 2^7 = \frac{3^{12}}{2^{19}}.$$

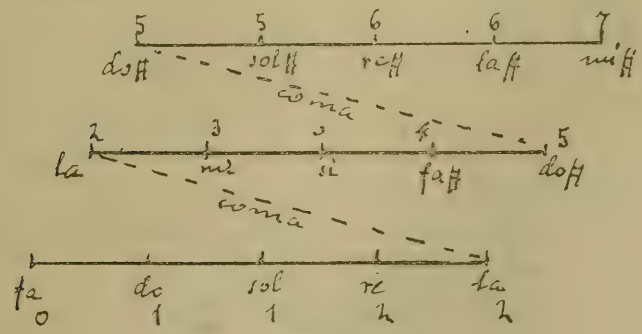
Que puede traducirse así: «la coma es el error con que 12 quintas ascendentes, menos siete octavas descendentes, producen el unísono».

Veamos ahora la fórmula toloméica.

La traducción al lenguaje músico de dicha fórmula es:

> «cuatro quintas ascendiendo, menos dos octavas descendiendo, menos una tercera, dan una diferencia de una coma toloméica, de la primera nota».

El esquema es éste:



(Figura 3.ª)

La idea cíclica se observa aquí, repitiendo la generación

de cuatro *quintas,* con un retraso de una *coma* toloméica *(coma de Didymo,* o coma *sintónica).*

Y del mismo modo que en la fórmula pitagórica, puede decirse ahora que toda la expresión del desarrollo del *temperamento* toloméico está contenido en la definición de la *coma* sintónica:

$$\frac{3^4}{2^4} = 5 \times \frac{81}{80}; \text{ o también, } \frac{3^4}{2^4} : 2^2 = \frac{5}{4} \times \frac{81}{80}.$$

Que puede traducirse así: «la coma sintónica es el error con que cuatro quintas ascendentes menos dos octavas descendentes producen la tercera mayor».

Pero todavía podemos observar la idea cíclica, por periodos de 12 quintas como en la generación pitagórica, buscando la relación que hay entre el $mi_7\sharp$ y el fa_7, o entre el $mi_0\sharp$, que se obtendría descendiendo siete octavas y el fa_0.

Para ello establezcamos la fórmula:

$$\frac{3^{12}}{2^{12}} = 2^7 \times \frac{81}{80} \times \frac{81}{80} \times x.$$

Esto es, que ascendiendo 12 quintas y descendiendo siete octavas más dos comas sintónicas, encontraremos el intervalo x, que es el error con que el $mi\sharp$ se sustituye al *fa* en la gama toloméica.

Resolviendo la ecuación anterior obtendremos:

$$x = \frac{3^{12}}{2^{19}} \times \frac{80}{81} \times \frac{80}{81} = \frac{3^4 . 5^2}{2^{11}}.$$

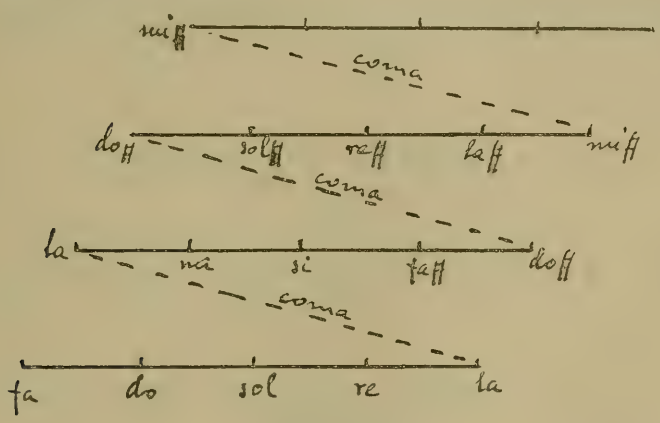
Observando la expresión de x, descompuesta en tres factores fraccionarios se ve que es igual a la *coma* pitagórica disminuída en dos veces la *coma* sintónica.

También puede darse a x otra expresión:

$$x = \frac{3^4 . 5^2}{2^{11}} = \frac{3^4}{2^4 . 5} : \frac{2^7}{5^2}.$$

Y bajo esta forma es igual a la *coma* sintónica disminuída en el llamado *cuarto de tono* $\frac{2^7}{5^3} = \frac{128}{125}$. Pero como este último intervalo es mayor que la *coma* sintónica, el valor de x es menor que la unidad, es decir, que es un error negativo, o lo que es lo mismo, que el *mi*♮ toloméico es inferior al *fa,* lo cual nos comprueba lo que ya sabemos al tratar de la *cromatización* en las das gamas, toloméica y pitagórica.

Por otra parte, considerando que el *mi*♮ de la 7.ª octava en la generación toloméica es la 4.ª *quinta* a partir del *do*♮, y le corresponde, por tanto, la reducción de una *coma,* el esquema toma esta forma:



(Figura 4.ª)

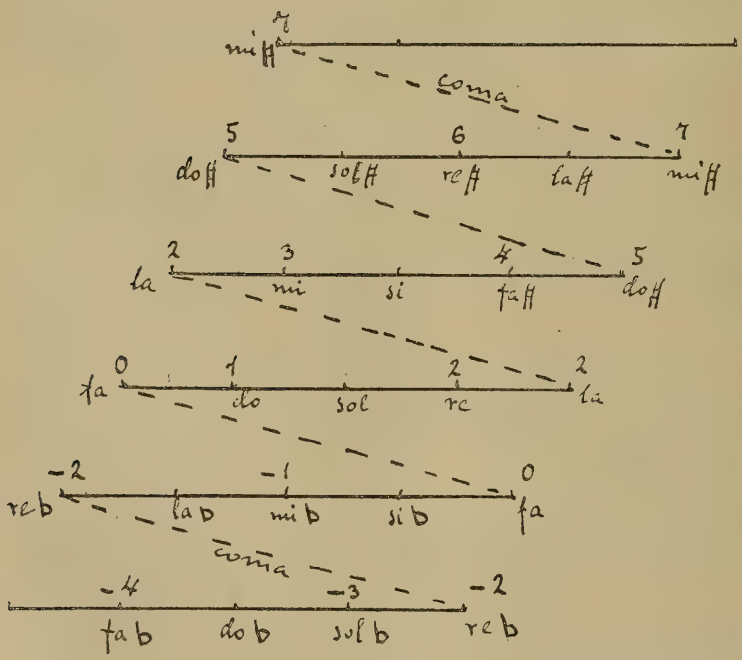
En este caso, para hallar el intervalo $x = mi\natural - fa$, tendremos que disminuír el anterior valor de x en una coma, y resultará:

$$x = \frac{3^4 . 5^2}{2^{11}} : \frac{3^4}{2^4 . 5} = \frac{5^3}{2^7} = \frac{125}{128},$$

que es el *cuarto de tono* invertido, esto es, que el *mi*♮ queda inferior al *fa* en un *cuarto de tono*. Esta conclusión, si

se observa detenidamente, nos enseña mucho sobre el carácter de la generación toloméica de la gama. El *cuarto de tono* no es una coma, ni mucho menos. Es un intervalo *cromático* o *enarmónico,* según la teoría que se adopte; pero siempre intervalo apreciable, y que forma parte integrante de gamas admitidas en la teoría y en la práctica musical. Ese intervalo nos enseña que la gama toloméica no puede encerrarse en el ciclo de las 12 *quintas* pitagóricas. O más bien que el ciclo toloméico, aun reduciéndolo al período de cuatro quintas, que indica su *coma,* no tiene carácter de «volver al unísono» por medio de octavas, sino que vuelve a la «tercera».

Sin embargo, podemos buscar, con el *temperamento* de la *coma* sintónica, a qué numero de *quintas*, con retroceso de octavas, se llegaría al unísono aproximadamente. Sea el esquema siguiente:



(Figura 5.ª)

Para calcular el intervalo *mi♯ — fa♭* análogamente a como hemos hecho anteriormente, tendremos (puesto que hay 19 *quintas* en 11 octavas):

$$\frac{3^{19}}{2^{19}} = 2^{11}\left(\frac{3^4}{2^4 . 5}\right)^5 \times x.$$

(La coma está repetida cinco veces, como se ve en el esquema.)

Obteniendo el valor de x, resulta:

$$x = \frac{3^{19}}{2^{19}} . \left(\frac{2^4 . 5}{3^4}\right)^5 . \frac{1}{2^{11}} = \frac{3^{19} . 3^{20} . 5^5}{2^{19} . 3^{20} . 2^{11}} = \frac{5^5}{2^{10} . 3}.$$

Ahora bien, esta fracción la podemos descomponer en dos factores conocidos:

$$x = \frac{5^5}{2^{10} . 3} = \frac{25}{24} \times \frac{125}{128}.$$

De modo que x = *mi♯ — fa♭* $= \frac{25}{24} : \frac{128}{125}$.

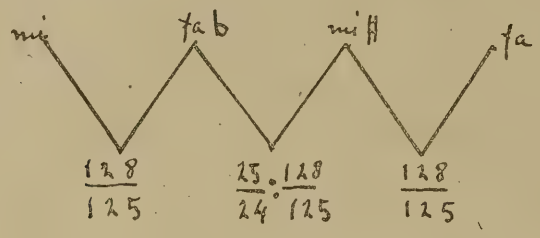
Esto es, una diferencia entre el *semitono cromático* menor $\frac{25}{24}$, y el *cuarto de tono* $\frac{128}{125}$.

Y esta diferencia, que es igual a $\frac{3125}{3072}$, es mayor que la unidad en $\frac{1}{58}$ aproximadamente; puede considerarse como un verdadero *cuarto de tono,* más pequeño que $\frac{128}{125}$.

Por tanto, tendríamos, recordando las fórmulas que expusimos en la cromatización de las gamas (fig. 6.ª).

Si quisiéramos continuar la serie de *quintas* ascendentes o descendentes, con *dobles sostenidos* y *dobles bemoles,* no conseguiríamos reducir más al intervalo *mi♯ — fa♭♭*, etc. Al

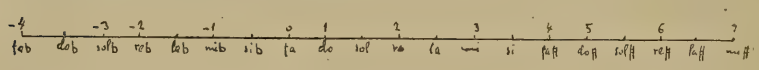
contrario, una doble bemolización añadiría un intervalo $\frac{25}{24}$ a la distancia *mi* ♯♯ — *fa* ♭.



(Figura 6.ª)

Análogamente, cuando se quiere prolongar la serie de *quintas* pitagóricas no se reduce más el intervalo *mi - fa*.

Sea, en efecto, el esquema



(Figura 7.ª)

Tendríamos la ecuación:

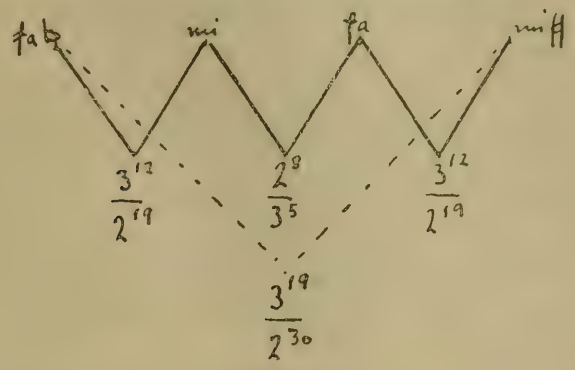
$$\frac{3^{19}}{2^{19}} = 2^{11} \times x; \text{ de donde } x = \frac{3^{19}}{2^{30}} = \frac{3^{12}}{2^{19}} \times \frac{3^{7}}{2^{11}}.$$

Y bajo esta forma se ve que el intervalo pitagórico *mi* ♯♯ — *fa* ♭ es igual a la *coma* pitagórica, aumentada en el *apótome*.

Teniendo en cuenta el esquema de cromatización pitagórica, se ve fácilmente: (fig. 8.ª).

En la fig. 8.ª se ve que, mucho más que en la gama toloméica, nos alejamos del *unísono* cuando queremos ampliar el ciclo del *temperamento*. Si quisiéramos llegar a los dobles sostenidos o bemoles, tendríamos que aumentar *apótomes*. Y es que se confirma con esto la idea que hemos adelantado ya: el *temperamento*, con su ciclo de generación de la gama, está contenido, como en una fórmula, en el valor de la *coma*. Así en la gama pitagórica el ciclo era de 12 *quintas*,

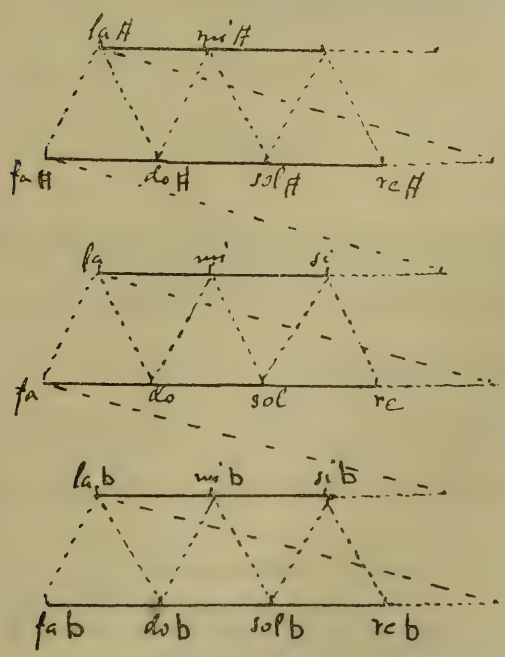
en la gama toloméica de 4 *quintas*. Pero ahora vamos a ver cómo la idea cíclica, tomada en otro sentido, da otra forma



(Figura 8.ª)

al temperamento sintónico, conservando la aplicación de la *coma*, aun cuando variando su lugar en alguna otra nota.

El esquema del temperamento sintónico va a ser éste:



(Figura 9.ª)

En efecto, así se ve el ciclo de las siete notas *naturales*, las siete *sostenidas* y las siete *bemolizadas*. Además, en esta forma no sólo aparecen los intervalos cromáticos a iguales distancias: *fa—fa♯ = do—do♯ = sol—sol♯ = &... = fa♭ — fa = do♭ — do... &*, tal como se ha entendido hasta ahora la cromatización, sino que quedan de manifiesto los intervalos de *tercera*, mayor y menor, constitutivos de los acordes fundamentales de la tonalidad: *do—mi—sol*; *fa—la—do*; *sol—si—re* &, &. Veamos, finalmente, para la gama sintónica el esquema de otra forma de temperamento, que pudiéramos llamar *científico*, de los *físicos*, o *acústico*, como dicen algunos autores.

No es otra cosa que la división de la escala en *tonos* mayores y menores y en *semitonos*, *diatónicos* y *cromáticos*, mayores y menores estos últimos. Tengamos en cuenta los fundamentos teóricos de la cromatización de las gamas; bastará que recordemos estas igualdades:

$$\textit{tono}\ \text{mayor} = \frac{9}{8} = \frac{16}{15}\ (\textit{semitono}\ \text{diatónico}) \times \frac{135}{128}\ (\textit{semitono}\ \text{crom. mayor.})$$

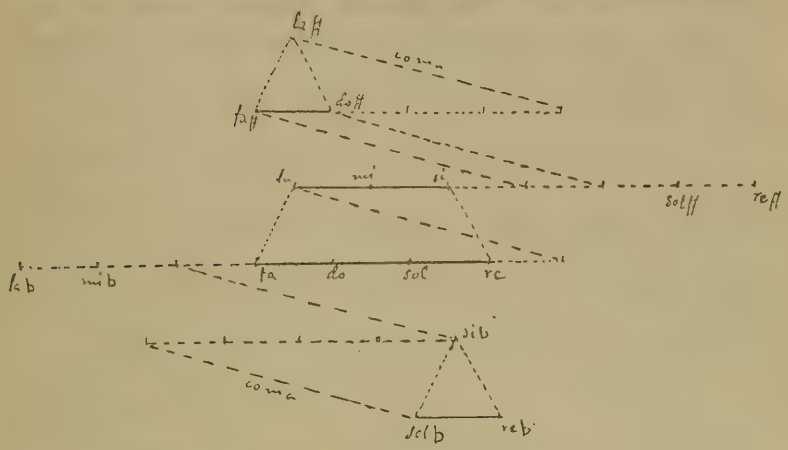
$$\textit{tono}\ \text{menor} = \frac{10}{9} = \frac{16}{15}\ (\textit{semitono}\ \text{diatónico}) \times \frac{25}{24}\ (\textit{semitono}\ \text{crom. menor.})$$

De esas igualdades dedujeron los *físicos* que el *sostenido*, o *bemol*, para los *tonos* mayores debía ser $\frac{135}{128}$, y para los *tonos* menores debía ser $\frac{25}{24}$.

Por tanto, el *fa♯*, *do♯*, *la♯* y el *sol♭*, *re♭*, *si♭* debían cromatizarse con el semitono $\frac{135}{128}$, y el *sol♯*, *re♯* y el *la♭*, *mi♭* debían serlo con el semitono menor $\frac{25}{24}$.

Pues bien, aplicando la teoría de nuestros esquemas a esta cromatización, resultará: (fig. 10).

Observando este esquema se ve su *simetría* respecto al acorde fundamental *do—mi - sol.* Pero no aparece la justi-



(Figura 10)

ficación armónica de esos dos *sostenidos* sueltos, *sol*♯, *re*♯; y esos dos *bemoles*, *la*♭, *mi*♭.

* * *

Con esto damos por terminada la demostración esquemática de los dos *temperamentos* históricos, pitagórico y toloméico, únicos que hasta hoy han imperado en la teoría cien tífica de la música. No nos detendremos en aplicar la demostración a las distintas modificaciones que se han hecho del temperamento sintónico [aparte de las fundamentales que hemos examinado] ni a las hipótesis, más bien que teorías de temperamentos científicos, apoyados en combinaciones numéricas, o en divisiones de los intervalos hechas sin atención alguna a la generación de la gama, y sí solamente a la graduación de la escala en partes iguales o desiguales. Pero antes de exponer la teoría del temperamento que proponemos, dediquemos algunas líneas a recoger la impresión

general acerca de la necesidad que se siente de la renovación. No consignaremos aquí, siguiendo nuestro propósito de condensar todo lo posible hechos e ideas, mas que datos culminantes tomados en fuentes de índole diversa, siempre que representen una corriente apreciable de opinión científica o artística.

El respetable maestro *Eslava,* en su tratado de *Armonía,* hizo constar que tenía la convicción de que, respecto a modulación, el arte había recibido todo el desarrollo de que era capaz el sistema musical. Y que había que esperar que algún genio de primer orden abriera alguna nueva fuente de modulación, si esto fuera posible, para poder admitirla.

En esa manifestación de un maestro de la didáctica musical se advierte—aparte de la ironía que puede caber en eso de esperar a un genio de primer orden, como cree Bretón (*) —, que si por un lado se afirma la evolución del arte hasta su plenitud, por otro parece que se reconoce la limitación de un sistema que así termina su capacidad de desarrollo, cuando todo arte progresa sin cesar si no hemos de negar la perfectibilidad de las facultades humanas, dentro, es claro, de lo finito de las mismas.

Concretándonos á la renovación del *temperamento, Bouasse* (**), que tan bien resume la obra de *Helmholtz,* formula así sus «conclusiones generales»: *los errores de la gama atemperada son realmente apreciables y desagradables para un oído justo;* a pesar de la poca *diferencia de los intervalos, es más fácil cantar justo siguiendo; la gama de Pitágoras no es sostenible ni en teoria ni en la práctica.*

Con esas conclusiones, y sabiendo que los instrumentos de sonidos fijos modernos tienen el *temperamento igual* a que se refiere *Bouasse,* y los de sonidos variables se acomodan al temperamento pitagórico, por la fácil generación de

(*) *La música en España.*
(**) *Bases phisiques de la musique* (1906).

las *quintas*, resulta que ni en la teoría ni en la práctica es sostenible el *temperamento* actual.

En una orquesta hay de todo—dice el *Dr. Anglas* (*)—: notas naturales, pitagóricas, atemperadas o simplemente falsas, y, por tanto, «la música es siempre, fatalmente, más o menos falsa». El prejuicio del temperamento y el hábito inconsciente de esta falsedad no puede menos de inducir al error a los ejecutantes.

Y el autor citado se lamenta de la escasez de *modos* musicales, de la ilusión de las *modulaciones*, de la posibilidad de nuevas tonalidades y matices, hoy entrevistos quizá sin alcanzarlos. Y desea resolver el problema aconsejando la variedad bien combinada del temperamento *zarliniano, pitagórico y atemperado.*

Estamos conformes con el distinguido autor de *Acústica* en la combinación de los temperamentos *zarliniano* y *pitagórico*, pero no lo estamos respecto al *temperamento igual.* Ya demostramos en otra parte la falsedad que encierra ese temperamento, que prescindiendo de todo principio artístico o científico de generación de la gama divide la *octava*, como un termómetro, en grados iguales, sin más objetivo que la comodidad de la *transposición* de *tonos.*

El *Congreso Internacional de Música* celebrado en París el año de 1900 acordó: «que el temperamento igual, en la *práctica*, no presenta ningún inconveniente y sí grandes ventajas bajo el aspecto de la *instrumentación*».

Por lo visto, en la cuestión *teórica* no quiso el *Congreso* dar su autorizada opinión tan explícita. Y ya merecía el asunto que un *Congreso* de esa importancia, elevando su punto de mira por encima de las ventajas de la *instrumentación*, resolviera sobre los graves inconvenienles *teóricos* de esa atemperación. Sin que esto quiera decir que no discutamos esas supuestas ventajas prácticas del temperamento igual.

(*) *Precis d'Acoustique* (1910).

En el mismo *Congreso* propuso un autor, *E. Ergo*, una reforma de la armonía, relacionada con la de la gama, según el sistema de *Riemann*.

Capellan, en la *Neue Zeistchrift fur Musik*, expone otra teoría distinta de la de *Riemann*.

Westerby, en la *Musical Asociation* de Londres, expone otra.

Odier, en Febrero de 1903, comunica a la *Academia de París* otro sistema nuevo.

Al ocuparse en este movimiento de renovación de la gama, *Guillemin* (*) dice que lo considera como lo del «movimiento perpetuo» o la «cuadratura del círculo».

Ya hemos hecho referencia, en págínas anteriores, a esta apreciación, que suponemos no será exclusiva de *Guillemin*. Pero en este respecto no hay que confundir dos cosas: una, el afán impremeditado de algunos innovadores, que en esto, como en todo, se lanzan a la revolución del orden establecido en un arte o en una ciencia, sin apoyo real en los principios artísticos que han de regenerar; y otra cosa es la necesidad generalmente sentida de un cambio de régimen, demostrada en ensayos bien meditados que, apoyados en las bases fundamentales del arte y de la ciencia, se exponen a la consideración de las autoridades en la materia. En la teoría todo el mundo está descontento—dice Guillemin—. Y es—añade—que se establecen las gamas apoyándose, no en *principios*, sino en *postulados*. Esos postulados «son legión». Muy pocos son enunciados explícitamente, la generalidad «se sobreentienden». Además son «falsos, insuficientes o incompatibles», y se les aplica «sin rigor y sin lógica», porque es imposible hacerlo de otra manera.

Hacemos nuestras las anteriores apreciaciones, fuertes, pero exactas, de *Guillemin*.

También las suscribiría el autor de una *Memoria* presen-

(*) Ob. cit.

tada al *Congreso Internacional de Música* de 1900, *Mr. Bandot*, sobre *la grave cuestión de los inconvenientes del temperamento musical*, en el que está basado, desde *Bach*, todo el arte moderno.

La historia de la gama es cambiante, progresiva, hasta el año 1739, fecha del *clavier temperé*—confiesa el mismo autor que hablaba de la «cuadratura del círculo» comparada con la invención de la verdadera gama—. ¿Por qué no ha de seguir evolucionando? ¿Es que se va a declarar para la música el *non plus ultra* del desarrollo técnico, en la gama y en el temperamento del siglo XVIII? ¿Hasta cuándo se va á imponer una comodidad práctica y hasta mecánica (véase el *Armonium* transpositor) a una necesidad teórica de la ciencia y del arte juntamente? La gama—dice *Combarieu*—es creación subjetiva de los músicos, y por otra parte se puede calificar de obra «natural» del instinto colectivo sometido a grandes influencias fisiológicas.

Nosotros diríamos más: no sólo influencias fisiológicas, sino principalmente psíquicas resultantes de la cultura, del medio ambiente y de la raza.

La gama en realidad – según el mismo *Combarieu*—es una ficción teórica, es como la «raíz» de las lenguas.

No discutiremos esa afirmación, que nos llevaría demasiado lejos, entrando en el campo de la lingüística y la filología. Sólo sí diremos, sin que sea una comparación que hayamos meditado mucho, que más bien nos parece la gama el *alfabeto* musical que no otra cosa.

Como la poesía con las palabras, la pintura con los colores..., la música tiene su alfabeto en el infinito sonoro—dice *Lavignac*—. Y no hay que extrañarse—añade—que «según las épocas, las civilizaciones, los gustos, los climas, los temperamentos, un gran número de gamas diferentes han existido y existen todavía.»

Como dato curioso respecto a supervivencia de las gamas, citaremos el caso *Duncan* en París. Es una familia de artis-

tas que viven a la griega. Han fundado escuela. Representan tragedias de *Sófocles* con música auténtica griega. Convencidos que el sistema armónico atemperado no puede fijar los ritmos y tonalidades de la voz humana practican la gama pitagórica. Y es notable ver al hermano mayor *R. Duncan*, musicógrafo entendido, que ha dado interesantes conferencias en Óxford y Cambridge, estudiando en su cuarto de trabajo del barrio Montrouge, de París, el *monocordio* de *Pitágoras.*

Y como dato bibliográfico, curioso también, prueba de lo que interesan actualmente estos estudios, citaremos la obra del español Bartolomé Ramos Pareja, reeditada en Leipzig en las *Publikationen der Internationalen Musikgessellschaff* (Breitkopt und Härtel).

Entremos ahora en materia exponiendo nuestra teoría del *temperamento dimensional.*

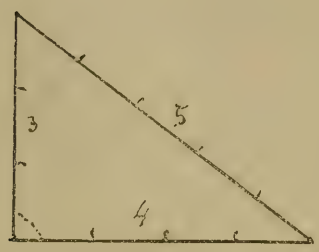
La noticia más antigua que tenemos de que se haya hablado de una manera vaga de las *dimensiones* del sonido es en las obras de *Porfirio* (filósofo alejandrino, nacido en Siria el año 333 después de Jesucristo), que desarrolló ideas de *Plotino. Ward,* en la *Encyclopedia Britannica,* art. *Psychologie: extensity* y *Stumpf* (*), tratan de una *simbólica espacial* de los sonidos altos y bajos. Nada de esto es nuestra demostración dimensional del temperamento.

L. Dauriac (**) dice que en los sonidos las palabras *espacial* y *simultáneo* son sinónimos. Y observando que en la *Overtura* de los *Maestros cantores,* de *Wagner,* marchan cuatro temas simultáneamente, dice que en metáfora se puede considerar un espacio sonoro de *cuatro dimensiones.* También hablaremos nosotros de sonidos de *tres dimensiones,* metafóricamente; pero no tenemos en cuenta para nada el número de temas simultáneos que en ellos aparecen.

(*) *Tonpsychologie* (Leipzig. 1883).
(**) *Essai sur l'Esprit Musical* (1904)

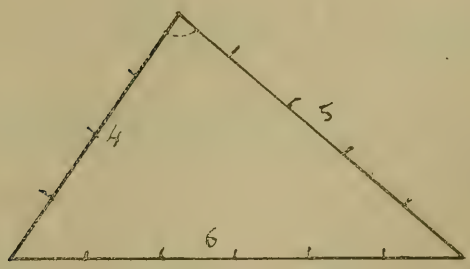
Otro autor, *Moreira de Sá*, en una *Memoria* presentada al Congreso Internacional de Londres, en 1911, habla de la posibilidad de presentar los acordes por figuras geométricas en esta forma:

Acorde $sol_1 - do_2 - mi_2$
» 3 — 4 — 5.



(Figura 11.)

Acorde $do_2 - mi_2 - sol_2$
» 4 — 5 — 6.

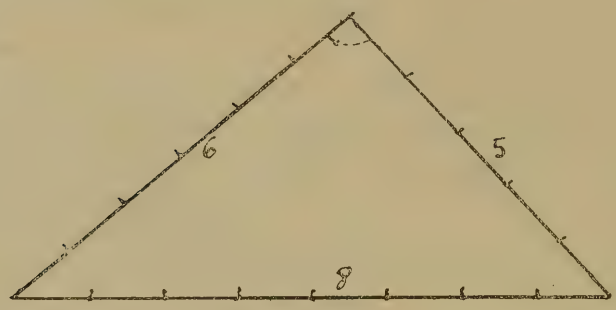


(Figura 12.)

Esta representación geométrica (figs. 11, 12 y 13) está fundada en el teorema elemental de triángulos, que dice: «El cuadrado de un lado en un triángulo es igual, menor o mayor que la suma de los cuadrados de los otros dos lados, según que el ángulo opuesto al primer lado sea recto, agudo u obtuso.»

Donde se ve que con el acorde perfecto do_2—mi_2—sol_2 se forma un triángulo *acutángulo;* con la inversión del mismo acorde sol_2—do_2—mi_2 se forma un triángulo *rectángulo,* y con la inversión mi_2—sol_2—do_3 un triángulo *obtusángulo.*

Acorde mi_2—sol_2—do_3
» 5 — 6 — 8.



(Figura 13.)

Aquí, como se ve, las longitudes de los lados en los triángulos están dadas en el sentido de *magnitud;* en nuestra teoría del temperamento la palabra *dimensión* tiene más bien un sentido *cualitativo,* de *dirección,* de modo de ser de la cantidad.

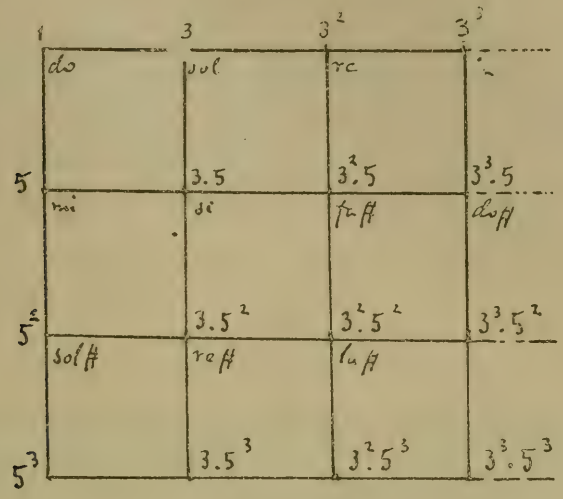
Gandillot, en su extensa obra sobre la gama (*), emplea también figuras de dos dimensiones *(cuadrados)* y de tres dimensiones *(cubos)* para la generación de las notas con los *armónicos* 3, 5 (en el primer caso) y 3, 5, 7 (en el segundo). Es una idea excelente que facilita de una manera notable la intuición de las relaciones numéricas entre las notas, posición de los intervalos y aparición de las *comas.*

El esquema de la figura de dos dimensiones, para la generación de la gama *trigena* que llama *Gandillot,* se reduce al siguiente: (fig. 14).

Es, como se ve, la generación por *quintas* y *terceras,* que

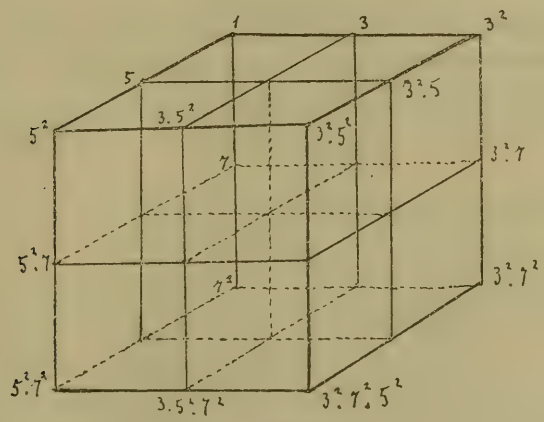
(*) *Essai sur la gamme* (París. *In-folio.* 1906)

llamaba *Rameau, progresiones geométricas, quíntuplas* y *triples.*



(Figura 14.)

Y el de la gama *tetrágena,* de tres dimensiones, es el siguiente:



(Figura 15.)

No copiamos mas que los números correspondientes a los vértices principales para no complicar la figura. El esquema,

como se ve, es una sencilla extensión de los cuadros de *Rameau* a un factor más: el 7.° armónico. Es como la tabla pitagórica de multiplicar en *tres dimensiones*. Esto no obsta para que la idea de esa formación de *números musicales*, como los llama *Gandillot*, y que no hemos visto utilizada por ningún otro autor antes que él, nos parezca excelente por las razones que hemos indicado antes, de facilitar extraordinariamente la visión intuitiva de los intervalos, distancias de comas, etc., etc.

***

Tiene, sin embargo, a nuestro juicio, esa representación por *paralelepípedos*, y lo mismo, aunque en grado inferior, la representación por *rectángulos*, dos deficiencias capitales.

La primera, que no aparecen en ella los *períodos* ó *ciclos* de formación de la gama; la segunda, que se complica muy pronto con el entrecruce de las líneas la situación de las notas. Y sobre todo no hemos visto en el autor de la notable y extensa obra sobre la gama *(Gandillot)*, ni en ningún otro, la demostración matemática de esa representación *dimensional* de los armónicos ni del *temperamento*. Esto es lo que va a ser objeto de nuestra atención en los siguientes párrafos.

Volvamos a la ecuación elemental que sirvió para establecer el temperamento pitagórico: $3^x = 2^y$.

Basta conocer las primeras nociones de Aritmética para saber que esa ecuación no tiene solución en números enteros para x y para y, por la sencilla razón de que los factores 3 y 2 son *primos entre sí*. El teorema aplicable aquí es el que dice: «todo número primo divisor de una potencia, divide también a la base». El factor *primo* 3 divide al primer miembro evidentemente, luego si la igualdad anterior se verificara para valores enteros de x e y, dividiría también a la

potencia 2^y, luego dividiría a la base 2, lo que no puede ser, por ser *primos entre sí* los dos números 2 y 3.

Pues bien, estas nociones tan elementales de Aritmética no se han tenido en cuenta por aquellos autores de la teoría científica de la música—como el mismo *Guillemin*—que razonan de este modo, a primera vista exacto. «No teniendo solución entera la ecuación $3^x = 2^y$, resulta que la *quinta*, $\frac{3}{2}$, y la *octava*, $\frac{2}{1}$, *no tienen medida común* y, por tanto, son *inconmensurables*, como lo son, en general, todos los intervalos justos.»

Al parecer el razonamiento es exacto y la aplicación de los términos también. Sin embargo, conduce a esta consecuencia absurda, que $\frac{3}{2}$ y $\frac{2}{1}$ son *inconmensurables*. Siendo así que la relación de esos números es ésta: $\frac{2}{1} \; \frac{3}{2} = \frac{4}{3}$. Esta relación, *cuatro tercios*, es perfectamente *conmensurable*.

Y conduce, por consiguiente, a esta otra consecuencia igualmente absurda: que los intervalos atemperados son *conmensurables*. Siendo así que todos ellos son potencias del *inconmensurable* $\sqrt[12]{2}$, es decir, que no hace conmensurable más que a la *octava* $= \left(\sqrt[12]{2}\right)^{12} = 2$.

Con razón dice claramente *Gandillot* que «el intervalo $\sqrt[12]{2}$ es *antimusical* porque es *inconmensurable*», y que «los intervalos atemperados, por ser *inconmensurables*, no corresponden a ninguna sensación musical».

¿Cómo explicar entonces esas inexactitudes en que incurren autores que deben sabe perfectamente, sin duda, lo que es un número inconmensurable y lo que no lo es?

Sencillamente porque confunden en sus razonamientos *potencias* con *productos*, *exponentes* con *factores*, *inconmen-*

surables con *primos entre sí, radicación con divisibilidad.* ¿Es explicable esta confusión? Sí; basta para ello aplicar la idea preconcebida del *savartio* a lo que no está preparado para el caso.

En efecto, en la ecuación $3^x = 2^y$, imposible de satisfacer para soluciones enteras, no se puede decir que 3 y 2 no tienen *medida común,* sino que no tienen *múltiplo,* mejor dicho, *potencia común,* es decir, que no hay ningún número P que sea al mismo tiempo la potencia x de 3 y la potencia y de 2.

Y lo mismo decimos de la ecuación

$$\left(\frac{3}{2}\right)^x = 2^{y-x} = \left(\frac{2}{1}\right)^z$$

que se obtiene de la anterior dividiendo los dos miembros por la potencia 2^x, y llamando z a la diferencia $y-x$.

Bajo esta última forma tampoco se debía decir que la *quinta* $\left(\frac{3}{2}\right)$ y la *octava* $\left(\frac{2}{1}\right)$ no tengan *medida común,* sino que no tienen *potencia común.*

Y ya no se puede decir que sean *inconmensurables* dos números que no tienen *potencia común,* sino que se debe decir que son *primos entre sí.* Por eso los intervalos fundamentales de la gama, basados en los factores 2, 3, 5, son *primos entre sí,* pero no *inconmensurables.*

Tomemos el *intervalo-unidad* $\sqrt[12]{2}$ llamado *Prony,* el *semitono* de la gama del *temperamento* igual, y tendremos, no que todos los intervalos se hacen *conmensurables,* como dice erróneamente *Guillemin,* sino que todos dejan de ser *primos entre sí,* todos hallarán fácilmente una *potencia común,* lo que no es ningún privilegio, a no ser que se entienda como tal el hacerse *inconmensurables,* en absoluto, todos ellos, y, por tanto, *antimusicales.*

En efecto, sea $\omega = \sqrt[12]{2}$.

Tendremos, no la ecuación, sino la *identidad* siguiente:

$$(\omega^7)^{12} = (\omega^{12})^7.$$

¿Qué quiere decir esa identidad, que puede plantearse sin más conocimientos matemáticos que *elevar a potencias* un número sucesivamente dos veces?

Pues quiere decir que la *quinta atemperada* (ω^7) y la *octava* (ω^{12}) tienen una *potencia común*. Es decir, que hay un número P = 128, que es la *potencia séptima* de 2, y al mismo tiempo es la *potencia duodécima* de ω^7, siendo este ω^7 la *quinta atemperada*. Pero la octava (2) y la *quinta atemperada son inconmensurables*. Porque ¿quién es ese número «excepcional» ω^7, que tiene una *potencia común* con la *octava?* Pues sencillamente

$$\sqrt[12]{128} = \sqrt[12]{2^7} = \left(\sqrt[12]{2}\right)^7.$$

Y sabido es que $\sqrt[12]{2}$, con todas sus *potencias* (no siendo la *duodécima,* que es la *octava* de la gama = 2), son *inconmensurables.*

Vengamos ahora a los *savartios,* a los *logaritmos,* para acabar de demostrar completamente dónde está la confusión a que antes hemos hecho referencia.

Octava atemperada = 301 *savartios; quinta atemperada* = 176,09. O lo que es igual: $7 \times 301 = 12 \times 176{,}09$.

Ya tienen un *múltiplo común* la *quinta* y la *octava* atemperadas (es decir, entiéndase bien, sus *logaritmos),* pero no dejan de ser *inconmensurables.*

Pongamos la igualdad anterior en esta forma más explícita:

$$7 \times \textit{log. octava} = 12 \times \textit{log. quinta}.$$

Y pasando a los antilogaritmos resulta

$$(octava)^7 = (quinta)^{12}.$$

Que se puede traducir así: la *octava* y la *quinta* atemperadas tienen una *potencia común,* y no son *primos entre sí.*

Queda demostrado que en ningún sentido es exacto hablar de *inconmensurables* aplicados a los intervalos naturales, formados con los numerosos primos 2, 3, 5, etc.; ni hablar de *conmensurables* aplicado a los intervalos atemperados formados con las potencias del número $\sqrt[12]{2}$.

Tosca (*) definía la concordancia: «mixtura de sones brevemente conmensurables» en el mismo sentido que *Saveur*: «coincidencia de vibraciones a intervalos regulares y muy cortos». Es decir, que ambos se refieren a una *conmensurabilidad,* que es lo que hemos explicado con una *con-multiplicidad,* o mejor como una *con-potencialidad,* si nos es permitido expresar así.

(*) *Compendio Mathemático* (Valencia, 1757).

(Continuará.)

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXIV.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia duodécima 549

XXV.—Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia) (continuación), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 574

XXVI.—Neurópteros nuevos de España, por el *R. P. Longinos Navás, S. J*..... 593

XXVII.—Sobre la teoría científica de la música, por *Juan Domínguez Berrueta*..... 602

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, 1,50 pesetas.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

FEB 1926
National Museum

TOMO XIV.—NÚMERO 10.
ABRIL DE 1916

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXVIII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimatercera.

SEÑORES:

Hemos terminado de estudiar en la última conferencia el sexto problema de la serie de problemas elementales en que dividimos cada ejemplo de los que vamos tratando.

Hemos establecido la condición analítica necesaria y suficiente para que la distribución de velocidades, tanto de traslación como de giro, se conserve la misma en los dos sistemas de discos que suponíamos en este ejemplo; necesaria y suficiente, repetimos, para que se conserve constante esta distribución, a pesar de los choques.

Y penetrando cada vez un poco más en el problema y en su complicación, *veíamos* en cierto modo, hasta donde puede *verse*, esta agitación *estadística;* y una vez más empleamos dicho adjetivo, tan socorrido para expresar conceptos que de otro modo no pueden expresarse. Vimos aún cómo para cada conjunto de pares de discos comprendidos en los límites l, L, Δ, que desaparecían por los choques, aumentaba otro conjunto igual de pares de discos comprendidos en los límites l', L', Δ'; pero a la vez un número de discos igual a este último se convertía por la acción de los choques en un número de pares igual a los que habían desaparecido del primer conjunto.

Esto lo hacíamos como artificio para la demostración; pero

se tiene la intuición de que esto debe suceder en la realidad.

Y esto explica cómo la ecuación a que llegamos es condición necesaria y suficiente para que el equilibrio de distribución de velocidades se mantenga.

Veamos ahora cómo de la ecuación que hemos obtenido, y que es la siguiente:

$$C\chi(u, v, \omega)\chi_1(U, V, \Omega)\partial u\,\partial v\,\partial\omega\,\partial U\,\partial V\,\partial\Omega\,\partial y$$
$$\big(u - U - (p\omega - P\Omega)\big)\partial t = C\chi(u', v', \omega')$$
$$\chi_1(U', V', \Omega')\,\partial u'\,\partial v'\,\partial\omega'\,\partial U'\,\partial V'\,\partial\Omega'\,\partial y\big(U' - u' -$$
$$- (P\Omega' - p\omega')\big)$$

se deducen las formas de χ y χ_1.

Pasemos, pues, al problema siguiente de la serie que periódicamente vamos repitiendo para todos los problemas que estudiamos.

7.° En este séptimo problema nos proponemos determinar, mediante la ecuación precedente, la forma de las funciones χ, que expresan para cada sistema lo que hemos llamado densidad de velocidades, función fundamental en esta teoría de la cinemática, porque nos da la ley de variación y la ley de distribución de las velocidades de los discos o elementos que en un espacio dado se agitan.

La última ecuación que hemos escrito puede simplificarse inmediatamente suprimiendo factores iguales en ambos miembros.

Podemos suprimir en primer lugar la constante C.

Podemos suprimir $\partial v, \partial v'$, porque como el choque es paralelamente al eje de las x, las componentes paralelas al eje de las y no varían. Y otro tanto podemos observar respecto a ∂V y $\partial V'$. En suma, podemos suprimir

$$\partial v = \partial v', \partial V = \partial V'.$$

Igual supresión podemos efectuar respecto a ∂y, porque la altura del rectángulo elemental no varía ni antes ni después del choque.

Y por último, como las velocidades relativas en la línea de los centros, hemos demostrado, que son iguales y de signos contrarios, podremos suprimir también los factores

$$\left(u - U - (p\omega - P\Omega) \right) \partial t \text{ y } \left(U' - u' - (P\Omega' - p\omega') \right) \partial t.$$

Efectuadas todas estas supresiones, la ecuación precedente queda reducida a esta forma sencilla, análoga a la que siempre venimos obteniendo:

$$(1) \qquad \chi(u, v, \omega)\, \chi_1(U, V, \Omega)\, \partial u\, \partial \omega\, \partial U\, \partial \Omega = \\ = x(u', v', \omega')\, \chi_1(U', V', \Omega')\, \partial u'\, \partial \omega'\, \partial U'\, \partial \Omega'.$$

Y el problema se plantea de este modo:

Determinar la forma que han de tener y que es suficiente que tengan χ y χ_1, para que la ecuación precedente se convierta en una identidad, sean cuales fueren los valores de u, ω, U y Ω, sabiendo que u', ω', U', Ω', están determinadas por la teoría del choque mediante las fórmulas que obtuvimos en la conferencia última.

Y aun de estas cinco fórmulas a que nos referimos basta que tengamos en cuenta la última, como nos ha demostrado la experiencia y como vamos a ver inmediatamente.

Al referirnos a la última fórmula, nos referimos, en rigor, a la que expresa la igualdad de las fuerzas vivas antes y después del choque, que era ésta

$$(2) \quad m(u^2 + v^2 + k^2\omega^2) + M(U^2 + V^2 + K^2\Omega^2) = \\ = m(u'^2 + v'^2 + k^2\omega'^2) + M(U'^2 + V'^2 + K^2\Omega'^2).$$

Las ecuaciones (1) y (2) son, pues, las ecuaciones del problema, problema análogo, como recordarán mis alumnos, al que hemos resuelto en los dos primeros ejemplos.

Pero antes de pasar adelante vamos a simplificar la ecuación (1).

Aparece esta ecuación como una transformación de coordenadas.

En el primer miembro están las coordenadas u, v, ω, U, V, Ω.

En el segundo miembro las coordenadas u', v', ω', U', V', Ω', y en uno y otro miembro las diferenciales respectivas de estas coordenadas.

Y aun podría, *a priori*, interpretarse esta ecuación de este modo, si no fuera porque no es evidente que la χ y χ_1 del primer miembro se hubiera de transformar en la χ y χ_1 del segundo miembro, al sustituír las coordenadas u, v... por las u', v' ...

Pero dejando esto aparte, porque precisamente en esto hemos de fundarnos para determinar la forma de χ y χ_1, fijémonos por ahora en las diferenciales, y el problema se plantea de este modo: Transformar el producto

$$\partial u \, \partial \omega \, \partial U \, \partial \Omega$$

en un producto que contenga

$$\partial u' \, \partial \omega' \, \partial U' \, \partial \Omega',$$

teniendo en cuenta las ecuaciones que enlazan unas variables con otras, es decir, teniendo en cuenta las cuatro ecuaciones que antes hemos obtenido

$$(2') \qquad \begin{aligned} u' &= u - \frac{I}{mD}\left\{u - U - p\omega + P\Omega\right\} \\ U' &= U + \frac{J}{MD}\left\{u - U - p\omega + P\Omega\right\} \end{aligned}$$

$$(2') \quad \begin{aligned} \omega' &= \omega + \frac{p}{mk^2 D}\left\{u - U - p\omega + P\Omega\right\} \\ \Omega' &= \Omega - \frac{P}{MK^2 D}\left\{u - U - p\omega + P\Omega\right\} \end{aligned}$$

Pero hemos demostrado en las conferencias del curso de 1910 a 1911 (pág. 138) que entre el producto de unas diferenciales y otras, por ejemplo, de las posteriores al choque con relación a las anteriores, se tiene

$$(3) \quad \partial u' \partial \omega' \partial U' \partial \Omega' = \frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)} \partial u \partial \omega \partial U \partial \Omega,$$

representando el coeficiente del segundo miembro la determinante funcional de u' ω' ... con relación a la u, ω ...

Es decir, que la fórmula a que hemos llegado antes puede escribirse de este modo:

$$\chi(u, U, \omega)\chi_1(U, V, \Omega)\partial u \partial \omega \partial U \partial \Omega =$$
$$= \chi(u', v', \omega')\chi_1(U', V', \Omega') \frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)} \partial u \partial \omega \partial U \partial \Omega.$$

Sustituyendo en (1) el valor (3).

Y todo queda reducido a determinar, mediante las ecuaciones (2'), el valor de la determinante funcional.

Pero desarrollando ésta, según su definición, tendremos:

$$\frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial u'}{\partial u}, & \frac{\partial \omega'}{\partial u}, & \frac{\partial U'}{\partial u}, & \frac{\partial \Omega'}{\partial u} \\ \frac{\partial u'}{\partial \omega}, & \frac{\partial \omega'}{\partial \omega}, & \frac{\partial U'}{\partial \omega}, & \frac{\partial \Omega'}{\partial \omega} \\ \frac{\partial u'}{\partial U} & \frac{\partial \omega'}{\partial U} & \frac{\partial U'}{\partial U} & \frac{\partial \Omega'}{\partial U} \\ \frac{\partial u'}{\partial \Omega}, & \frac{\partial \omega'}{\partial \Omega}, & \frac{\partial U'}{\partial \Omega}, & \frac{\partial \Omega'}{\partial \Omega} \end{vmatrix}$$

luego sólo falta sustituir en vez de estas derivadas sus valores deducidos de las ecuaciones (2'), y tendremos:

$$\frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)} = \begin{vmatrix} 1 - \frac{1}{mD}, & \frac{p}{mk^2 D}, & \frac{1}{MD}, & \frac{-P}{MK^2 D} \\ \frac{p}{mD}, & 1 - \frac{p^2}{mk^2 D}, & \frac{-p}{MD}, & \frac{Pp}{MK^2 D} \\ \frac{1}{mD}, & \frac{-p}{mk^2 D}, & 1 - \frac{1}{MD}, & \frac{P}{MK^2 D} \\ -\frac{P}{mD}, & \frac{pP}{mk^2 D}, & \frac{P}{MD}, & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix}$$

Multiplicando la primera línea horizontal por p y agregando a ella la segunda línea, tendremos, poniendo fuera de la determinante $\frac{1}{p}$ para compensar la multiplicación por p

$$\frac{1}{p} \begin{vmatrix} p, & 1, & o, & o \\ \frac{p}{mD}, & 1 - \frac{p^2}{mk^2 D}, & \frac{-p}{MD}, & \frac{Pp}{MK^2 D} \\ \frac{1}{mD}, & \frac{-p}{mk^2 D}, & 1 - \frac{1}{MD}, & \frac{P}{MK^2 D} \\ \frac{-P}{mD}, & \frac{pP}{mk^2 D}, & \frac{P}{MD}, & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix}$$

Restando de la segunda línea horizontal la tercera multiplicada por p tendremos, dividiendo a la vez por p fuera de la determinante y sacando la p de la tercera línea

$$\frac{1}{p} \begin{vmatrix} p, & 1, & o, & o \\ o, & 1, & -p, & o \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{mD}, & \frac{-p}{mk^2 D}, & 1 - \frac{1}{MD}, & \frac{P}{MK^2 D} \\ \frac{-P}{mD}, & \frac{pP}{mk^2 D}, & \frac{P}{MD}, & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix}$$

Por fin agregando a la tercera línea horizonal, después de multiplicada por P, la cuarta línea, hallaremos, cuidando de dividir fuera por P

$$\frac{1}{pP}\begin{vmatrix} p, & 1, & o & o \\ o, & 1, & -p & o \\ o, & o, & P & 1 \\ -\frac{P}{mD}, & \frac{pP}{mk^2 D}, & \frac{P}{MD} & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix}$$

Desarrollando en determinantes por la primera horizontal:

$$\frac{1}{pP}\, p \begin{vmatrix} 1, & -p, & o \\ o, & P, & 1 \\ \frac{pP}{mk^2 D}, & \frac{P}{MD}, & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{pP} \begin{vmatrix} o, & -p, & o \\ o, & P, & 1 \\ -\frac{P}{mD}, & \frac{P}{MD}, & 1 - \frac{P^2}{MK^2 D} \end{vmatrix}$$

y desarrollando ambas determinantes por la primera horizontal cada una

$$\frac{1}{P}\begin{vmatrix} P\ , & 1 \\ \frac{P}{MD}, & 1-\frac{P^2}{MK^2D} \end{vmatrix} + \frac{p}{P}\begin{vmatrix} o\ , & 1 \\ \frac{pP}{mk^2D}, & 1-\frac{P^2}{MK^2} \end{vmatrix} -$$

$$-\frac{1}{P}\begin{vmatrix} o\ , & 1 \\ \frac{-P}{mD}, & 1-\frac{P^2}{MK^2D} \end{vmatrix}$$

o bien

$$\frac{1}{P}\left[P-\frac{P^3}{MK^2D}-\frac{P}{MD}-\frac{p^2P}{mk^2D}-\frac{P}{mD}\right]$$

que se reduce a

$$1-\frac{P^2}{MK^2D}-\frac{1}{MD}-\frac{p^2}{mk^2D}-\frac{1}{mD}.$$

Recordando el valor de D, que era éste

$$D=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{m}+\frac{1}{M}+\frac{p^2}{mk^2}+\frac{P^2}{MK^2}\right),$$

de donde se deduce

$$2=\frac{1}{mD}+\frac{1}{MD}+\frac{p^2}{mk^2D}+\frac{P^2}{MK^2D},$$

y sustituyendo en el valor de la determinante el conjunto de los últimos términos, el valor numérico de dicha determinante será

$$1-\frac{P^2}{MK^2D}-\frac{1}{MD}-\frac{p^2}{mk^2D}-\frac{1}{mD}=$$
$$=1-2=-1.$$

Tendremos, por tanto,

$$\frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)} = -1 .$$

Pero el signo — importa poco, porque ya anticipamos diciendo que esta determinante había que tomarla con signo positivo, o sea que había que tomar el módulo de la determinante y el módulo de — 1 es 1.

Así, pues, la fórmula

$$\chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega)\,\partial u\,\partial\omega\,\partial U\,\partial\Omega =$$
$$= \chi(u', v', \omega')\,\chi_1(U', V'\,\Omega')\,\frac{\partial(u', \omega', U', \Omega')}{\partial(u, \omega, U, \Omega)}\,\partial u\,\partial\omega\,\partial U\,\partial\Omega$$

se convertirá, poniendo en vez de la determinante funcional la unidad, en esta otra

$$\chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega)\,\partial u\,\partial\omega\,\partial U\,\partial\Omega =$$
$$= \chi(u'\,v'\,\omega')\,\chi_1(U'\,V'\,\Omega')\,\partial u\,\partial\omega\,\partial U\,\partial\Omega,$$

y dividido por $\partial u\,\partial\omega\,\partial U\,\partial\Omega$ quedará por fin

$$\chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega) = \chi(u', v', \omega')\,\chi_1(U', V', \Omega').$$

Esta es la ecuación de la cual vamos a deducir la forma de las funciones χ, χ_1.

8.° El método para deducir de la ecuación precedente la forma propia de las funciones χ y χ_1 que, como siempre, resulta ser la forma exponencial, no es más que la repetición del mismo procedimiento lógico que hemos empleado en los ejemplos anteriores.

Por eso Mr. Watson, en el tratado elemental que nos sirve de guía en una parte de esas conferencias, lo suprime del todo y escribe inmediatamente el resultado.

Pero en estas conferencias, que están consagradas casi ex-

clusivamente a la enseñanza, las repeticiones no perjudican, y mucho más en el presente caso, en que hemos de decir algo que hasta ahora no hemos tenido ocasión de explicar.

De suerte que, siendo el método en el fondo el mismo que hemos aplicado en otras ocasiones, nos vemos obligados, por razones de claridad, a introducir en él algunas variantes.

La ecuación de que hemos de partir es la que acabamos de hallar:

$$(1') \quad \chi(u, v, \omega)\,\chi_1(U, V, \Omega) = \chi(u', v', \omega')\,\chi_1(U', V', \Omega'),$$

a la cual debemos unir esta otra, como ya hemos explicado,

$$(2') \quad m(u^2 + v^2 + k^2\omega^2) + M(U^2 + V^2 + K^2\Omega^2) =$$
$$= m(u'^2 + v'^2 + k^2\omega'^2) + M(U' + V'^2 + K^2\Omega'^2),$$

que expresa la constancia de las fuerzas vivas a pesar del choque entre cada dos discos *o*, *O*.

Pero en las ecuaciones (1′) y (2′) conviene introducir algunas modificaciones.

La expresión

$$\chi(u, v, \omega),$$

que vamos a determinar, y que depende de u, v, ω, claro es que si depende de u dependerá de u^2, y si depende de v dependerá de v^2, porque podrá evidentemente escribirse de este modo

$$\chi\left(\sqrt{u^2}, \sqrt{v^2}, \omega\right)$$

y representado por ψ la forma

$$\chi\left(\sqrt{\ }, \sqrt{\ }, \omega\right)$$

tendremos

$$\text{densidad de velocidades} = \chi\,(u^2, v^2, \omega).$$

Respecto a ω, nada decimos por ahora, porque la velocidad de rotación no es de la misma naturaleza que las componentes de la velocidad de traslación.

Más aun, la función χ depende, no de u^2 y v^2 aisladamente, sino de su suma $u^2 + v^2$, como hemos visto en los ejemplos anteriores, pues la densidad de velocidades no depende de la orientación de éstas, y será la misma, sea cual fuere el eje que se elija como eje de las x, mientras $u^2 + v^2$, que representaremos, como otras veces, por c^2, tenga el mismo valor numérico.

Basta para convencerse de ello elegir para eje de las x la dirección de la velocidad c. La velocidad, según el eje de las y, será en este caso *cero*, y dicha función de densidades x podrá escribirse en esta forma:

$$\psi\,(u^2 + v^2, \omega) = \psi\,(c^2, \omega).$$

Todavía podemos transformar esta función, porque puede escribirse de este modo:

$$\psi\,(c^2, \omega) = \psi\left(\frac{1}{m}\, m\, c^2, \omega\right).$$

De suerte que, en rigor, la función de que se trata es función de $m\,c^2$.

Si para no acumular notaciones continuamos representando por ψ esta función, tendremos

$$\chi\,(u, v, \omega) = \psi\,(m\,c^2, \omega).$$

Y así hemos introducido la fuerza viva, que por experiencia de los ejemplos anteriores, podemos prever que entrará en la fórmula final, si bien no representa en este caso mas

que una parte de la fuerza viva: la del movimiento de traslación.

Repitiendo estas mismas consideraciones podemos poner la función χ_1 bajo la forma

$$\chi_1 (U, V, \Omega) = \psi_1 (M C^2, \Omega)$$

en que C estará dada, como sabemos, por

$$C^2 = U^2 + V^2.$$

Repitiendo una vez más los razonamientos que preceden para los valores de las velocidades posteriores al choque y adoptando notaciones análogas a las de siempre, tendremos

$$\chi (u', v', \omega') = \psi (mc'^2, \omega')$$
$$\chi_1 (U', V' \Omega') = \psi_1 (MC'^2, \Omega')$$

Introduciendo estas nuevas funciones en la ecuación fundamental (1′), resultará:

$$(1'') \qquad \psi (mc^2, \omega) \psi_1 (M C^2, \Omega) = \\ = \psi (mc'^2, \omega') \psi (MC'^2, \Omega').$$

Una transformación, en armonía con la precedente, podemos introducir en las ecuaciones de la fuerza viva (2′), que se transformará en ésta:

$$(2'') \qquad mc^2 + mk^2 \omega^2 + MC^2 + MK^2 \Omega^2 = \\ = mc'^2 + mk^2 \omega'^2 + MC'^2 + MK^2 \Omega'^2.$$

Las ecuaciones (1″) y (2″) son ahora las ecuaciones del problema.

La (1″), teniendo en cuenta la (2″), ha de convertirse en una identidad; de modo que todas las variables que contiene, las c, C... pueden considerarse como variables indepen-

dientes, y sean cuales fueren sus valores, la ecuación (1″ ha de reducirse a una identidad $0 = 0$.

Con esta condición hemos de determinar la forma de las funciones de ϕ.

O de otro modo. ¿Qué forma han de tener las funciones ϕ para que la ecuación (1″) sea una identidad?

Fijémonos en la función ϕ, y en ella en la variable c, y prescindamos de la variable ω, de la cual más adelante nos ocuparemos.

Por ahora consideraremos a ω, Ω, ω', Ω' como constantes.

Y todavía, y por último, para simplificar este pequeño cálculo, representaremos con una sola letra mc^2 y MC^2; haremos, pues:

$$mc^2 = z,\ MC^2 = Z$$
$$mc'^2 = z',\ MC'^2 = Z',$$

con lo cual las ecuaciones (1″) y (2″) podrán escribirse así:

$$(a) \ldots\ldots \phi(z, \omega)\, \phi_1(Z, \Omega) = \phi(z', \omega')\, \phi(Z', \Omega')$$
$$(b) \ldots\ldots z + mk^2\omega^2 + Z + MK^2\Omega^2 = z' + mk'^2\omega'^2 + Z' + MK^2\Omega'^2.$$

Si nos fijamos en la función ϕ, deberemos considerar a z como una variable independiente, y en la ecuación (a) consideraremos a Z' como una función de z determinada por la ecuación (b).

Puesto que la ecuación (a) es una identidad, claro es que diferenciando

$$\phi(z, \omega)\, \phi_1(Z, \Omega) - \phi(z', \omega')\, \phi_1(Z', \Omega') = 0,$$

con relación a z, el resultado debe ser *cero*, porque el primer miembro no debe depender de z; pero al efectuar esta

diferenciación no ha de olvidarse que consideramos a Z' como función de z.

Y esta hipótesis es legítima, porque habiendo de ser una identidad (a), cualquiera de sus derivadas con relación a cualquiera de sus variables debe ser *cero*, y estas variables están enlazadas únicamente por la ecuación (b), toda vez que nos conviene enlazar z con Z'.

Más claro: en la ecuación (a) tenemos cuatro variables, z, Z, z', Z', que están en rigor enlazadas por dos ecuaciones que son las (1″) (2″) cuando en ellas se sustituyen z, Z, z', Z' a u, U, u', U'. Dos de ellas, por ejemplo, z y z', podemos considerarlas como independientes. En cambio, Z y Z' las consideraremos como dependientes de z y z'.

Habrá que eliminar en (a) Z y Z' en función de z y z'. Pues supongamos Z constante; es, si se quiere, un caso particular, y en este caso veremos cuál debe ser la forma de ψ.

No quedará mas que eliminar Z' en función de z.

Pero como (a), una vez hecha esta eliminación, es una identidad, la z debe eliminarse por sí: lo cual significa que debe desaparecer la z. Luego la derivada con relación a z debe ser nula, que es la condición que vamos a expresar.

Diferenciando, tendremos, pues,

$$\frac{\partial \psi(z, \omega)}{\partial z} \psi_1(Z, \Omega) = \psi(z', \omega') \frac{\partial \psi_1(Z', \Omega')}{\partial Z'} \cdot \frac{\partial Z'}{\partial z}$$

Pero la ecuación (b) da, puesto que las únicas variables son z y Z',

$$\partial z = \partial Z',$$

o bien

$$\frac{\partial Z'}{\partial z} = 1;$$

luego la ecuación precedente se convertirá en

$$\frac{\partial \psi(z, \omega)}{\partial z} \psi_1(Z, \Omega) = \psi(z', \omega') \frac{\partial \psi_1(Z', \Omega')}{\partial Z'}.$$

Y dividiendo esta ecuación, miembro a miembro, por la ecuación (a), tendremos:

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(z, \omega)}{\partial z}}{\psi(z, \omega)} = \frac{\dfrac{\partial \psi_1(Z', \Omega')}{\partial Z'}}{\psi_1(Z', \Omega')}$$

Ahora bien, ya que ambos miembros tienen el mismo valor, y éste debe ser el mismo para todos los valores de z, Z', ω, Ω', es claro que será una constante.

Y representando esta constante como siempre por $-h$, y ponemos el signo menos por la misma razón que en los ejemplos precedentes, podremos dividlr la ecuación anterior en otras dos en que ya estarán separadas las funciones ψ y ψ_1, y que nos servirá para determinar la forma de ambas.

No la forma total, porque nada hemos dicho de ω y Ω; pero al menos la forma con relación a z y a Z', que es lo mismo que decir la forma de ψ y ψ_1.

Podemos, pues, escribir

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(z, \omega)}{\partial z}}{\psi(z, \omega)} = -h; \frac{\dfrac{\partial \psi_1(Z', \Omega')}{\partial Z'}}{\psi_1(Z', \Omega')} = -h,$$

que son ecuaciones diferenciales que, integrándolas, nos determinarán la forma de ψ y ψ_1.

Consideremos la primera, y tendremos

$$\frac{\dfrac{\partial \psi(z, \omega)}{\partial z}}{\psi(z, \omega)} = -h;$$

o bien

$$\frac{\partial \psi(z, \omega)}{\psi(z, \omega)} = -h\partial z.$$

e integrando y poniendo la constante bajo forma de un logaritmo,

$$\log. \psi(z, \omega) = -hz + \log. H;$$

o bien,

$$\log. \frac{\psi(z, \omega)}{H} = -hz.$$

Y pasando a las exponenciales

$$\frac{\psi(z, \omega)}{H} = e^{-hz}$$

de donde

$$\psi(z, \omega) = He^{-hz}.$$

Pero H es una constante de la integración, que contendrá naturalmente las constantes que entraban en la ecuación diferencial, luego H será una función de ω, y tendremos

$$\varphi(z, \omega) = H(\omega)\, e^{-hz}.$$

Análogamente, la ecuación diferencial

$$\frac{\dfrac{\partial \psi_1(Z', \Omega)}{\partial z'}}{\psi_1(Z', \Omega')} = -h$$

dará

$$\psi_1(Z', \Omega') = H_1(\Omega')\, e^{-hZ'}.$$

Y repitiendo este mismo razonamiento para z' y Z, pero

introduciendo la constante h', distinta de h, porque hasta ahora no hay motivo para suponer que sean iguales, hallaremos

$$\psi(z,'\omega') = H(\omega')\, e^{-h'z'}$$
$$\psi_1(Z,\Omega) = H_1(\Omega)\, e^{-h'Z}.$$

Las funciones H y H_1 se conservan como antes, porque corresponden a ψ y ψ_1 respectivamente; sustituyendo estos cuatro valores de ψ y ψ_1 en la ecuación fundamental (a) se obtiene

$$H(\Omega)\, e^{-hz}\, H_1(\Omega)\, e^{-h'Z} = H(\omega')\, e^{-h'z'}\, H_1(\Omega')\, e^{-hZ'}$$

o bien

$$e^{-hz-h'Z}\, H(\omega)\, H_1(\Omega) = H(\omega')\, H_1(\Omega')\, e^{-h'z-hZ'}.$$

Y sustituyendo por z, z', Z, Z' los valores primitivos

$$z = mc^2,\ z' = mc'^2,\ Z = MC^2,\ Z' = MC'^2$$
$$e^{-hmc^2-h'MC^2}\, H(\omega)\, H_1(\Omega) = e^{-hmc'^2-h'MC'^2}$$
$$H(\omega')\, H_1(\Omega').$$

Ya está determinada la forma de las funciones ψ y ψ_1 respecto a las variables c y C, c' y C'.

Empleando exactamente el mismo método podemos determinar su forma respecto a ω y ω', Ω y Ω', o si se quiere la forma de las funciones H y H_1.

Pero antes hemos de transformar estas funciones de una manera análoga a la que empleamos para las variables u, U...

Consideremos la función $H(\omega)$.

Claro es que puede ponerse bajo la forma

$$H(\omega) = H\left(\sqrt{\omega^2}\right)$$

o bien conservando la misma letra H para no multiplicar las notaciones, aunque es claro que debía ser distinta,

$$H(\omega^2)$$

que a su vez puede escribir de este modo

$$H\left(\frac{1}{mk^2}\, mk^2\omega^2\right)$$

y en último resultado la función sólo dependerá directamente de $mk^2\omega^2$, porque el factor $\frac{1}{mk^2}$ es una constante.

De suerte que conservando la misma letra H, aunque realmente debiéramos cambiarla, podremos sustituir

$$\text{a } H(\omega) \;\ldots\ldots\; \text{la forma} \;\ldots\ldots\; H(mk^2\omega^2)$$

y análogamente

$$\begin{aligned} &\text{a } H(\omega') \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; H(mk^2\omega'^2) \\ &\text{a } H_1(\Omega) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; H(MK^2\Omega^2) \\ &\text{a } H_1(\Omega^1) \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\; H(MK^2\Omega'^2) \end{aligned}$$

con lo cual la ecuación fundamental que hemos de convertir en identidad podrá expresarse de este modo:

$$\begin{aligned} &e^{-hmc^2-h'MC^2}\, H(mk^2\omega^2)\, H_1(MK^2\Omega^2) = \\ &= e^{-hmc'^2-h'MC'^2}\, H(mk^2\omega'^2)\, H_1(mK^2\omega'^2). \end{aligned}$$

Para este caso las exponenciales son como constantes, puesto que las z, z' Z, Z' se refieren a las variables c, C... o a las primitivas u, u'... y la nueva ecuación se refiere en cambio a las variables $\omega, \omega', \Omega, \Omega'$.

Si para simplificar la escritura dividimos los dos miem-

bros por la exponencial del segundo y si hacemos, con objeto de abreviar

$$\frac{e^{-hmc^2-h'MC^2}}{e^{-hmc'^2-h'MC'^2}}=L$$

la ecuación precedente se convertirá en esta otra

$$LH(mk^2\omega^2)\,H_1(MK^2\Omega^2)=H(mk^2\omega'^2)\,H_1(mk^2\Omega'^2),$$

que todavía, para simplificar notaciones, puede escribirse bajo esta forma:

$$LH(s)\,H_1(S)=H(s')\,H_1(S')$$

que es exactamente igual, salvo la constante L, a la ecuación que antes obtuvimos en z, z', Z, Z' con la notación s ... en vez de la notación z ...

Para la aplicación a este caso del método que hemos seguido tenemos todavía que transformar la ecuación de las fuerzas vivas, que era ésta:

$$mc^2+mk^2\tilde{\omega}^2+MC^2+MK^2\Omega=$$
$$=mc'^2+mk^2\omega'^2+MC'^2+MK^2\Omega',$$

que introduciendo en ella las nuevas notaciones se convertirá en

$$mc^2+MC^2+s+S=mc'^2+MC'^2+s'+S'.$$

Ahora tendríamos que diferenciar la ecuación que ha de convertirse en identidad respecto a s, considerando a S' como función de s por virtud de la última ecuación, y dividiendo dicha ecuación por la primitiva, tendremos una ecuación incidencial exactamente de la misma forma en s ..... que la que habiamos obtenido antes en z' .....

La integraremos así como las análogas, introduciendo las

mismas constantes — h, — h', y, como luego veremos, poco importaría que fuesen distintas.

Pero en este caso claro es que en vez de las constantes H y H_1 tendremos que introducir constantes absolutas que no dependerán de ninguna de las variables del problema, y de este modo hallaremos

$$H(s) = A e^{-hs}, \quad H(s') = A e^{-h's'}$$
$$H_1(S) = A_1 e^{-h'S}, \quad H_1(S') = A_1 e^{-hS'},$$

y sustituyendo en la ecuación

$$L\, H(s)\, H_1(S) = H(s')\, H_1(S'),$$

resulta:

$$L\, A e^{-hs} . A_1 e^{-h'S} = A e^{-h's'} . A_1 e^{-hS'}.$$

Y poniendo en vez de L su valor y quitando denominadores

$$e^{-hmc^2 - h'MC^2} . A e^{-hs} . A_1 e^{-h'S} =$$
$$= e^{-hmc'^2 - h'MC'^2} . A e^{-h's'} . A_1 e^{-hS} .$$

Por fin, suprimiendo el factor común $A\, A_1$, reuniendo las exponenciales de cada miembro y sustituyendo por s, s'. S, S', sus valores

$$s = m k^2 \omega^2 \quad , \quad S = M K^2 \Omega^2$$
$$s' = m k^2 \omega'^2 \quad , \quad S' = M K^2 \Omega'^2$$

hallaremos

$$e^{-hmc^2 - h'MC^2 - hmk^2\omega^2 - h'MK^2\Omega^2} =$$
$$= e^{-hmc'^2 - h'MC'^2 - hmk^2\omega'^2 - h'MK^2\Omega'^2},$$

que también puede escribirse

$$e^{-hm(c^2 + k^2\omega^2) - h'M(C^2 + K^2\Omega^2)} =$$
$$= e^{-hm(c'^2 + k^2\omega'^2) - h'M(C'^2 + MK^2\Omega'^2)} .$$

Esta es la ecuación que debiera convertirse en una identidad, y sin embargo no es así, porque los exponentes no son iguales.

La igualdad de dichos exponentes introduce una relación, entre las variables distinta de las cinco relaciones que hemos empleado al determinar u', ω', U', Ω'.

Esto nos demuestra que el método que hemos seguido será legítimo; pero con la generalidad que le hemos dado no es suficiente para determinar la identidad. Es decir, que no da para ψ y ψ_1 las formas necesarias para convertir en idéntica la ecuación de que partimos.

No sería lo mismo si en la determinación de las funciones ψ y ψ_1, en vez de poner constantes distintas h y h', hubiéramos puesto una sola constante h.

En efecto, en tal caso la ecuación anterior se convierte en ésta

$$e^{-h\left[m(c^2+k^2\omega^2)+M(C^2+K^2\Omega^2)\right]} =$$
$$= e^{-h\left[m(c'^2+k\omega'^2)+M(C'^2+K^2\Omega'^2\right]},$$

que es una identidad, porque la constancia de la fuerza viva antes y después del choque se expresa de este modo, como hemos visto,

$$m(c^2+k^2\omega^2)+M(C^2+K^2\Omega^2) =$$
$$= m(c'^2+k^2\omega'^2)+M(C'^2+K^2\Omega'^2),$$

o, si se quiere, recordando la significación de c .....

$$m\left((u^2+v^2)+k^2\omega^2\right)+M\left((U^2+V^2+K)\Omega^2\right) =$$
$$= m\left((u'^2+v'^2)+k^2\omega'^2\right)+M\left((U'^2+V'^2)+K^2\Omega'^2\right)$$

Y ahora hemos resuelto ya el problema de una manera completa.

Y esta forma es necesaria y además es suficiente.

Para demostrar que es suficiente, basta la comprobación que acabamos de hacer; y el método seguido nos indica que es necesaria.

***

En suma, podemos establecer para ψ y ψ_1 estas dos formas:

$$\psi(u, v, \omega) = A e^{-hm(u^2+v^2+k^2\omega^2)}$$
$$\psi_1(U, V, \Omega) = A_1 e^{-hM(U^2+V^2+K^2\Omega^2)}.$$

Como sólo se trata de determinar las formas de ψ y ψ_1, y vemos que son las mismas, es inútil distinguir en las variables u, v, ω del primer disco y U, V, Ω del segundo si son o no anteriores al choque.

Llegamos, pues, a este resultado importantísimo:

Si las funciones ψ y ψ_1, que representan las densidades de velocidades, tienen la forma precedente, es decir, si la distribución de velocidades es tal, que el número de discos, cuyas velocidades están comprendidas en los límites que marca el siguiente cuadro

$$l = \begin{vmatrix} u \ldots\ldots u + \partial u \\ v \ldots\ldots v + \partial v \\ \omega \ldots\ldots \omega + \partial \omega \end{vmatrix}$$

está dado por la siguiente expresión:

$$A e^{-hm(u^2+v^2+k^2\omega^2)} \partial u \, \partial v \, \partial \omega,$$

y el número de discos de la segunda clase, cuyas velocidades están comprendidas en los siguientes límites,

$$L = \begin{vmatrix} U \ldots\ldots U + \partial U \\ V \ldots\ldots V + \partial V \\ \Omega \ldots\ldots \Omega + \partial \Omega \end{vmatrix}$$

está a su vez expresado por esta fórmula, análoga a la anterior:

$$A_1 e^{-h(U^2+V^2+K^2\Omega^2)} \partial U \partial V \partial \Omega,$$

la distribución de velocidades no podrá ser alterada, sean cuales fueren los choques entre los discos del primer sistema y los del segundo.

Recuérdese que siempre suponemos, que en un instante dado cada disco sólo choca con otro. La probabilidad del choque de tres discos en el mismo instante se supone que es infinitamente pequeña.

Las dos fórmulas anteriores son, pues, las que expresan la ley de distribución de velocidades, la necesaria y suficiente para que el movimiento sea estable y no se altere por los choques de los discos de ambos sistemas. Es decir, de un disco del primer sistema con otro disco del segundo.

Pero hay más. Estas formas de ψ y ψ_1 no sólo son necesarias y aseguran la permanencia del estado del movimiento cuando chocan entre sí discos de dos sistemas; sino que aseguran este estado permanente cuando chocan entre sí dos discos del primer sistema o dos discos del segundo.

Y esto es evidente: lo hemos demostrado en el primer ejemplo, y en este mismo basta igualar los discos de ambos sistemas; es decir, hacer $m = M$, $k = K$. Llegaríamos a la misma ecuación, sólo que, en vez de dos funciones ψ y ψ_1, tendríamos una sola.

Y, en resumen, las fórmulas anteriores nos determinan en todos los casos la única distribución de velocidades compatible con la permanencia estadística en el estado de movimiento del sistema.

Es claro, además, que llegaríamos a fórmulas análogas para el caso, no de dos sistemas de discos, sino de un número cualquiera. No habría más que repetir, para cada dos sistemas, el método de demostración ya indicado, y obtendríamos siempre una exponencial, que contendría una constante multiplicada por la fuerza viva de dicho sistema.

Las constantes h, A y A_1 se determinan como en los ejemplos anteriores.

Si N es el número de discos del primer sistema, claro es que la constante A deberá satisfacer a esta ecuación

$$N = \int A\, e^{-hm(u^2+v^2+k^2\omega^2)}\, \partial u\, \partial v\, \partial \omega$$

en que integraríamos respecto a u, v, ω entre $-\infty$ y $+\infty$, es decir, para todos los valores de dichas velocidades; porque el elemento diferencial expresa el número de discos que corresponden al sistema u, v, ω, como hemos explicado tantas veces; o, si se quiere, el elemento diferencial expresa el número de discos comprendidos en los límites *(l)*.

Efectuada la integración no quedarán mas que constantes; a saber: una función de h, m y k; además, la incógnita A y el número N, que es un dato.

De esta ecuación despejaríamos A, que resultaría conocida si se conociese h.

Esta constante h se podría determinar, como ya hemos explicado, por las velocidades medias. Algo habría que decir aún sobre los valores de m y k; pero quede para otra ocasión.

Lo que hemos dicho respecto a los discos del primer sistema podemos decir para los del segundo.

La constante A_1 se determinaría por la fórmula

$$N_1 = \int A_1\, e^{-hM(U^2+V^2+K^2\Omega^2)}\, \partial U\, \partial V\, \partial \Omega$$

en la que N_1 es el número de discos del segundo sistema y la integral debe efectuarse entre $-\infty$ y $+\infty$, es decir, para todos los valores de U, V y Ω.

*
* *

Una observación para concluir.

Si se llama energía cinemática, no a la fuerza viva sino a la mitad de la fuerza viva, se podría introducir ésta en las fórmulas precedentes, poniendo en evidencia el factor $\frac{1}{2}$ en la constante h, con la observación evidente de que toda cantidad es la mitad de un valor doble.

De modo que poniendo en vez de h el valor $\frac{h}{2}$, en que conservamos la letra h para no multiplicar las notaciones, las fórmulas precedentes se convierten en éstas:

Número de discos del primer sistema comprendidos en los límites *(l)* ..... $A\, e^{-h\frac{m}{2}(u^2+v^2+k^2\omega^2)}\,\partial u\,\partial v\,\partial\omega$.

Número de discos del segundo sistema comprendidos en los límites L ..... $A_1\, c^{-h\frac{M}{2}(U^2+V^2+K^2\Omega^2)}\,\partial U\,\partial V\,\partial\Omega$.

Queda, con las dos fórmulas anteriores, resuelto el problema 8.° de la serie general, y podríamos ya pasar al 9.° de este caso. Se refiere a la aplicación de dichas fórmulas a las cuestiones relativas a *cantidades medias;* por ejemplo: velocidad media, media de los cuadrados de las velocidades, fuerza viva media en los diferentes sistemas, equilibrio estadístico de temperaturas, y así sucesivamente.

Pero sería repetir lo que hemos explicado minuciosamente en los ejemplos anteriores.

La fórmula es siempre la misma: multiplicación de cada magnitud cuyo valor medio se desea hallar por el número que a esta magnitud corresponde; suma de todos estos productos y división por el número total de magnitudes.

Las integraciones serían análogas a las que ya hemos resuelto.

Damos, pues, por terminado este problema de los discos y pasamos a otro ejemplo, que será el 4.° de los que habremos estudiado en estas conferencias sobre teorías cinemáticas de los gases.

XXIX.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

(Continuación.)

POR BLAS LÁZARO E IBIZA.

TRIBU 3.ª — FOMIDEOS

	Aparato esporífero de forma ungular...	1
	Aparato esporífero de forma mensular..	3
1.	Tubos estratificados.....	Gen. *Fomes.*
	Tubos en una sola capa.....	2
2.	Poros pequeños é iguales (tipo poroideo).	Gen. *Ungularia.*
	Poros laberintiformes (tipo dedaloideo)...	Gen. *Dœdaloides.*
3.	Poros laberintiformes.....	Gen. *Dœdalea.*
	Tubos pequeños é iguales.....	4
4.	Tubos dispuestos en una sola capa.....	Gen. *Mensularia.*
	Tubos estratificados.....	Gen. *Scalaria.*

Gen. **FOMES** *Fr.*

(*Placodes* Quelet)

Aparatos esporíferos bastante grandes y de forma ungulada, con la superficie superior pronunciadamente gibosa o conoidea, y la inferior plana o casi plana. Estos aparatos, que viven varios años, llegan a adquirir una dureza y consistencia equivalentes a la de los leños, y, prolongándose cada año en su circunferencia, originan en su cara superior una serie de surcos y zonas concéntricas. Su sección vertical muestra carne abundante y una serie de capas tubíferas superpuestas en forma de estratos. Tubos rectos y verticales, muy adheridos a la carne, de la que difícilmente se separan.

Los ejemplares muy jóvenes no aparecen aún con la

forma ungulada, propia de los ejemplares adultos, sino con formas discoideas más ó menos convexas en ambas caras, poco acentuadamente en la inferior, ni presentan todavía los numerosos estratos tubíferos que se observan en el estado adulto. Un ejemplar aislado pudiera calificarse entonces como correspondiente al género *Friesia*. Para evitar tales errores es indispensable que la determinación se haga valiéndose de ejemplares adultos que ofrezcan su desarrollo completo. Si en este estado éstos no pasan de la forma almohadillada o semidiscoidea tendremos la seguridad de que pertenecen al género *Friesia*, y si, con la edad, pasan a ser ungulados serán verdaderos *Fomes*.

A.—*Carne intensamente coloreada de pardo, ocráceo o leonado.*

FOMES FOMENTARIUS *(L.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus fomentarius L.
Boletus ungulatus Schæff.
Polyporus fomentarius Fr.
Fomes ungulatus Bull. (pars.)
Pyreium ungulatum et fomentarium Paul.

Iconografía.

Schaff. Fung. qui in Bav., láms. 137 y 138.
Bull. Champ. de la France, lám. 491, figs. C, D, E y F.
Battr. Fung. agr. arim., lám. 37, fig. E.
Sow. Engl. Fung., lám. 133.
Fries. Swer. atl. Schwamp., lám. 62.
Eloffe. Champ. com., lám. 3, fig. 11.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 52.
Britz. Hymen. Ausgb. V, fig. 44.
Lenz. Nutzl. Schwæmm., fig. 48.

Gillet. Hymen., lám. 467.
Cordier. Champ. de la France, lám. 40.
Roll. Atl. du Champ., lám. 94, fig. 207.
Mass. Engl. Fung., lám. 29, fig. 2.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 32, D.
Dumée. Nov. Atl. Champ., serie II., lám. 49.

Descripción.—Aparato esporífero ungulado, cuyo diámetro horizontal puede alcanzar de treinta a cincuenta centímetros de diámetro por diez a veinte de altura; con la superficie superior, que al principio tiene coloración leonada, queda al fin de color gris pálido y como empolvada, apareciendo estratificada por la abundancia de zonas y de surcos concéntricos y angostísimos con el borde; su cutícula es dura y algo brillante. Carne acorchada, blanda, pardo-amarillenta, de color ocráceo leonado, que se arrolla en copos de borra al ser cortada en seco. Tubos largos, delgados, verticales, dispuestos en estratos superpuestos, de color ocráceo o pardo rojizo. Poros pequeños blanquecinos y plomizos al principio y finalmente de color pardo claro. Espora elipsoidea alargada, de unas diez y ocho μ, incolora, con la exospora sembrada de papilas redondeadas.

Habitación.—Sobre los troncos viejos, preferentemente de cupulíferas, pero también de abedules, nogales y otros árboles, durante todo el año; pero la formación de nuevas capas de tubos tiene lugar en el verano.

Area.—Comprobada en localidades de todas las regiones peninsulares.

Observaciones.—Esta especie es de las conocidas desde más remotos tiempos, porque su tamaño y las aplicaciones que tuvo en la medicina antigua llamaron sobre ella la atención, pero es algo polimorfa, tanto porque su cara inferior puede ser casi plana o algo convexa, como porque su larga vida y continuo crecimiento, sobre todo si vive sobre una rama no muy gruesa, puede permitirle adquirir un con-

torno redondeado, casi completo, que enmascara la forma ungulada típica de los ejemplares normales. A esta forma podemos referir la figura *F* de la lámina 491 de los *Icones* de Bulliard, que aparece allí con la denominación de *Boletus labyrinthiformis,* pues formas idénticas del *Fomes fomentarius* he tenido ocasión de observar en España.

El aspecto estratificado, tan marcado en las regiones próximas al borde de la cara superior, no aparece nunca en la parte central de la misma superficie, cuya coloración es generalmente más oscura. Las zonas pardo claras y pardo oscuras muy estrechas que alternativamente se notan en los ejemplares que aun están en vegetación activa, pierden estos contrastes de coloración en los ejemplares viejos y muertos, aunque persistan adheridos a los troncos; la acción alternada del agua y del sol determina en ellos una coloración gris sucia, pero clara, en toda la superficie superior. La superficie inferior o porífera presenta siempre, aun en estos ejemplares viejos y más o menos decolorados, una coloración parda bien diversa de la de la cara superior.

FOMES GRISEUS *Sp. nov.*

Descripción. — Aparato esporífero típicamente ungulado, de diez a quince centímetros en su base, y siete a nueve de grosor en su centro; superficie superior enteramente lampiña, con dos o tres surcos concéntricos muy profundos y distanciados, de color gris blanquecino, homogéneo desde el ápice hasta el borde. Carne leonada ocrácea, abundante, fibrosa y semileñosa. Tubos muy cortos de uno a dos milímetros, estratificados confusamente, del mismo color que la carne los de las capas viejas, pero los de la última capa son de color gris claro muy semejante al de la cara superior. Poros pequeñísimos redondeados, de color de canela claro y como empolvados de gris. Esporas elipsoideas de diez a doce μ.

Habitación.—Sobre los troncos viejos de los castaños durante todo el año.

Area.—Es prematura toda indicación sin más observaciones. Los ejemplares típicos de esta nueva especie los he recogido directamente por mí mismo en San Miguel de Quiloño (Asturias) en Septiembre de 1914 y comprobado en los años siguientes la constancia de su característica.

Observaciones.—Por el color gris claro recuerda a la *Ungularia betulina*, que a veces aparece grisácea; pero la carne tan intensamente coloreada y los tubos estratificados de la nueva especie alejan toda confusión.

Por la forma de los aparatos esporíferos recuerda algunas formas del *Fomes igniarius;* pero no ofrece la coloración ni el tomento que distinguen a éste, ni la clara estratificación y longitud de tubos propios de esta última especie.

En cuanto al *Fomes fomentarius* no coincide con la nueva especie, por tener numerosas zonas concéntricas estrechas y bien marcadas en su cara superior, los tubos sensiblemente más largos que en ésta y todos los estratos de igual color.

Por otra parte, las esporas del *Fomes fomentarius* miden unas diez y ocho μ, las del *igniarius* sólo seis μ y las de la nueva especie de diez a doce μ.

Con las demás especies del género *Fomes* las diferencias son aún más acentuadas.

FOMES IGNIARIUS (L.) Fr.

Sinonimia.

Boletus igniarius L.
Boletus obtusus Pers.
Polyporus ungulatus Bull. (pars.)
Polyporus igniarius Fr.
Pyreium igniarium Paul.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 454, fig. A, B, D:
Lenz. Nutzl. Schwæmm, fig. 47.
Bolt. Hist. of Fung., lám. 80.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo VI, lám. 54.
Mich. Comm. myc. Ital., lám. 62 (variedad).
Ventur. Myc. agr. Bresc., lám. 61, fig. 4.
Sow. Engl. Fung., lám. 132.
Gillet. Hymen., lám. 468.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 45.
Duf. Atl. Champ., lám. 51.
Mig. Krypt. Fl., tomo III. lám. 1, 32, E.

Descripción. — Aparato esporífero ungulado, de diez a veinticinco centímetros de diámetro horizontal por ocho a quince de grosor vertical; la superficie superior, que aparece al principio revestida por una borra algodonosa y blanca, se halla dividida en zonas por surcos poco numerosos y muy profundos y aun agrietados, finamente tomentosa y de color agrisado, negruzco en el área central, y en el borde crema u ocráceo; al fin todo el hongo se oscurece y aun llega a ser negruzco; cutícula áspera y dura. Carne acorchada y luego leñosa, algo fibrosa, de color pardo rojizo y marcadamente zonada. Tubos delgados, finos y pardos, estratificados. Poros pequeños, pubescentes y grisáceos y después de color leonado, muy pequeños. Espora ovoidea, incolora, de unas seis μ.

Habitación. — Durante todo el año sobre los troncos viejos de cupulíferas, salicáceas, coníferas, arces, manzanos, ciroleros y otros. Bastante frecuente sobre los chopos y sauces.

Area. — Como el *Fomes fomentarius* es común a toda la Península.

Observación. — La mejor diferencia entre esta especie y el *Fomes fomentarius* radica en la forma y tamaño de las res-

pectivas esporas, la distribución de las coloraciones de la superficie superior, el carácter de los poros jóvenes, observables en el verano, y el relieve de la misma superficie que en el *fomentarius* presenta numerosísimas estrías concéntricas, apenas separadas por zonas estrechísimas, casi foliares, y en el *igniarius* sólo se notan cuatro o seis surcos concéntricos y muy profundos, separados por zonas anchas y tan prominentes que parecen rebordes redondeados.

FOMES UNDATUS *Sp. nov.*

Descripción. --Aparato esporífero, grande, de contorno casi semicircular, de diez a quince centímetros de diámetro horizontal y cinco u ocho de grueso, con el borde ondeado, sinuoso, y aun algo lobulado por la existencia en su periferia de senos entrantes desiguales y poco profundos; superficie superior muy desigual, de color terroso oscuro, algo rojizo y mate, con profundas anfractuosidades y grietas, unas en dirección concéntrica con el borde y otras radiantes, manchada de negruzco en su parte más vieja. Carne poco abundante, de color pardo rojizo oscuro, de consistencia suberosa. Tubos delgados, de uno a dos centímetros de longitud, dispuestos en estratos numerosos que forman casi toda la masa del aparato esporífero, de color pardo grisáceo por fuera y de igual coloración que la carne por dentro. Poros pequeños e iguales, pardos, pero con el borde cubierto de una densa pruina que hace aparecer como empolvada de blanco grisáceo toda la cara inferior del aparato esporífero.

Habitación. —Encuéntrase en otoño sobre los robles.

Area. —Hasta ahora sólo la he visto en localidades asturianas, en Covadonga y en Oviedo; pero es probable, por lo menos, en toda la región cantábrica.

Observaciones.—La primera impresión que este hongo produce por su forma y coloraciones recuerda al *Fomes igniarius*, pero bien pronto se advierte que no es tomentosa

su cara superior, sino mate y pulverulenta, que sus poros no son pubescentes ni ocráceo leonados, y que presentan en la nueva especie una densa capa pruinosa y blanca, de que aquél carece. Tampoco el relieve de su capa superior es análogo en ambas especies.

FOMES ROBURNEUS Fries.

Descripción.—Aparatos esporíferos gruesos ungulados cuando jóvenes y muy anfractuosos y deformes cuando son muy viejos, edad en la cual pueden alcanzar hasta más de veinte centímetros de diámetro; superficie superior con surcos y depresiones alternadas y recubierto de una capa laccácea, parda en fresco y luego grisácea y con la zona marginal pardo leonada. Carne compacta, tuberosa, dura y apretada, de color pardo intenso. Tubos cortos, del mismo color que la carne, estratificados, formando capas delgadas que llegan a ser muy numerosas. Poros bastante pequeños, céreos al principio y luego pardos, acanelados.

Habitación.—Hállase con bastante frecuencia sobre los robles viejos, durante todo el año, aun cuando no vegetan activamente en verano ni en el rigor del invierno.

Area.—Comprobado por mí en todas las regiones peninsulares, aunque menos frecuente en el Este y Sur.

FOMES NIGROPORUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos de contorno semirredondeado, de diez a doce centímetros de diámetro por cuatro a cinco de altura. Superficie superior, de color pardo oscuro, mate y homogéneo, sin zonas y con sólo algunos surcos junto al margen y muy aproximados entre sí, con grietas numerosas, que sólo afectan a la capa cuticular y que dibujan en la superficie una reticulación de mallas muy estrechas. Carne fibrosa, de consistencia leñosa y coloración parda acentuadamente rojiza. Tubos delgados, de la misma coloración que la carne, de un centímetro próximamente de

longitud y dispuestos en varios estratos concéntricos. Poros muy pequeños é iguales, de color negro de carbón. Esporas de nueve á diez μ de diámetro, elipsoideas y con la exospora lisa.

Habitación.—Sobre los troncos de las encinas durante todo el año.

Area.—Sólo he hallado este *Fomes* en algunos montes de la región central: de Sigüenza a Baides, en Méntrida y en la Real Casa de Campo (Madrid).

FOMES UNGULATUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero de contorno semicircular y forma perfectamente ungulada, de cuatro a seis centímetros de diámetro máximo en su base por cuatro a cinco de altura en su centro; superficie superior formada por una capa cuticular delgadísima y dura, con dos o tres surcos concéntricos poco profundos, mate y de coloración general grisáceo oscura, que no llega a parda ni aun en su centro y se va aclarando hacia su borde. Carne finamente fibrosa y muy dura, de color pardo rojizo bastante intenso. Tubos delgados y del mismo color, de cinco a seis milímetros de longitud y estratificados en varias capas sobrepuestas. Poros pequeños é iguales, leonado claros y con pruina abundante blanco grisácea. Esporas de once á doce μ de diámetro.

Habitación.—Vive durante todo el año sobre los sauces en las riberas.

Area.—La distinción de este tipo específico está hecha con ejemplares aportados de Soria por D. Lucas Fernández Navarro. Yo solamente la he observado rara vez en las orillas del Guadarrama.

FOMES PRUNICOLA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos semirredondeados, de cuatro a seis centímetros de diámetro horizontal, veinticinco a cuarenta milímetros de grueso, con el borde muy grueso

y obtuso. Superficie superior lampiña, con dos o tres surcos concéntricos poco profundos, de color leonado-pálido y sucio en el borde, manchado de blanco grisáceo en el resto y a veces de pardo oscuro en su centro. Carne pardo oscura, de color de café molido, fibrosa y bastante dura. Tubos delgados y cortos, de siete a ocho milímetros de longitud, formando estratos, a veces numerosos, de color igual al de la carne. Poros pequeños, poligonales, bastante iguales, pardo claros, con el borde manchado por una eflorescencia blanco grisácea. Esporas de nueve á once μ de diámetro.

Habitación.—Hállase sobre ciroleros, almendros y otros árboles de la familia de las amigdaláceas.

Area.—Existe por lo menos en las regiones septentrional, central y oriental, pues yo le he recogido sobre cirolero cerca de Soto del Barco (Asturias) y sobre almendros en Toledo. Posteriormente he recibido por intermedio del Sr. Mas y Guindal, ejemplares de Villahermosa (Castellón), recogidos sobre ciroleros por el farmacéutico Sr. García Repullés.

Observaciones.—Es una especie bastante polimorfa, pues cuando se inserta en la cara inferior de ramas horizontales o casi horizontales se deforma considerablemente, por adquirir gran desarrollo su cara inferior, mientras que la superior sufre una reducción muy marcada; en tales casos los aparatos esporíferos pueden adquirir bastante más diámetro que en los de forma normal, y la carne disminuye hasta el punto de ocupar solamente una parte pequeña de la sección vertical, que aparece constituída casi únicamente por los estratos tubíferos.

B.—*Carne blanquecina, amarillenta pálida o gris amarillenta.*

FOMES CANODERMICUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero de forma ungulada de siete a diez centímetros de diámetro por cinco a siete de

altura, a veces sobrepuestos y soldados, lo que aumenta su altura aparente. Superficie superior muy convexa, a veces con algunas depresiones concéntricas incompletas o poco marcadas, con la cutícula vernicosa marcadamente granugienta, enteramente negra en unas partes y pardusca oscura sin nada de rojizo en otras, nunca muy brillante, y en las superficies antiguas enteramente mate y aun resquebrajada. Carne blanda, suberosa, de color amarillento muy claro. Tubos relativamente largos, de diez a doce milímetros, de igual color que la carne, y mates. Poros pequeños, de color leonado clarísimo.

Habitación.—Sobre los troncos vivos de los abedules.

Area.—Hasta hoy sólo la puedo citar de Asturias, recogida por mí en Rivadesella y en San Cristóbal (Avilés), y remitida de Cibea por el Dr. D. Ambrosio Rodríguez.

Observaciones.—El *Fomes ganodermicus*, tal como acabamos de describirle, es un tipo bien definido, aun desde el punto de vista morfológico; pero con frecuencia he visto en los bosques asturianos grupos informes formados por ejemplares muy desiguales, soldados y confundidos en masas, en las que no es posible intentar una reconstitución morfológica de los aparatos esporíferos que han contribuído a formarlas. La compenetración de unos con otros, en la que el crecimiento de los más jóvenes ha rellenado los huecos irregulares que entre sí dejaban los antiguos, hace del total un conglomerado informe, en el que toda determinación específica sería imposible a no conocer en otros ejemplares los aparatos esporíferos aislados.

Los caracteres esenciales de éstos, como son el carácter y coloración del revestimiento resinoideo, el color y consistencia de la carne y la característica de los tubos y poros, nos permiten afirmar con seguridad que estas masas, aun comenzadas a alterarse por reiteradas maceraciones y por la acción del tiempo, pertenecen a la especie que acabamos de describir.

FOMES FUSCATUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero ungulado, de contorno semicircular, algo lobulado, de unos diez a doce centímetros de diámetro, por siete a diez de grueso vertical en su centro; superficie superior dividida en zonas concéntricas desiguales por medio de surcos concéntricos poco profundos y cuando vieja con numerosas arrugas radiantes, con la coloración general pardo oscura, mate y como ahumada, sensiblemente aclarada en los bordes de algunas zonas y especialmente en el de la marginal, que es leonado claro y bastante prominente. Carne de color de madera clara o amarillenta pálida, blanda y suberosa, inodora. Tubos delgados e iguales, de catorce a diez y seis milímetros de longitud, del color de la carne, pero aún más claro, y formando capas sobrepuestas que ocupan la mayor parte de la sección. Poros pequeños e iguales, de color ocráceo pálido al principio, pero que se oscurecen luego, llegando a ser pardos y aun negruzcos. Espora elipsoidea de diez a doce μ de diámetro mayor.

Habitación.—Sobre los troncos de los pinos laricios durante todo el año.

Area.—Los ejemplares que me han servido para reconocer esta especie proceden de Puerto-Mingalbo (Teruel), localidad muy próxima a la provincia de Castellón, y me fueron procurados por mi condiscípulo D. Esteban García Repullés. Es la única localidad que positivamente conozco; pero es de suponer que este poliporáceo acompaña al *Pinus Laricio* Poir en los pinares del Maestrazgo, y probablemente en otros de la región levantina.

FOMES LYCHNEUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos ungulados, de contorno semirredondeado, casi sin ondulación, de ocho a diez centímetros de diámetro máximo horizontal por cuatro a seis de altura; superficie superior con surcos concéntricos

bastante profundos y angostísimos, separando zonas muy salientes, como infladas y generalmente estrechas; la coloración general de esta superficie es pardo negruzca, mate, desigual, sembrada de pequeñísimas granulaciones, y en los ejemplares secos de finísimas arrugas; en algunas partes está manchada por una pruina cenicienta con ligera tendencia a verdosa. Carne casi blanquecina, ligeramente anteada (como leche con algunas gotas de café) y de consistencia entre suberosa y leñosa. Tubos formando estratos tan numerosos que constituyen casi toda la masa del aparato, de un centímetro próximamente de longitud, delgados y del mismo color que la madera, tan apretados y consistentes que forman un tejido tan resistente como las maderas usuales. Superficie inferior levemente convexa, cubierta homogéneamente de poros pequeños, anteados, y en algunas partes casi blancuzcos; en la zona marginal el área porífera aparece limitada por un reborde algo prominente y de color pardo-amoratado. Esporas elipsoideas de ocho a nueve μ.

Habitación. — Hállase durante todo el año sobre los robles.

Area.—Sólo puedo mencionar esta especie en las provincias septentrionales. Los ejemplares por mí recogidos lo fueron en las provincias de Santander y Asturias.

FOMES NEESI *Fr.*

Sinonimia.

Polyporus Neesi Fr.

Descripción. —Aparato esporífero ungulado, de siete a diez centímetros de diámetro horizontal y ocho de altura, con la superficie superior marcada por surcos e inflamientos alternativamente concéntricos, vellosa al principio y lampiña más tarde, de color blanquecino y consistencia casi leñosa; superficie inferior ligeramente cóncava; no presenta engrosamiento ni en la base ni en el margen, que es casi

agudo. Carne blanco sucia. Tubos de color pardo claro, formando varias capas o estratos. Poros redondeados desiguales de color pardo acanelado.

Habitación.—Sobre los troncos viejos y sobre las ramas caídas en los bosques de hayas durante el otoño.

Area.—Indicado en las Provincias Vascongadas por el Sr. Aranzadi.

Gen. **UNGULARIA** *Nov. gen.*

Aparato esporífero de forma ungulada, con la superficie superior marcadamente gibosa o conoidea, y la inferior plana o casi plana; dimensión vertical no mucho menor que el radio antero posterior. Estos aparatos no viven nunca más de un año y carecen, por tanto, de surcos concéntricos y de zonas en la superficie superior. La sección vertical muestra una sola capa de tubos. Estos están verticalmente colocados y son generalmente cortos.

A.—*Carne blanquecina o leonada.*

UNGULARIA BETULINA *(Bolt.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus betulinus Boll. Bull. y Sow.
Polyporus betulinus Fries.
Boletus tuberosus L.
Fomes betulinus Fries.

Iconografía.

Sow. Engl. Fung., lám. 212.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 22.
Bull. Champ. de la France, lám. 312.
Œder. Fl. Dam., lám. 1254.
Grev. Scott. Crypt., Fr., lám. 246.
Bolton, Hist. of Fung., lám. 159.

Glilet. Hymen., lám. 462.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 41.
Cord. Champ. de la France, lám. 41, fig. 1.
Duf. Atl. des Champ., lám. 51.
Roll. Atl. des Champ., lám. 92, fig. 203.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, B.
Dumée Nouv. Atl. Champ., serie II, lám. 45.

Descripción.—Aparato esporífero, totalmente sentado o alguna vez subpedicelado, cuando es muy joven, discoideo o lingüiforme de unos diez centímetros de diámetro horizontal por cuatro a seis de grueso, con la superficie superior homogénea, sin zonas, recubierta por una cutícula dura, delgada, separable, lisa, cuyo color varía del grisáceo al pardo oscuro, que al fin palidece homogéneamente, o se puebla de areolas de tono más claro. Carne blanca, tierna, acorchada al fin y con sabor acídulo. Tubos cortos blanquecinos formando una sola capa fácilmente separable. Poros pequeños y blancos. Espora elipsoidea, hialina, de unos nueve μ de diámetro.

Habitación.—En verano y otoño, sobre los troncos de los abedules en los bosques.

Area.—Demostrada su existencia en muy varias localidades del Norte, Este, Centro y Oeste de la Península.

Observaciones.—Ofrece esta especie caracteres bien definidos y constantes, pero también ofrece algunas variantes por presentarse en las formas jóvenes con escasa anchura en su base, por lo que esta primera porción semeja un pedicelo muy corto y ancho; he recogido ejemplares curiosos, algunos de los cuales pueden considerarse como representantes de una variedad nueva.

Variedad **sublobata**, caracterizada, porque la región marginal se prolonga en todos sentidos, ensanchando considerablemente la base de la forma ungular, y presentando en su borde escotaduras y aun algún lóbulo.

Los ejemplares de esta variedad han sido recogidos en localidades asturianas: Cibea (enviada por el Dr. D. Ambrosio Rodríguez) y Ribadesella, recolectada por mí.

UNGULARIA CHIONÆA *(Pers.)* Láz.

Sinonimia..

Polystictus chionœus Fr.
Polyporus candidus? Pers.

Iconografía.

Pers., Myc. Eur.. tomo II, lám. 15.
Lucand. Champ. de la France, lám. 74.
Bern. Champ. Roch., lám. 74, fig. 1.
Britz. Polyp., fig. 157.

Descripción.—Aparato esporífero ungulado, con el contorno horizontal semirredondeado, de dos a tres centímetros de diámetro, tierno, con la superficie superior de color blanco puro, lampiña. Carne abundante, blanquecina, blanda y de sabor ligeramente ácido. Tubos delgados, blanquecinos. Poros blancos, pequeños, redondeados, al fin con los bordes denticulados. Espora elipsoidea de unas cinco μ, alargada y algo curva.

Habitación.—Sobre las ramas secas de los abedules durante el verano.

Area.—En la región pirenaica y provincias cantábricas.

UNGULARIA POPULINA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero ungulado bastante prominente en el centro, de siete a nueve centímetros de diámetro en su base por seis o siete de grueso, con la superficie superior lisa y suave, lampiña, bastante igual, de color blanco grisáceo, sin zonas definidas ni surcos concéntricos. Carne abundante, de consistencia suberosa, de color leonado intenso con una línea estrecha y pardo oscura debajo

de la capa cuticular. Tubos estrechos y largos (hasta de más de dos centímetros), de color grisáceo y dispuestos en un solo estrato. Poros muy pequeños e iguales, formando una superficie de color pardo grisáceo claro, cambiante, limitada en su contorno por una banda estrecha y de color leonado claro. Esporas de seis a siete μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los chopos en otoño.

Area.—El único dato que hasta hoy puedo afirmar es que los ejemplares por mí estudiados proceden de los alrededores de Olmedo (Valladolid), de donde me la procuró el farmacéutico D. Daniel Gutiérrez Martín.

UNGULARIA PARVULA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos ungulados, pequeños, de cuatro a cinco centímetros de diámetro horizontal por tres a cuatro de grueso en su base; superficie superior muy convexa, pardo rojiza, mate, rugosa, manchada de amarillento, especialmente en la proximidad del borde. Carne abundante blanquecina, levemente amarillenta, blanda y estoposa aun en seco. Tubos gruesecitos, de doce a quince milímetros de longitud, de color pardo claro y sucio. Poros no abiertos en la zona marginal de la superficie inferior, pequeños, redondeados, de color anteado claro, con los bordes enteros y algo gruesos. Esporas elipsoideas, de ocho a diez μ de diámetro.

Habitación.—Sobre cajigas y robles durante el verano.

Area.—No conozco más ejemplares que los recogidos por mí hace bastantes años en San Vicente de la Barquera (Santander).

B.—*Carne de color pardo oscuro.*

UNGULARIA DRYADEA *(Bull.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus pseudo igniarius Bull.

Polyporus dryadeus Fries.
Fomes dryadeus Pers.
Fomes Soloniensis Duby.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 458.
Huss. Ill. of. Brit. Myc., lám. 21.

Descripción.—Aparato esporífero ungulado de diez á treinta centímetros de diámetro horizontal, pero que en algún ejemplar alcanza cuarenta y cinco centímetros, grueso, con la superficie superior con surcos radiantes, anchos y poco profundos, recubierto por una cutícula crustácea, dura, delgada y pruinosa, de color amarillento pálido, más tarde pardusco, y que exuda por su margen gotitas de un líquido algo verdoso. Carne abundantísima pardo ocrácea, esponjosa y blanda al principio y luego suberosa, fibrosa y frágil. Tubos largos y de uno a dos centímetros, ocráceos y luego parduscos. Poros finos, blandos, de color azafranado u ocráceo, empolvados de blanco. Espora esférica o elipsoidea, de ocho-nueve μ, de color ambarino y con la exospora punteada.

Habitación.—Sobre los tocones viejos de las encinas y robles en verano y otoño.

Area.—Está comprobada su existencia en las regiones occidental, boreal y central de la Península.

UNGULARIA TUBEROSA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos que al principio aparecen como masas tuberiformes ovoideas, de cinco a seis centímetros en su diámetro mayor que en el vertical, las cuales aparecen sobre las cortezas de los robles con la superficie de un pardo grisáceo, lampiña y mate, bastante homogéneo; más tarde, alcanzado su desarrollo (diez a doce centímetros en su diámetro vertical, por seis a siete de anchura y cinco a seis de diámetro antero posterior) se nota

la base ya casi plana de lo que resulta una forma ungulada muy alta, de color leonado claro o blanquecino grisáceo, mientras en el centro la superficie más vieja adquiere una coloración grisácea, a veces bastante oscura y con el tiempo aparecen manchones pardo negruzcos, localizados preferentemente en la parte de superficie más vieja o central; no presenta ésta zonas de coloración ni surcos concéntricos que den a su cara superior el aspecto característico de los *Fomes*, antes bien, la superficie aparece turgente y continua, sin que se produzcan surcos, arrugas o grietas por la desecación. La carne es abundantísima y constituye casi toda la masa del aparato esporífero, siendo su consistencia dura y casi leñosa; su coloración pardo oscura, de color de café molido en la parte más vieja y algo más clara en la parte de reciente formación, siempre levemente zonada y recubierta por una capa enticular delgada y muy consistente, no resinoidea. Tubos dispuestos en una sola capa, estrechos, de cerca de un centímetro de longitud, muy delgados y del mismo color que la carne. Poros finísimos, de color grisáceo claro, con los bordes enteros. Esporas elipsoideas de seis a siete μ de diámetro.

Habitación.—Hállase durante todo el año en los troncos de los robles vivos.

Area.—Sería prematuro fijarla tratándose de una especie nueva, pero las localides de que proceden los ejemplares por mí reunidos permiten suponer que se halle abundantemente distribuída por toda la España central.

Observaciones.—Tratándose de una especie nueva, interesa consignar las localidades de que he visto ejemplares. La más septentrional es la de Soncillo (Burgos), de donde me la ha remitido el Sr. Estebánez; en la cordillera Carpetana yo la he recogido en Somosierra y Cercedilla (Madrid) y en San Ildefonso (Segovia) y de Aldeanueva de la Vera (Cáceres) me ha remitido abundantes ejemplares el farmacéutico Sr. Mateos.

UNGULARIA QUERCINA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos ungulados, de contorno semirredondeado, con alguna ondulación no muy pronunciada, de cinco a ocho centímetros de diámetro máximo horizontal por tres a cuatro de altura; superficie superior gris parduzca, mate, bastante homogénea, y el borde gris más claro y aun blanquecino en los ejemplares jóvenes, con varios surcos concéntricos y algunas grietas. Carne oscura, del color del café molido, de consistencia suberosa y estructura algo fibrosa, con las fibras radiantes desde la superficie de inserción del aparato sobre el soporte. Tubos largos, hasta de dos centímetros, también pardos, pero más grisáceos y menos rojizos que la carne, tan delgados que en la fractura aparecen como fibrillas. Superficie inferior casi plana, con los poros finísimos, redondos, pardo grisáceos, con pruina blanquecina, que, en los ejemplares adultos, falta hacia la proximidad del borde. Esporas ocráceas, elipsoideas, de unas ocho μ en su diámetro mayor.

Habitación. Sobre las ramas de los robles y encinas y cajigas durante el fin del verano y el otoño.

Area.—Esta especie sólo puedo citarla en algunas localidades de la provincia de Madrid, cuales son Méntrida y la Casa de Campo, y en Cartes (Santander), donde la recogió el Sr. Díaz y Rodríguez.

UNGULARIA SUBCANODERMICA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos ungulados, aunque nunca muy altos, de cuatro a ocho centímetros de diámetro horizontal, con superficie superior pardo amarillenta o algo rojiza clara, como barnizada, aunque apenas brillante si no se la frota, con zonas concéntricas estrechas, apenas diversas en la coloración y separadas por pliegues bastante marcados; borde obtuso, igualmente cubierto por la película lacácea, se extiende un poco por la cara inferior. Carne de co-

lor pardo oscuro como el del café molido, homogénea y de consistencia suberosa. Tubos en una sola capa, delgados, de medio a un centímetro de longitud, de color grisáceo por fuera y del color de la carne cuando se parten. Poros finos, pequeños, iguales, redondos, de color pardo ocráceo, empolvados de blanco en las depresiones de la cara inferior.

Habitación.—Sobre fresnos y robles durante el otoño.

Area. Hasta hoy solamente la he hallado en algunas localidades asturianas.

Gen. **DÆDALOIDES** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos de forma manifiestamente ungulada, con los tubos largos y anchos, dispuestos en una sola capa. Poros largos, tortuosos y laberintiformes, muy desiguales, separados por tabiques gruesecitos. Especies que viven sobre los troncos.

DÆDALOIDES PINICOLA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero entre ungulado y conoideo en su cara superior, con el contorno semicircular, de cuatro a doce centímetros de diámetro horizontal por cinco a diez de altura, con la superficie dividida en numerosas zonas concéntricas, muy estrechas, muy salientes y angulosas, formando una gradería, resquebrajadas por numerosas grietas en sentido radial; coloración pardo negruzca mate. Carne no muy abundante pardo rojiza, no zonada, dura y casi leñosa. Tubos anchos, de doce a quince milímetros de altura, formando un solo estrato de color gris pardo, bastante claro y mate. Poros algo largos, anchos, muy tortuosos, formando un dibujo laberintiforme, de color grisáceo amarillento claro y separados por tabiques gruesecitos. Espora elipsoidea, alargada, de diez a doce μ.

Habitación. – Hállase sobre las cortezas de los pinos durante todo el año.

Area.—Los primeros ejemplares por mí recogidos fueron hallados hace muchos años en los pinares de la Albufera (Valencia) y en Puerto Real (Cádiz), y más tarde observé la misma especie en otros pinares de Andalucía. En los pinares de las anchas vertientes de la cordillera carpetana no la he hallado hasta mucho más tarde, en la hoya de Navacerrada. Recientemente, el ilustre ingeniero de montes don Pedro de Avila y Zumarán me entregó para este trabajo dos magníficos ejemplares que han resultado pertenecientes a esta especie. Ambos fueron recogidos por él sobre el *Pinus sylvestris,* uno en pinares llanos (Peguerinos, Avila) y otro en Navaleno (Soria).

Gen. **DÆDALEA** *Pers.*

Aparatos esporíferos sentados, a veces algo angostados en la base, de forma ungulada, con la carne mal separada de los tubos, entre los cuales asoma de un modo irregular en la cara inferior del himenóforo. Poros con los tabiques desportillados, por lo que, comunicando unos con otros, originan un dibujo laberintiforme muy complejo, y parecen formados por repliegues himeniales, no láminas. Esporas ovoideas, elipsoideas o cilíndricas, incoloras.—Especies que viven sobre los troncos y leños.

DÆDALEA QUERCINA Pers.

Sinonimia.

Agaricus quercinus Bolt.
Agaricus labyrinthiformis Bull.
Polyporus quercinus L.
Dædalea betulina Krombh.

Iconografía.

Schœff. Fung. qui in Bav., fig. 831 (variedad).
Bull. Champ. de la France, lám. 352 y 442, figs. E. F. y G.

Sow. Engl. Fung., lám. 188.
Krombh. Nat. albild. Schuvæmm., lám. 5, figs. 1 y 2.
Bolt. Hist. of Fung., lám. 73.
Berkl. Outl. of Brit. Fung., lám. 19, fig. 5.
Grev. Scott. crypt. Fl., lám. 238.
Gott. Hahn. Pilz. Samm., fig. 128.
Pers. Myc. Eur., lám. 18, fig. 1 (variedad).
Britz. Polyp., fig. 83.
Sic. Hist. nat. des Champ., lám. 59, fig. 300.
Ventur. Myc. agr. Bresc., lám. 6, figs. 1 y 2.
Cordier. Champ. France, lám. 42, fig. 1.
Gillet. Hymen., lám. 475 (variedad).
Bail. Wicht. Sætz. Myc., lám. 31.
Duf. Atl. Champ., lám. 48.
Michœl. Führ. für Pilz., tomo III, lám. 45.
Mass. Engl. Fung., lám. 31, fig. 5.
Roll. Atl. des Champ., lám. 91, fig. 213.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. 36.
Dumée. Nouv. Atl. Champ., serie II, lám. 52.

Descripción.—Aparatos esporíferos, a veces sobrepuestos, insertos por su diámetro máximo horizontal, que suele ser de unos diez centímetros, rara vez más; su radio antero posterior oscila entre cuatro y siete centímetros, y su grueso, fuera de la parte central, es de unos dos a tres centímetros; la cara superior o estéril plana o levemente convexa, con el centro a veces prominente y separado por un amplio surco, concéntrico con el borde, es lampiña y rugosa, desigual, con zonas franjeadas y concéntricas con el margen; la coloración general es leonada clara en las zonas marginales con gran frecuencia, algo oscurecida en los bordes y pardo negruzca en el centro, que presenta eminencias redondeadas desiguales y la zona periférica con arrugas radiantes y desiguales. Carne elástica coriácea, casi suberosa en seco, de color de crema claro y algo grisáceo, con olor grato de hongo. Poros de ocho a treinta milímetros de largos por un

milímetro de anchura media muy desiguales, separados por laminillas anastomosadas y ramificadas formando un dibujo laberintiforme, bastante gruesas, con los bordes enteros y redondeados. Esporas alargadas de unas doce μ.

Habitación. —En primavera y verano, sobre los troncos y tocones de los robles y cajigas.

Area.—Parece estar bastante distribuída por todas las comarcas de la Península.

Observaciones. —La *Dædalea quercina* es una especie muy polimorfa, pero que se distingue bien de la *cinerea* por alcanzar mayor tamaño y por tener la superficie superior enteramente lampiña y de la *confragosa*, porque esta última especie no se inserta por toda la longitud del diámetro de su base sino por la porción media de ésta, carácter que unido a que los extremos de este diámetro se redondean da a los aparatos de esta especie un contorno arriñonado que no tienen las otras. La *Dædalea quercina*, aunque algo varía en los matices de su coloración, nunca adquiere los tonos rojizos, como manchados de polvo de ladrillo, que en algunos puntos de su haz presenta la *Dædalea confragosa*.

Las formas de la *Dædalea quercina*, que observadas por mí en la Península, aunque bastante variadas, creo pueden reducirse a los cuatro tipos o variedades que propongo a continuación. Como estas variedades se establecen por primera vez, mencionaré las localidades de que proceden los ejemplares por mí estudiados, refiriéndolos a cada una de las variedades.

Variedad **genuina:** El aparato esporífero aparece solitario, y visto por encima presenta el contorno semicircular o, por lo menos, de un gran sector circular; las superficies superior e inferior del aparato esporífero adquieren próximamente el mismo desarrollo; las zonas concéntricas del haz se perciben con gran claridad.

Cibea (Asturias, Dr. Rodríguez); Muniellos (Asturias, Láz.) Salinas de Avilés (Asturias, Láz.); San Vicente de la Bar-

quera (Santander, Láz.); Benasque (Huesca, Láz.); Pillarno (Asturias, Villalaín); Coruña, Láz; Real Casa de Campo (Madrid, Láz.); Bahamonde (Lugo, Casares), todos sobre robles, y Llerana (Santander, Díaz), sobre cajiga, y Aldeanueva de la Vera (Cáceres, Mateos), también sobre roble.

Variedad **superposita:** Caracteres semejantes a los de la variedad anterior, pero aparecen varios aparatos esporíferos superpuestos (dos o tres, rara vez cuatro), soldándose unos con otros sólo por el centro y decreciendo su diámetro desde el más alto al más bajo, costituyendo graciosas agrupaciones.

San Victorio, cerca de Betanzos (Coruña), sobre castaño, (D. Cándido Bolívar), Monasterio de Piedra (Zaragoza, Mas y Guindal), en roble, Moncayo (Zaragoza, Láz.), sobre roble. Bosque de Raíces (Asturias, Láz.), en roble; Cibea (Asturias, Dr. Rodríguez), en robles.

Variedad **decurrens:** Se caracteriza por la reducción de la superficie superior, casi nula en algunos ejemplares, y por el gran desarrollo de la inferior o tubífera, así como por la gran amplitud que adquiere la base o superficie de inserción (más de veinte centímetros en algún caso) contrastando con el escaso volumen del aparato esporífero que apenas se desarrolla en sentido normal al soporte.

Guecho (Vizcaya, Láz.); Cibea (Asturias, Dr. D. Ambrosio Rodríguez); Aldeanueva de la Vera (Cáceres, Mateos); Moncayo (Zaragoza, Láz.); todas sobre robles.

Variedad **lobata:** Caracterizada por sus aparatos esporíferos divididos en lóbulos numerosos y delgados.

Bosque de Muniellos (Asturias, Láz.), sobre roble.

Variedad **irregularis:** Caracterízase ésta principalmente por carecer de un borde definido entre las superficies superior e inferior de los sombrerillos, apareciendo así irregularmente mezcladas las superficies estéril y tubífera, y también porque la cara superior carece de zonas o las presenta mal definidas.

Pravia (Asturias, Láz.); Cibea (Asturias, Dr. Rodríguez); Raíces (Asturias, Láz.); Bosque del Villar (Asturias, Láz.); todas sobre robles.

Variedad **placoidea:** Muy bien caracterizada por formar placas de seis a ocho centímetros de anchura hasta por treinta de longitud y uno a tres de grueso, de color de crema claro, oscurecido en los bordes de los relieves; éstos trazan sobre la superficie como un relieve orográfico, y se dividen en porciones casi planas, de las cuales unas están ocupadas por pequeñas masas redondeadas, tuberiformes y salientes, y otras cubiertas por la superficie porífera; las primeras aparecen lampiñas en la superficie más saliente y recubiertas de un tomento blanco algodonoso en las profundas arrugas que existen sobre unas y otras. Aldeanueva de la Vera (Cáceres), remitida por el Sr. Mateos.

Esta variedad ha sido recogida sobre robles.

(Continuará.)

XXX.—El manganeso como catalizador de las reacciones bioquímicas, por las cuales, el nitrógeno atmosférico, por vía bacteriana, es asimilado por las plantas.

POR ANTONIO DE GREGORIO ROCASOLANO

Los organismos vegetales, están constituídos casi en su totalidad en peso, por el carbono, oxígeno, nitrógeno, hidrógeno, fósforo, azufre, calcio, potasio, magnesio y hierro; que son los llamados elementos o componentes plásticos; de entre éstos, los llamados elementos orgánicos, o sean el carbono, oxígeno, nitrógeno e hidrógeno, son los más importantes, porque se encuentran en los vegetales en mayor cantidad relativa. El estudio de la fijación de estos elementos en las plantas, o sea el mecanismo por virtud del cual, cada uno de ellos es asimilado por el vegetal, representa un objeto de estudio interesantísimo, más y mejor conocido en el caso del carbono, hidrógeno y oxígeno, que en el del nitrógeno: el gas carbónico, el vapor de agua y el oxígeno libre de la atmósfera, nutren la planta de carbono, de hidrógeno y de oxígeno, por efecto de reacciones que tienen lugar con intervención de algunas radiaciones solares, y mientras que esta asimilación se realiza, el vegetal capta energía solar, realizándose de este modo una nutrición perfecta.

Pero el caso del nitrógeno es muy distinto; el vegetal vive en una atmósfera (el aire) rica en nitrógeno (75,5 por 100 en peso de nitrógeno); pero el vegetal, ni con la intervención de las radiaciones solares le asimila: no puede elaborar con sus materias hidrocarbonadas y el nitrógeno en esa forma, las materias albuminodeas que necesita para su vida, no siendo motivo adecuado para que la asimilación del nitró-

geno libre de la atmósfera se realice, ni la influencia de los rayos solares, ni la energía útil que representa el diferente potencial eléctrico constantemente sostenido por diversas causas, entre las diversas capas o alturas atmosféricas.

Y sin embargo, no puede dudarse que el nitrógeno libre de la atmósfera, de algún modo lo utilizan los vegetales nutriéndose con él; de la realidad de este hecho podemos fácilmente convencernos, así como tampoco puede dudarse, de que no es el vegetal quien directamente asimila el nitrógeno atmosférico. Los suelos forestales dedicados a la alimentación de ganados, proporcionan en forma de tejidos vegetales, el alimento nitrogenado que necesitan para su vida los seres que en ellos pastan, y de este nitrógeno, una gran parte se exporta del terreno en forma de carne, de leche, etc., sin que en el transcurso del tiempo, dispongan aquellas tierras de más abono nitrogenado, que las deyecciones de los animales que allí se alimentan, y no hay que decir que la cantidad de nitrógeno que de este modo se restituye a la tierra, es mucho menor que la que de ella se saca; a pesar de esto, se demuestra por repetidos análisis que la cantidad de nitrógeno que poseen estas tierras, disponible para las necesidades de la vida de las plantas, no varía sensiblemente en el transcurso del año, pues si bien es cierto que algunas épocas disminuye, también lo es, en cambio, que en otras aumenta a pesar de los arrastres de nitrógeno nítrico realizados por las aguas y de las acciones desnitrificantes que de un modo continuo realizan las bacterias de desnitrificación, que en su trabajo bioquímico, descomponen la materia nitrogenada, produciendo nitrógeno libre que vuelve a la atmósfera.

La cantidad de nitrógeno que en muy diversas formas se recoge en las cosechas de todos los cultivos, es siempre mucho mayor que la diferencia entre el nitrógeno total que poseía la tierra antes de la siembra y el que resta después de la recolección, y si la planta cultivada corresponde al

grupo de las leguminosas, se observa el hecho, de que la riqueza en nitrógeno de la tierra después de la recolección es bastante mayor que la que poseía antes de la siembra. En la práctica agrícola este hecho se tiene muy en cuenta para aplicarlo en la rotación de cultivos.

Las indicadas observaciones y otras muchas que pueden hacerse, plantean un estudio de gran interés, cuyo objeto se dirige a conocer cuál es el mecanismo por el cual las tierras y las plantas toman el nitrógeno del aire, pues no puede tener otro origen la mayor parte del que en los tejidos vegetales se encuentra, pues, sin tener en cuenta más que las masas respectivas, no es suficiente el contenido en las materias nitrogenadas orgánicas o minerales, que por cualquier circunstancia se depositan sobre la tierra, para satisfacer las necesidades de la planta.

Aparece como un hecho perfectamente demostrado en la práctica agrícola que, aun cuando no directamente, con el nitrógeno del aire se alimentan las plantas. No nos parece esta ocasión adecuada para reseñar las ideas expuestas y las experiencias realizadas por diversos investigadores para llegar a explicar el mecanismo por el cual, de un modo indirecto, el nitrógeno libre de la atmósfera llega en definitiva a ser asimilado por las plantas; basta a nuestro objeto, señalar el hecho de que casi la totalidad del nitrógeno del aire que asimilan las plantas, procede de las acciones bioquímicas que realizan numerosos microrganismos que, o viven en las tierras, o en las raíces de algunas plantas (caso de las leguminosas). Esta afirmación queda demostrada por los trabajos que inició Berthelot en 1885 y los que después han realizado, entre otros, Hellreigel, Willfarth, Schoesing, Laurent, Winogradsky, Beijerinck, Zipfel, Brown, Freudenreich.

La idea fundamental de que partimos al iniciar nuestras investigaciones sobre el objeto de este trabajo, es la de suponer, que toda causa capaz de excitar la actividad bioquímica

de estos pequeños seres, producirá como efecto, un incremento en la cantidad de nitrógeno atmosférico fijado en la tierra o en la planta y de ésta mayor cantidad de nitrógeno disponible para el vegetal se obtendrá, como consecuencia lógica, un mayor rendimiento en la cosecha.

La importancia que en el orden económico y social tiene este asunto no es preciso encarecerla; es bien conocido el esfuerzo industrial que en la época actual viene realizándose, para obtener materias que sean vehículos en los que, el nitrógeno atmosférico se transporte a las tierras en forma aprovechable por las plantas; las grandes industrias de los nitratos sintéticos y de la cianamida cálcica, responden a este objeto; *pero nos parece más racional, más sencillo y más económico, excitar el mecanismo por el cual se realiza en la Naturaleza la asimilación del nitrógeno del aire por las plantas* aumentando, mediante un catalizador, la velocidad de la reacción bioquímica, por virtud de la cual, se fija en las tierras o en las plantas el nitrógeno del aire.

Los caracteres de los microrganismos fijadores del nitrógeno del aire que hemos estudiado, así como la descripción de los métodos que practicamos para aislarlos partiendo de las tierras o de las raices de algunas leguminosas, la conservación de sus cultivos puros, etc., son antecedentes de este trabajo que no detallamos aquí porque ya los hemos publicado con suficiente detalle de tecnica, en varias comunicaciones que se encuentran en los números correspondientes a los meses de Febrero, Marzo, Abril y Mayo de 1915 del *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia natural.* En las comunicaciones de Marzo y Abril aparecen las microfotografías que obtuvimos de nuestros cultivos puros de algunos microrganismos fijadores del nitrógeno atmosférico, por lo cual no reproducimos aquí la documentación experimental de esta parte de nuestro trabajo, que a quien interese conocerla, encontrará en los números del Boletín citado.

La aplicación a la práctica agrícola de los estudios sobre la fijación del nitrógeno atmosférico por vía bacteriana en las plantas y en las tierras, debe ir, a nuestro juicio, siempre dirigida *a la investigación de las condiciones de medio de cultivo más favorables al desarrollo y a la vitalidad de los microrganismos que poseen la citada función bioquímica.* No es, pues, una solución del problema, según nuestro criterio, el añadir a las tierras o el poner en contacto con las semillas, cultivos más o menos puros y vigorosos de estas bacterias nitrificantes, porque si la tierra a que se añaden es un medio de cultivo adecuado a las exigencias de vida de estos pequeños seres, en ella se encontrarán abundantísimos, y como su poder de multiplicación es muy grande, debe resultar perfectamente inútil el añadir algunos más, y si la tierra de cultivo considerada no posee en su flora bacteriana de estos microrganismos, o los que posee se encuentran degenerados, esto será debido a las malas condiciones de medio que en aquella tierra encuentran, y como estas malas condiciones no han de modificarse por la inoculación, ocurrirá fatalmente que los gérmenes añadidos sucumbirán o arrastrarán, como sus hermanos de raza, una vida desmedrada y raquítica, que no significará para la vegetación una masa apreciable en más de nitrógeno disponible.

Hace ya algunos años que se practican estudios para la aplicación a las tierras de los compuestos de manganeso, considerados como abono complementario o como abono catalítico, según la denominación de Bertrand, cuyos estudios sobre el papel que desempeña el manganeso en la lacasa, fueron el punto de partida de aquellas experiencias. Los primeros trabajos experimentales sobre la aplicación a la práctica agrícola del manganeso como abono complementario

se realizaron en Italia por el Dr. I. Giglioli, de 1897 a 1904, y después en varios países, España entre ellos, se han hecho repetidos ensayos con varios cultivos, casi siempre con buen éxito. Cuantas indicaciones hemos encontrado en muchas publicaciones que hemos podido consultar para explicar cuál puede ser la acción del manganeso, a que pueda atribuirse el éxito de su aplicación como abono complementario, se refieren a suponer que el manganeso obra sobre los vegetales como un catalizador de las variadas reacciones de oxidación que necesita el vegetal para su vida, y que al estimularlas, mejora las condiciones vitales de la planta. El Dr. K. Aso, del Instituto agrónomico de Tokío, observó, a propósito de estas ideas, que la acción oxidante de los jugos vegetales era mucho más intensa en las plantas abonadas con cloruro de manganeso; lo cual prueba que el manganeso ha dado lugar a una mayor producción de oxidasa, o bien acentúa el poder de oxidación de ésta. Se ha comprobado también, que el manganeso se encuentra en los órganos vegetales que presentan mayor actividad fisiológica, o se hallan en época de crecimiento rápido, con todo lo cual queda dicho que lo utilizan las plantas y lo acumulan, aunque en cantidad pequeñísima, durante el proceso de sus fenómenos de nutrición.

Pero estas ideas que sumamente condensadas acabamos de exponer, no aciertan a explicar de un modo completo la acción del manganeso sobre los cultivos a que se aplicó, pues la mayor cantidad o la mayor actividad de las oxidasas que en los vegetales laboran, no bastan para explicar por qué en parcelas de tierra que no se diferencian más que en que en una de ellas se haya adicionado una sal de manganeso, se recojan cosechas más copiosas, siendo evidente que para organizar mayor peso de tejidos vegetales, será preciso una mayor cantidad de nitrógeno. ¿De dónde procede este nitrógeno asimilado por el exceso de cosecha recolectado en la parcela adicionada de sal de manganeso?

Este es uno de los fines inmediatos de nuestro trabajo de investigación: *ese nitrógeno procede del aire y la planta lo tiene disponible, porque el manganeso obra como catalizador en la reacción bioquímica, por la cual algunos de los microrganismos de la flora bacteriana del suelo fijan el nitrógeno del aire, disponiéndolo en tal forma, que es después asimilado por el vegetal.* Creemos haber demostrado experimentalmente esta afirmación.

Es relativamente moderno el estudio que de algunas reacciones bioquímicas se hace, buscando un cuerpo que en estado de conveniente disgregación obre como catalizador; es decir, como materia que tiene la propiedad de modificar la velocidad de la reacción de que está en presencia. Tanto interés concedemos a esta orientación de la moderna bioquímica, que llegamos a suponer que cuantas reacciones tienen lugar en los seres vivos, son siempre modificadas y muchas veces provocadas por agentes catalíticos que para algunos casos se conocen y que en otros permanecen todavía desconocidos. Aplicando estas ideas al estudio de la fijación del nitrógeno del aire en las tierras y en las plantas por vía bacteriana, pensamos, como en la idea más lógica, que en la misma tierra debe encontrarse de un modo constante, aunque en cantidad variable, el catalizador o los catalizadores de esa reacción, y que bien pudiera ser el manganeso; con esta idea comenzamos el trabajo experimental.

Partimos para realizar nuestra investigación de cultivos puros de *Bacillus radicicola* extraído de las nudosidades del trébol rojo y de *Clostridium Pasteurianum* y de *Azotobacter chroococum* extraídos de tierras de labor; sucesivamente iremos detallando los resultados obtenidos.

Bacillus radicicola.

Es este el microrganismo que consideramos como tipo de los que viven en el tejido bacteriano que forma las nudosidades de las raíces de las leguminosas. Le cultivamos en

medio líquido manitado, del que, por análisis previo, conocemos la cantidad de nitrógeno total que posee.

Tomamos masas de 100 cc. de nuestro caldo de cultivo, colocadas en matraces iguales Erlemmeyer con todos los detalles de técnica convenientes que no es preciso detallar aquí; de este modo tienen estos cultivos superficies iguales, que es condición imprescindible para obtener resultados comparables. Sembramos con nuestro cultivo puro cada uno de estos matraces, y dejando uno de ellos como testigo, añadimos en cada uno de los otros siete, dosis crecientes de una disolución valorada de cloruro de manganeso; colocamos los matraces sembrados en la estufa a la temperatura de 22-23°, y transcurridos veinticinco días, los esterilizamos al autoclave, procediendo después a las determinaciones cuantitativas de nitrógeno total, que practicamos por el método de Kjeldahl. Con el objeto de tener mayor seguridad en los resultados analíticos, realizamos varias series de experiencias, pero es suficiente a nuestro objeto detallar los resultados obtenidos en una de estas series, a la que se refiere la gráfica núm. 1.

Nitrógeno total del caldo de cultivo antes de la siembra: 0,0289 gramos.

Resultado de los análisis hechos después del cultivo:

	Nitrógeno total. — *Gramos.*	Nitrógeno absorbido — *Gramos.*
Caldo testigo	0,0320	0,0031
Caldo adicionado de 0,001 grs. de manganeso-ion	0,0325	0,0036
Idem íd. de 0,003 grs. de ídem	0,0381	0,0092
Idem íd. de 0,006 grs. de ídem	0,0385	0,0096
Idem íd. de 0,009 grs. de ídem	0,0330	0,0041
Idem íd. de 0,012 grs. de ídem	0,0327	0,0038
Idem íd. de 0,015 grs. de ídem	0,0324	0,0035
Idem íd. de 0,020 grs. de ídem	0,0310	0,0021

Estos resultados analíticos demuestran: que las bacterias de las nudosidades de las leguminosas absorben el nitrógeno del aire aun en ausencia del manganeso; que el manganeso modifica la velocidad de la reacción, es decir, que es un catalizador de la citada reacción bioquímica; que la máxima absorción de nitrógeno atmosférico por el *Bacillus radicicola* tiene lugar cuando en presencia del medio en que vive el microbio se encuentra una cantidad óptima de manganeso en forma de ion, que por nuestros trabajos está representada por 0,006 grs. por 100.

Herr. Leidreiter, en su Tesis doctoral, establece como consecuencia de sus trabajos experimentales, que un exceso de manganeso es perjudicial en el cultivo de las habas; otros experimentadores han encontrado resultados análogos en cultivos de leguminosas, y estos hechos, con las consecuencias prácticas que de ellos deben deducirse, encuentran explicación y base en nuestro trabajo, del que se deduce que el manganeso, en cantidad excesiva ya determinada en nuestras experiencias, obra como catalizador negativo que refrena la actividad bioquímica de las bacterias fijadoras del nitrógeno del aire que se encuentran en las nudosidades de las leguminosas.

Pero que las sales de manganeso en dosis convenientemente escogida activa la asimilación del nitrógeno del aire en el caso de las leguminosas, según resulta de nuestras investigaciones, es un hecho que experimentalmente ha sancionado la práctica agrícola, según se deduce de las experiencias realizadas por Uchiyama en el Japón en el año 1906, que en cultivos de habas, obtuvo un aumento de producción de 44 por 100.

Clostridium Pasteurianum.

Este microrganismo que fija en la tierra el nitrógeno del aire disponiéndole en forma tal que, previa una transformación bacteriana que también en la tierra se realiza, puede ser asimilado por el vegetal, tiene como catalizador el

manganeso; pero la presencia de este metal es de mucho más interés que en el caso del *Bacillus radicicola;* en efecto, según deducimos de nuestras investigaciones personales, en ausencia del manganeso no fija el clostridium el nitrógeno del aire, mientras que en presencia de este metal le fija en muy apreciable cantidad.

Realizamos con cultivos puros de este *clostridium* varias series de experiencias, dispuestas de modo análogo al que ya hemos rápidamente indicado en el caso anterior; los números que citamos a continuación son los obtenidos en una de las series, y con ellos hemos construído la gráfica número 2.

Nitrógeno total del caldo de cultivo antes de la siembra: 0,0293 grs.

	Nitrógeno total. — *Gramos.*	Nitrógeno absorbido — *Gramos.*
Caldo testigo.....	0,0286	—0,0007
Caldo adicionado de 0,001 grs. de manganeso-ion	0,0310	0,0017
Idem íd de 0,003 grs. de ídem.....	0,0332	0,0039
Idem íd. de 0,006 grs. de ídem.....	0,0334	0,0041
Idem íd. de 0,009 grs. de ídem.....	0,0326	0,0033
Idem íd. de 0,012 grs. de ídem.....	0,0287	—0,0006
Idem íd. de 0,015 grs. de ídem.....	0,0275	—0,0018

Interpretamos estos resultados afirmando: que el *Clostridium Pasteurianum* no funciona en sus cultivos puros como fijador del nitrógeno del aire, pero que en presencia del manganeso realiza esa función asimiladora de nitrógeno; que la acción catalizadora positiva se realiza entre ciertos límites de riqueza en manganeso del medio de cultivo determinados en la experiencia citada, y rebasados estos límites, obra como catalizador negativo; que existe una cantidad óptima de manganeso en esta catalisis, representada, según se deduce de nuestro trabajo, por 0,006 grs. por 100 de metal en forma de ion.

Azotobacter chroococum.

Entre los *Azotobacter* que se encuentran en las tierras de cultivo, es el *chroococum* el que más abunda, o sea el que más importancia tiene como fijador de nitrógeno. En su trabajo bioquímico forma con los hidratos de carbono de las tierras y el nitrógeno atmosférico, moléculas nitrogenadas que alimentan los vegetales, después de la transformación por vía bacteriana de su nitrógeno orgánico en nítrico. Es un diplococo móvil de forma muy característica que debe su movilidad a una pestaña vibrátil, que puede observarse aplicando los convenientes medios de coloración.

Realizamos con este microrganismo varias series de experiencias, análogamente dispuestas a las anteriormente citadas; he aquí los resultados obtenidos en una de ellas:

Nitrógeno total del caldo antes de la siembra: 0,0326 grs. por 100.

	Nitrógeno total. — *Gramos.*	Nitrógeno absorbido — *Gramos.*
Caldo testigo	0,0300	—0,0026
Caldo adicionado de 0,001 grs. de manganeso-ion	0,0332	0,0006
Idem íd. de 0,003 grs. de ídem	0,0371	0,0045
Idem íd. de 0,007 grs. de ídem	0,0349	0,0023
Idem Id. de 0,010 grs. de ídem	0,0342	0,0016
Idem id. de 0,015 grs. de ídem	0,0338	0,0012
Idem íd. de 0,020 grs. de ídem	0,0334	0,0008

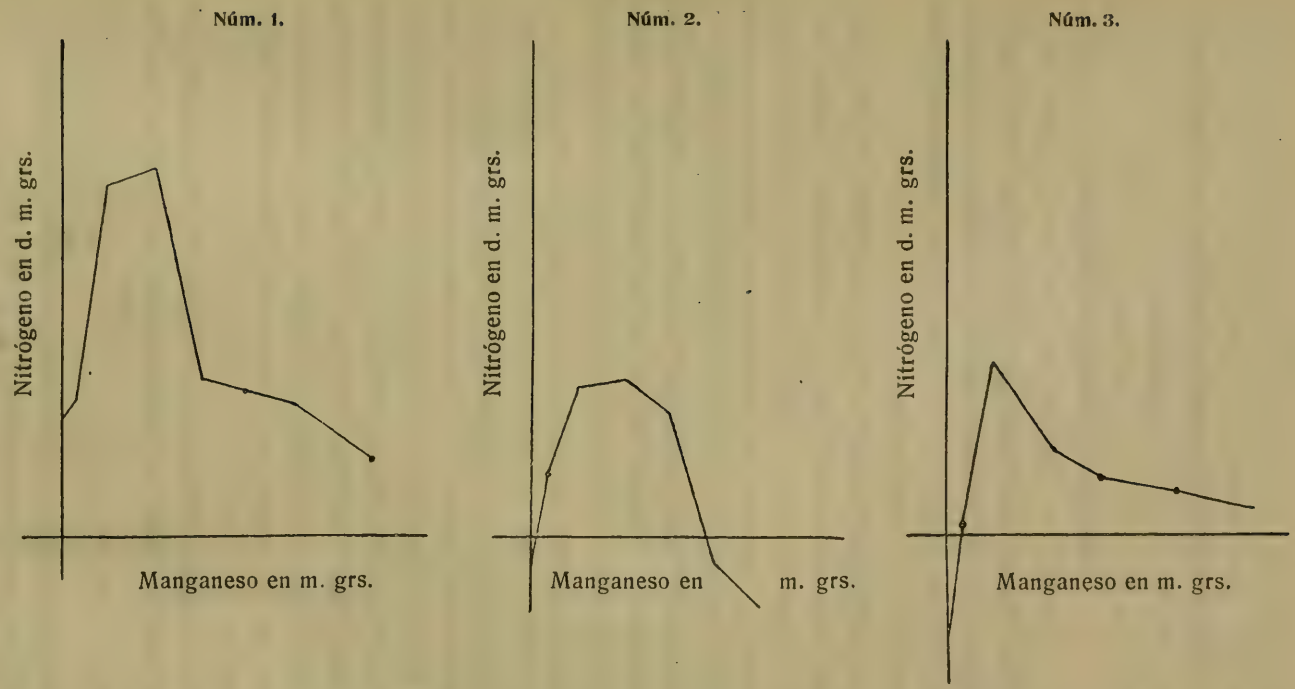
Los resultados obtenidos en este caso son comparables con los obtenidos en el caso del *Clostridium:* el *azotobacter* en cultivo puro no es fijador de nitrógeno; pero en presencia del manganeso lo fija, existiendo para esta acción una dosis óptima de metal ion próximamente igual a la del caso anterior, y también se ve que el manganeso en dosis excesiva, impide por su presencia la fijación de nitrógeno atmosférico por este microrganismo.

Con arreglo a los datos de esta serie de cultivos hemos construído la gráfica núm. 3.

Estos casos de catalisis bioquímica descubiertos por nuestras investigaciones los hemos visto confirmados en experiencias agrícolas, de las que solamente citamos, por estar expresadas en forma concluyente, las realizadas por Loew y Sawa en el Instituto agronómico de Tokío, de las que dedujeron que el manganeso a grandes dosis es perjudicial para las plantas, pero en dosis moderadas aumenta las cosechas. Según nuestros trabajos, interpretamos los resultados obtenidos por Loew y Sawa afirmando que el manganeso en dosis moderadas (de 0,003 grs. a 0,009 grs. por 100 de manganeso-ion) activa la fijación en las tierras del nitrógeno del aire, y por esta mayor cantidad de nitrógeno disponible para la alimentación de las plantas, aumenta las cosechas; pero en grandes dosis ó en dosis excesiva es perjudícial para las plantas, porque impide la reacción bioquímica en virtud de la cual los vegetales asimilan del nitrógeno del aire y se desarrollan mal, por falta de alimento nitrogenado.

Como consecuencia práctica de nuestro trabajo establecemos la conclusión de que para conseguir la máxima fijación del nitrógeno del aire en las tierras y en las plantas debe encontrarse el manganeso-ion en las tierras en cantidad lo más próxima posible a 0,006 grs. por 100. Es cierto que las tierras poseen una cantidad de manganeso mayor que el número que representa la dosis óptima encontrada; pero hay que tener en cuenta que la mayor parte se encuentra en forma de compuesto insoluble, que muy lentamente se solubiliza, y por ello, en la mayoría de los casos, será necesario, previo análisis, adicionar manganeso en forma de sal soluble, para que las catalisis que produce, se realicen con mayor intensidad, pues normalmente el manganeso-ion se encuentra en cantídad menor que la óptima determinada.

GRÁFICAS



Cada miligramo de metal-ion, representa en abscisas 2 m. m. y cada 0,0002 grs. de nitrógeno absorbido, se representa en ordenadas por 0,001 Mgr.

XXXI. — Sobre la teoría científica de la música

(Continuación.)

POR JUAN DOMÍNGUEZ BERRUETA

Esta *conmensurabilidad* análoga a *consonancia,* que los antiguos científicos mencionaban con acierto, nos abre el camino para entrar en la exposición de nuestra teoría *dimensional* del *temperamento.*

Decían los teóricos: el *unísono* y la *octava* son dos intervalos muy *consonantes,* muy *conmensurables,* porque cada *dos* vibraciones de la octava *coinciden* con todas las del *unísono.* El *unísono* y la *duodécima* van después en el orden de la *consonancia* o *conmensurabilidad,* porque cada *tres* vibraciones de la *duodécima* coinciden con todas las del *unísono;* etc. Después la *octava* y la *duodécima* ya no son *tan consonantes,* porque sólo cada *tres* vibraciones de la segunda coinciden con cada *dos* de la primera, etc., etc.

De otro modo: un factor *primo* 2 es perfectamente divisor de todas sus *potencias* 2^2, 2^3, etc. Dos potencias de un mismo factor primo 2^3, 2^5 tienen una *potencia común,* que es una de ellas mismas, que es su *mínimo común múltiplo.*

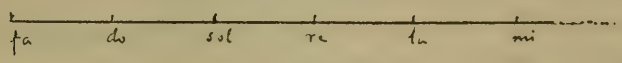
Dos factores primos distintos, 2 y 3, tienen también un *mínimo común múltiplo;* pero ya no es ninguno de los dos factores, sino su producto, y además, como ya hemos visto antes, ya no tienen una *potencia común,* porque son *primos entre sí.*

Esa especie de *inconmensurabilidad* de los números *primos entre sí* tiene su representación geométrica, como la tiene la cantidad *imaginaria* $\sqrt{-1}$ en la *perpendicular* a la dirección positiva, y como la tiene la *inconmensurable* $\sqrt{2}$ en la *diagonal* del cuadrado.

Esto sentado, nos atrevemos a establecer esta idea: la introducción de un factor *primo* en la generación de la gama supone la introducción de una *dimensión* en la representación geométrica, considerando la *cualidad de indivisibilidad* como un coeficiente representable, como el *imaginario*, como el *inconmensurable,* por un cambio de dirección.

Dos puntos determinan una *dimensión*, una dirección.

Las quintas pitagóricas son notas sucesivas, formando acorde binario de dos a dos, como puntos situados en una misma dirección.



(Figura 16.)

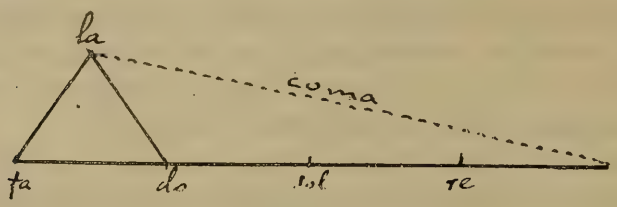
La *coma* pitagórica rebajada a la *duodécima* nota *mi* para continuar la serie de *quintas* no implica cambio de dirección, porque no introduce factor *primo* distinto del 3, que es el que ha engendrado las *quintas*. Además, ni la *tercera mayor*, fa — la $= \frac{81}{64}$, ni la *tercera menor*, re — fa $= \frac{27}{16}$ forman acorde consonante de tres sonidos. La *tercera mayor* $\frac{81}{64}$ produce un *sonido diferencial* de 17 vibraciones, que representan un *armónico* muy elevado, no consonante con ningún sonido fundamental. Lo mismo podemos decir, aunque en menor grado, del *sonido diferencial*, 11, que produce la *tercera menor* pitagórica.

Por otras razones, de números relativamente elevados en los términos de esas fracciones, coincidencia lejana de vibraciones, etc., etc., esas dos *terceras* no son consonantes para formar el acorde trifónico.

No sucede así con las *terceras* toloméicas.

Así como tres puntos no situados en línea recta determinan un plano, una extensión de *dos dimensiones*, un trián-

gulo, así las *terceras* toloméicas con una *quinta* determinan un *acorde* perfecto, consonante, de *tres* sonidos:

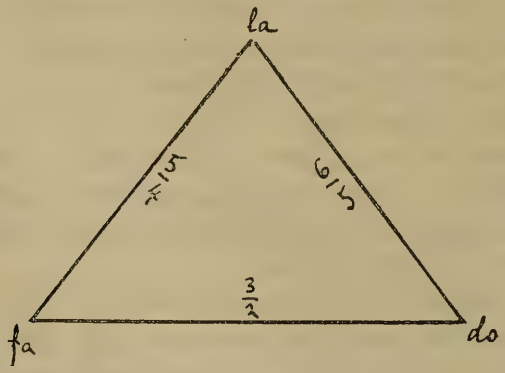


(Figura 17.)

Aquí la *coma* sintómica rebajada a la cuarta *quinta*, implica un cambio de dirección, una dimensión más con la introducción de un factor *primo* distinto, el 5, según hemos establecido antes.

Además, por las distancias acústicas de los intervalos: *quinta* $= \frac{3}{2}$, *tercera mayor* $= \frac{5}{4}$, *tercera menor* $= \frac{6}{5}$, se puede representar el *triángulo musical*, no con la significación que expusimos anteriormente, tomándolo de la *Memoria* de *Moreira de Sá*, sino con otra distinta, puesto que en aquélla se atribuían a los lados del triángulo las *longitudes* correspondientes a los números de vibraciones de las notas que forman el acorde, y nosotros queremos significar más bien las distancias acústicas entre las mismas notas.

He aquí nuestro triángulo del *acorde trifónico*:



(Figura 18.)

El triángulo es siempre posible; el lado mayor $\frac{3}{2}$ es menor que la suma de los otros dos. En efecto:

$$\frac{3}{2} < \frac{5}{4} + \frac{6}{5} = \frac{49}{20}.$$

Hemos calculado, por trigonometría, el valor de los ángulos del triángulo musical, y nos ha resultado:

Angulo en fa = 50° 45′ 10″
Angulo en do = 53° 46′ 27″
Angulo en la = 75° 28′ 43″

* * *

Extendamos ahora nuestra teoría del temperamento a un *factor primo* más, el 7.

Y así como *cuatro* puntos que no están en un plano determinan una figura de *tres dimensiones*, un *tetraedro*, así la introducción del factor primo 7 en la generación de la gama determina, con la *quinta* pitagórica, y con las *terceras* toloméicas, y con la *séptima* y *quinta* y *tercera*, nuevos intervalos, un acorde *tetrafónico* fundamental.

He aquí el esquema del acorde *tetrafónico, tridimensional* (fig. 19):

Los números de los vértices son los *armónicos* generadores de los intervalos respectivos. La nota *la*♯ asignada al 7.° *armónico* es provisional, aproximada. Ya trataremos de eso más adelante. Los números de los lados o aristas del tetraedro son las distancias acústicas (intervalos) relativas.

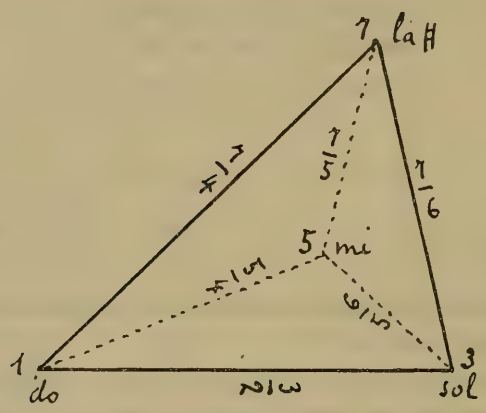
Demostremos primero que el tetraedro es posible, para lo cual basta hacer ver, como sabemos por geometría elemen-

tal, que la suma de los ángulos que concurren en un vértice, el *mi*, por ejemplo, es menor que *4 rectos*.

Para ello tenemos que en el triángulo *do — mi — la* ♯ el lado mayor $\frac{7}{4}$ cumple con la condición

$$\left(\frac{7}{4}\right)^2 < \left(\frac{5}{4}\right)^2 + \left(\frac{7}{5}\right)^2,$$

luego el ángulo en *mi* de ese triángulo (que es el mayor del



(Figura 19.)

mismo) es agudo. Por la misma razón en el triángulo *mi — sol — la*♯ el lado mayor $\frac{7}{5}$ cumpliendo con la condición:

$$\left(\frac{7}{5}\right)^2 < \left(\frac{6}{5}\right)^2 + \left(\frac{7}{6}\right)^2$$

nos dice que el ángulo en *mi* de ese triángulo (que es el mayor del mismo) es agudo. Respecto al otro triángulo *do — mi — sol*, del *acorde perfecto trifónico*, ya hemos visto anteriormente que es *acutángulo* también.

Por tanto, los tres ángulos agudos que concurren en cada

vértice suman menos de 4 rectos, y el tetraedro es posible.

Vamos ahora a explicar la aplicación de nuestra teoría del *temperamento* al acorde *tetrafónico,* es decir, vamos a establecer la *coma tetrarmónica,* si la podemos llamar así, por componerse de *cuatro armónicos* 2, 3, 5, 7.

Sea para ello la fórmula general:

$$3^m = 2^n \,.\, 5^p \,.\, 7^q \,.\, \text{coma}.$$

A esa ecuación la hemos dado nosotros solución con los siguientes valores para los exponentes indeterminados:

$$m = 2\,;\, n = 5\,;\, p = -2\,;\, q = 1\,.$$

De donde resulta:

$$3^2 = 2^5 \,.\, 5^{-2} \,.\, 7 \,.\, \text{coma}.$$

Por tanto, la coma tetrarmónica será igual:

$$c = \frac{3^2 \,.\, 5^2}{2^5 \,.\, 7} = \frac{225}{224}.$$

Antes de interpretarla y traducirla en esquema, así como el temperamento que de ella resulta, digamos en pocas palabras la idea que nos ha llevado a obtener su valor.

Constantes en nuestro pensamiento de no innovar en nada sin apoyarnos firmemente en los cimientos del pasado científico, hemos partido de la invención de la *coma sintónica.*

Así como por la coma sintónica el *la* pitagórico, que se elevaba por la generación de quintas sucesivas a $\frac{27}{16} = \frac{5{,}4}{3{,}2}$ se reduce a $\frac{5}{3}$, así, por la *coma tetrarmónica* el *fa♯,* que por una de las formas del *temperamento* toloméico

se eleva a $\frac{45}{25} = \frac{7,5}{5,3}$; y en otra de las formas del mismo temperamento se convierte en la fracción $\frac{25}{18} = \frac{7 \times 3 + 4}{5 \times 3 + 3}$, se reduce a $\frac{7}{5}$.

Es decir, que la introducción de la coma sintónica redujo a la forma simple $\frac{5}{3}$ un intervalo que en términos mayores se acercaba a él.

Y la introducción de la coma tetrarmónica reduce a la forma simple $\frac{7}{5}$ un intervalo que en términos mayores se acercaba a él.

Es de notar también cómo la fracción más sencilla que se obtuvo con la primera coma tiene en su numerador el nuevo *armónico* 5 y en el denominador el *armónico* antiguo; del mismo modo en la fracción $\frac{7}{5}$ el numerador es el nuevo armónico 7, y el denominador es el *armónico* de la gama anterior 5.

De modo que al llegar en el temperamento toloméico al *fa*♯ $= \frac{45}{32}$, en lugar de quitarle una *coma sintónica* para convertirlo en el otro *fa*♯ $= \frac{25}{18} = \frac{45}{32} : \frac{81}{80}$, le quitamos la *coma tetrarmónica* y se reduce a la fracción simple.

Análogamente a lo que hicimos con las comas anteriores, daremos varias formas a la *coma tetrarmónica* para traducir el nuevo *temperamento*.

La fórmula que nos ha servido para obtenerla puede expresarse así:

$$\frac{3^2}{2^2} = 2^3 \cdot \frac{1}{5^2} \cdot 7 \cdot x \,. \qquad [A]$$

Y pasando al primer miembro el factor 5^2, y dividiendo por 2^4 los dos miembros, resulta:

$$\frac{3^2}{2^2} \times \frac{5^2}{2^4} = \frac{7}{2} . x = 2 . \frac{7}{4} . x.$$

La traducción al lenguaje de la música de esta forma de la coma es la siguiente: «Dos quintas ascendentes, más dos terceras toloméicas, menos una octava, menos la coma tetrarmónica, producen la séptima trifónica $\frac{7}{4}$.»

Demos otra expresión a la fórmula [A] multiplicando los dos miembros por $\frac{3^5}{2^5}$.

$$\frac{3^7}{2^7} = 2^3 . \frac{3^5}{2^5} . \frac{7}{5^2} . x.$$

Y esto es igual a:

$$\frac{3^7}{2^7} = 2^4 . \frac{3^4}{5 . 2^4} . \frac{7 . 3}{5 . 2^2} . x = 2^4 . \frac{81}{80} . \frac{21}{20} . x. \qquad [B]$$

La traducción es la siguiente: «Siete quintas ascendentes, menos cuatro octavas, menos una coma sintónica, menos una coma tetrarmónica producen el semitono tetrafónico $\frac{21}{22}$.»

Dividiendo los dos miembros de la ecuación [B] por la fracción $\frac{3^2}{2^2}$ y combinando ordenadamente los factores del segundo miembro, tendremos:

$$\frac{3^5}{2^5} = 2^3 . \frac{81}{80} . \frac{14}{15} . x. \qquad [C]$$

La traducción es la siguiente: «Cinco quintas ascendentes,

menos tres octavas, menos una coma sintónica, menos una como tetrarmónica, producen el apotome tetrafónico $\frac{15}{14}$ invertido.»

Multiplicando miembro a miembro las igualdades [B] y [C], y simplificando los productos fraccionarios del segundo miembro, resulta:

$$\frac{3^{12}}{2^{12}} = 2^{7} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{81}{80} \cdot \frac{63}{64} \cdot x. \qquad [D]$$

Traduciendo esta fórmula se obtiene: «Doce quintas ascendentes, menos siete octavas, menos dos comas sintónicas, menos una coma tetrarmónica, producen el cuarto de tono tetrafónico $\frac{64}{63}$, invertido.»

Observando cualquiera de las cuatro fórmulas obtenidas con la coma tetrarmónica vemos que la idea cíclica tiene, no el sentido de volver al *unísono* para repetir la serie de *quintas* como en el temperamento pitagórico, sino que, como hemos visto en el temperamento toloméico y más elevado todavía por la introducción de un armónico nuevo, la idea cíclica se combina con la generación de otros intervalos: $\frac{7}{4}, \frac{21}{20}, \frac{15}{14}, \frac{64}{63}$ para volver al unísono por mediación de la nueva coma.

No insistiremos en buscar intervalos más pequeños aplicando el temperamento a mayor número de *quintas* ascendentes o descendentes, porque no obtendríamos otro resultado, análogamente a como demostramos para el temperamento toloméico, que distanciar más la primera nota de la última; por ejemplo: *sol* ♭ - *mi* ♯ > *fa* — *mi* ♯. &.

*
* *

Finalmente, para terminar este artículo y antes de entrar en las demostraciones dimensionales de nuestros acordes tetrafónicos, a los que dedicaremos el siguiente, demos una idea esquemática del temperamento que hemos adoptado combinando las fórmulas [B], [C] y [D] anteriormente expuestas.

El temperamento tetrafónico puede simbolizarse así:

sol $\flat_3$ — *re*$\flat$ — *la* $\flat_2$ *(coma tetrarmónica)* LA $\flat_2$ — *mi* $\flat$ — *si* $\flat_1$ *(coma sintónica)* SI $\flat_1$ — *fa*$_0$ — *do*$_1$ — *sol* — *re*$_2$ — *la (coma sintónica)* la — *mi*$_3$ — *si* — *fa* $\sharp_4$ — *(coma tetrarmónica),* FA $\sharp_4$ — *do* $\sharp_5$ — *sol* $\sharp_6$ *(coma sintónica)* sol $\sharp_6$ — *re* — *la*$\sharp$ — *mi* $\sharp_7$.

El cual lo podemos considerar compuesto de tres períodos:

I= *sol*$\flat$ — *re*$\flat$ — LA $\flat$ — *mi* $\flat$ — si $\flat$ — *fa.*
II= *fa* — *do* — *sol* — *re* — la — *mi* — *si* — *fa*$\sharp$.
III= FA$\sharp$ — *do*$\sharp$ — sol$\sharp$ — *re*$\sharp$ — *la*$\sharp$ — *mi*$\sharp$.

El primero comprende *cinco quintas* menos una *coma sintónica* y otra *tetrarmónica.* Pertenece a la fórmula [C].

El segundo comprende *siete quintas,* menos una *coma sintónica.*

Considerando aisladamente este período, pertenece a la forma sintónica o toloméica (la nota la representa una reducción de una coma sintónica al *la).* Pero considerando ese mismo período, como realmente lo es, terminado en FA$\sharp$ (que representa la reducción de una coma tetrarmónica hecha al FA$\sharp$), entonces ese período pertenece a la fórmula [B].

El tercer período, como el primero, es de la forma [C]. Y la suma de primero con segundo, o de segundo con tercero, componen la fórmula [D].

La distancia entre las notas *mi*$\sharp$ — *sol* $\flat$, primera y última de la suma de los tres períodos en nuestro temperamento,

es mayor, como ya hemos indicado antes, que la distancia *mi*♯ — *fa*, primera y última de la suma de los períodos segundo y tercero, o que la distancia *fa*♯ — *sol*♭, primera y última de la suma de los períodos primero y segundo.

Una observación haremos finalmente: que la nota sol♯, que figura en el esquema anterior para que se vea la sucesión de *quintas* que pueden engendrar la gama, no es nota adoptada por nosotros, como demostraremos después, al considerar la generación dimensional de los acordes en el temperamento tetrarmónico.

EL ACORDE TETRAFÓNICO

El acorde 4 — 5 — 6 — 7 = *do* — *mi* — *sol* — *la*♯ ya fué estudiado por *Cornu* y *Mercadier*, a pesar de lo partidarios de la gama pitagórica que eran estos físicos, y admitieron que comparado con el acorde de séptima de *dominante* de *fa*, que es $4 - 5 - 6 - \frac{64}{9} =$ *do* — *mi* — *sol* — *si*♭, era más armónico, más consonante.

Boutroux (*) opina también por la mayor consonancia del acorde 4 — 5 — 6 — 7. Y afirma, con razón, que si el de *séptima de dominante*, *do* — *mi* — *sol* — *si*♭, tiene su resolución en el de *tónica*, *fa* — *la* — *do*, el del *séptimo armónico* tiene su resolución en el acorde *do* — *mi* — *sol*. Es decir, que puede considerarse el 4 — 5 — 6 — 7 como de *séptima de tónica* o *séptima tonal*, como lo llaman otros.

En realidad ese tránsito del *do* — *mi* — *sol* — *la*♯ (ya hemos dicho que esta nota *la*♯ aplicada al 7.° armónico es provisional) al acorde *do* — *mi* — *sol* no es una resolución en el sentido que hasta ahora se ha dado a la palabra. Porque en nuestra teoría, confirmada por razones matemáticas y por

(*) *La géneration de la gamme diatonique* (1900).

observaciones experimentales, el acorde 4 — 5 — 6 — 7 es perfectamente *consonante* y no tiene por qué buscar una *resolución* en el acorde perfecto trifónico 4 — 5 — 6 = *do* — *mi* — *sol*. Quien opina todavía por la resolución es que tiene el prejuicio del 7.° armónico como *nota* disonante que debe desaparecer del acorde 4 — 5 — 6 — 7 para dar lugar a la consonancia perfecta *do* — *mi* — *sol*.

Boutroux hace constar cómo con el acorde de *séptima tonal* se podrían engendrar nuevas notas utilizando los factores *primos* de esta forma:

1 — 3 — 5 — 7	21 — 35 — 49
do — *sol* — *mi* — *la*♯	*fa* — *re* — *la*♭

Pero esta generación de la gama envuelve el error de la transposición, y el de alterar sin bastante fundamento notas tan primordiales como el *fa*, el *re*, etc., etc.

Algunos autores que han apreciado la consonancia innegable del acorde 4 — 5 — 6 — 7 = *do* — *mi* — *sol* — *la*♯, tratan de explicarse su armonía diciendo que la nota *la*♯ = $\frac{7}{4}$ (respecto al *do* tomado como unidad) se diferencia muy poco, una *coma*, del *si*♭ de la gama pitagórica o toloméica.

No es exacto: la relación entre el 7.° armónico y esas *séptimas disminuídas* es la siguiente:

$$\frac{9}{5} : \frac{7}{4} = \frac{36}{35} \text{ (para el } si\flat \text{ de } Tolomeo.)$$

$$\frac{16}{9} : \frac{7}{4} = \frac{64}{63} \text{ (para el } si\flat \text{ de } Pitágoras.)$$

Y estos intervalos $\frac{64}{63}$ y $\frac{36}{35}$ están algo lejos de equivaler a una *coma*.

Son más bien *cuartos de tono*, sobre todo el segundo.

No, el *acorde tetrafónico* 4 — 5 — 6 — 7 tiene su expli-

cación por generación directa de *armónicos*, y su última nota *la*; no es accidental diferenciada en una *coma* de ninguna otra nota fundamental, sino que lo es ella misma como base de un acorde perfecto de cuatro sonidos, y base de un temperamento tridimensional.

Con razón observa *Gandillot* (ob. cit.) contra los que creen que el nuevo acorde 4 — 5 — 6 — 7 pudiera considerarse como de *séptima de dominante*, que la relación $\frac{64}{63}$ no es una *coma*, y que no resuelve en la *tónica* de esa *dominante 4*, sino en esa misma nota *4* como tónica; y que la *quinta disminuída* $\frac{16}{9} : \frac{5}{4} = \frac{64}{45} = mi — si\flat = si — fa =$ & es la que hace que el acorde actual de *séptima de dominante do — mi — sol — si* $\flat$ = *sol — si — re — fa* = &, adquiera su carácter de disonancia sin preparación, resoluble en el acorde *do — fa — la = sol — do — mi* = &.

En cambio no opinamos con *Gandillot* en mencionar los *armónicos* 7, 11, 13, para formar un acorde, que tuviera derecho a ser considerado, con algún sentido, como el formado por los *armónicos* 1 3 — 5 — 7 que estamos estudiando en sus relaciones con el de *séptima de dominante* actual.

De los factores *primos* 11, 13, etc. que corresponden a sonidos *armónicos* demasiado alejados del *unísono* ya diremos al tratar *especialmente* del 7.° *armónico*, que no es tan fácil asimilarlos en sus propiedades musicales a los sonidos fundamentales de nuestro *acorde tetrafónico:* 1 — 3 — 5 — 7.

La *séptima tonal* $\frac{7}{4}$, dice muy bien el doctor Anglas (ob. cit.) fué vencida «extrañamente» por la *séptima sensible* $\frac{15}{8}$ dando lugar a la introducción del *tritono* en la armonía. Además la *nota sensible* debió también su aparición en la gama a la preocupación de los *tetracordios:* do — re —

mi — fa = sol — la — si — do. Y a la rutina de la transposición de los acordes: do — mi — sol = fa — la — do = sol si — re.

Es digna de tenerse en cuenta la observación de *Lalo*, que hace notar lo siguiente: la *séptima natural* $\frac{7}{4}$, y el *tritono* $\frac{7}{5}$ forman un grado dc *fusión* (según la teoría de Stumpf) entre las *disonuncias* y las *consonancias*, »un hecho que la práctica musical actual no ha soñado en utilizar todavia». Y es muy notable que *Gaudencio* (siglo III) clasificase el *tritono* con el *diatono* entre las *parafonias* o *consonancias*, sin duda teniendo en cuenta, no el *diatono* pitagórico $\frac{81}{64}$ francamente *disonante*, ni el *tritono* toloméico $\frac{45}{32}$, sino el *diatono* y el *tritono* naturales $\frac{5}{4}$ y $\frac{7}{5}$, siendo así que este último con sus sonidos *resultantes*, *aditivo* y *sustractivo*, *12* y *2*, produce el acorde de *séptima natural* 4 – 5 — 6 — 7. [El sonido *12* está tomado en octava inferior, *6*.]

Por nuestra cuenta añadiremos que, en efecto, $\frac{7}{4}$ puede llamarse *séptima natural*, dada la generación de intervalos por los *armónicos*, y el intervalo $\frac{7}{5}$ *tritono natural* también. Y si un autor del siglo III se atrevía a considerar como *semiconsonancia* a ese *tritono*, juntamente con la *tercera mayor* $\frac{5}{4}$, no es mucha osadía que en el siglo XX nos atrevamos a asegurar que tan *consonancia* como la *tercera mayor*, hoy admitida por todos, debe ser para la música actual y futura el *tritono natural* (o *armónico* si se prefiere llamarlo así) $\frac{7}{5}$, y la *séptima tonal* (o *armónica*) $\frac{7}{5}$.

Y añadiremos, adelantando una idea, que el *acorde tetra-*

fónico, 4 — 5 — 6 — 7, es perfectamente consonante hasta en sus intervalos componentes:

$$\frac{5}{4}, \frac{3}{2}, \frac{7}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}.$$

[Este último intervalo, un *semiditono inferior*, que podemos considerar como la última de las *consonancias*, siendo la menor de las *terceras*, y perteneciendo ya el siguiente intervalo $\frac{8}{7}$ (en el orden de sencillez de los términos de la fracción) al grupo de los *tonos* o *segundas*, *mayores* y *menores*].

(Continuará.)

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXVIII. —Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia décimatercera 629

XXIX.—Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia) (continuación), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 655

XXX.—El manganeso como catalizador de las reacciones bioquímicas, por las cuales, el nitrógeno atmosférico, por vía bacteriana, es asimilado por las plantas, por *Antonio de Gregorio Rocasolano*..... 681

XXXI.—Sobre la teoría científica de la música (continuación), por *Juan Domínguez Berrueta* 694

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, 1,50 pesetas.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

FEB 5 1926
National Museum

TOMO XIV.—NÚMERO 11.
MAYO DE 1916

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimacuarta.

SEÑORES:

Empezamos, en esta conferencia, el estudio de un ejemplo más, que será el cuarto de la teoría cinemática de los gases.

Procedemos siguiendo el método de la obra de mister Watson, que es la que nos ha de servir de guía en una buena parte de las conferencias de este curso, por medio de ejemplos, partiendo del más sencillo y elevándonos paso a paso a problemas más generales.

Así, en el primer ejemplo, suponíamos que el gas estaba formado de un número enorme de esferillas sumamente pequeñas, que representaban sus moléculas, las que se agitaban en todos sentidos, las que chocaban unas con otras, las que llegaban, por último, a una especie de equilibrio o estado permanente de agitación, siempre igual asimismo e igual en todas las regiones del espacio en que el gas se extendía.

Las esferillas eran todas iguales, eran homogéneas, tenian la misma masa, y por de contado el conjunto de sus volúmenes *era muy pequeño en comparación* con el espacio total.

Después consideramos dos sistemas de esferillas; en cada uno de ellos se verificaban las condiciones que acabamos de expresar, es decir, que cada sistema estaba formado de

esferillas muy pequeñas, iguales, homogéneas y de la misma masa; pero las esferillas de un sistema eran distintas de las del otro; tenían distinto radio y distinta masa; y siempre el espacio de los huecos, por decirlo de esta manera, era muy superior a la suma de los volúmenes de todas las esferillas.

Por fin, en el tercer ejemplo que hemos estudiado, y que era como una preparación para ejemplos de más generalidad, suponíamos un sistema o dos sistemas, o, si se quiere, un número cualquiera de sistemas; para fijar las ideas podemos suponer que son dos, como habíamos hecho en el ejemplo precedente.

Pero estos sistemas no estaban formados por esferillas, sino por discos circulares, elásticos, como las esferillas precedentes, y moviéndose en un plano, con agitación incesante, chocando unos con otros, hasta llegar a un estado de movimiento constante: estadísticamente constante, y en conjunto y en sus partes siempre igual a sí mismo.

Y al llegar a este ejemplo introducíamos algunas modificaciones preparatorias, en cierto modo, para tratar ejemplos más generales.

Recordemos bien las condiciones de este problema.

Los discos eran circulares y elásticos; pero no eran homogéneos, de suerte que la materia de dichos discos no estaba distribuída uniformemente en su total superficie.

Así es que el centro de gravedad no coincidía con el centro de figura.

Tal circunstancia introducía una modificación en este problema, respecto a los problemas anteriores, porque en estos últimos no había para qué tener en cuenta el movimiento de rotación de las esferillas; los choques eran centrales y como las esferillas eran homogéneas, dichos choques no introducían movimientos de rotación.

Además, suponíamos que las esferillas eran perfectamente lisas, de suerte que en los choques no habia que contar para nada ni con la adherencia ni con el rozamiento, y así

los impulsos que el choque comunicaba eran, como hemos dicho, siempre centrales.

Por fin, las tres variables del movimiento eran las tres componentes u, v, w del centro de cada esferilla.

Estas constituían como un conjunto de puntos, que eran sus centros.

No sucedía lo mismo en el problema de los discos. Los choques, en efecto, eran centrales, porque eran circulares todos los discos; pero la velocidad del choque en la línea de los centros, suponiendo, para fijar las ideas, que ésta fuera paralela al eje de las x, no eran sólo u y v, sino que era preciso tener en cuenta la componente paralela a esta línea de los centros, que introducía el movimiento de rotación.

Y esto era fundamental en dicho problema, y es fundamental en el problema que hoy nos proponemos estudiar.

Es un problema análogo al de los discos, pero con mayor grado de generalidad.

*
* *

Empecemos, pues, el estudio del

Cuarto ejemplo de la teoría cinemática de los gases.—Suponemos que las moléculas de la masa gaseosa, cuyo movimiento vamos a estudiar, son cuerpos muy pequeños.

Todavía suponemos que son de una elasticidad perfecta y lisos en su superficie, de suerte que cuando se verifican choques no se desarrollan ni rozamientos ni adherencias; pero respecto a sus formas, generalizamos las de los ejemplos anteriores: ni son esferillas ni son discos.

Su forma es cualquiera, pero continua, es decir, que por una superficie continua están terminados.

La forma de esta superficie puede ser arbitraria, y no necesitamos definirla.

También consideraremos varios sistemas de estos cuerpecillos; pero supondremos que en cada sistema todos estos cuerpecillos son iguales entre sí: iguales en la forma, iguales en las dimensiones e iguales en la distribución de materia.

Tomando dos de ellos, con la imaginación puede suponerse, que superponiéndolos convenientemente coinciden en absoluto, y que, por tanto, coinciden sus centros de gravedad.

Esto para cada dos partículas de un sistema.

En otro sistema sucederá lo mismo; pero los cuerpecillos del segundo sistema podrán ser de todo punto distintos de los del primero: distintos en forma, en dimensiones y en distribución de materia.

Vamos generalizando paso a paso: no podemos, ni conviene para la enseñanza, llegar de un golpe al mayor grado de generalización.

Y expuestas estas ideas, entremos ya en materia.

El problema que hemos resuelto siempre, ya para las esferillas de uno o varios sistemas, ya para los discos, era éste.

Determinar la densidad de velocidades de cada grupo de elementos comprendidos en los límites (l).

Por ejemplo: tratándose de esferillas homogéneas, determinar la función de u, v, w, que da el número de esferillas, cuyas velocidades están comprendidas entre

$$u \quad \text{y} \quad u + \partial u$$
$$v \quad \text{y} \quad v + \partial v$$
$$w \quad \text{y} \quad w + \partial w.$$

En el fondo es lo mismo que si dijéramos: determinar el número de esferillas en que la velocidad tiene por componente u, v, w.

Valga un ejemplo:

Si se quiere saber en una serie de puntos distribuídos

sobre la línea AB (fig. 34) cuál es la ordenada y, que tiene por abscisa x, y la curva está trazada, la ordenada MP resolverá el problema, y su valor se obtendrá substituyendo en la ecuación de la curva

$$y = f(x)$$

en vez de x el valor OP.

Pero si los puntos en cuestión $M\,m\,M'$ no están distri-

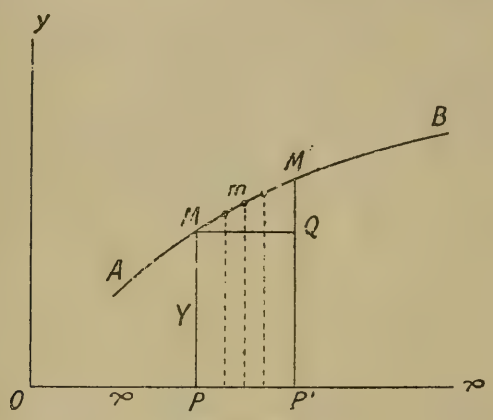


Figura 34.

buídos de una manera continua, el problema puede presentarse de otro modo, o mejor dicho, el problema será distinto. Puede decirse: determinación del número de puntos m, cuya abscisa esté comprendida entre OP y $O'P'$, y las ordenadas entre MP y $M'P'$. En este caso, si la distribución es homogénea en el pequeño intervalo MM', el número de puntos m o de ordenadas y, podrá representarse, salvo una constante, por el rectángulo $MPP'Q$, o sea

$$MP \cdot PP' = f(x)\,\partial x.$$

De suerte que resolver este problema es conocer la curva AB o determinar su ordenada y en función de x.

Los dos problemas van a la par: la determinación de la curva o la determinación de los puntos m en un intervalo determinado.

Pues una cuestión análoga es la que tenemos siempre que resolver en esta teoría cinemática de los gases, y recuérdese a este propósito el método del diagrama, que aun nos parece más claro.

El procedimiento que hemos de aplicar es enteramente

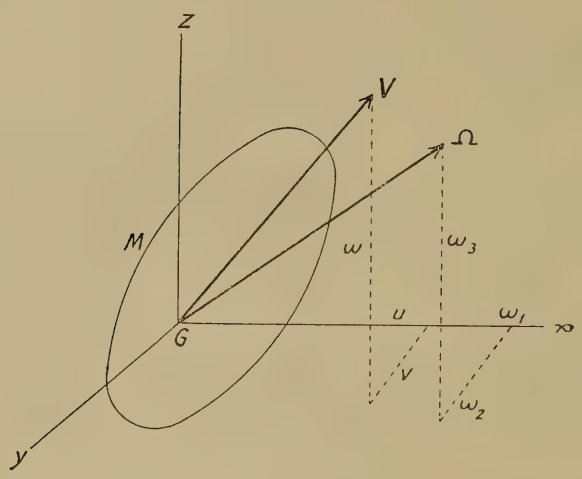


Figura 35

análogo al que ya hemos empleado; pero como los átomos del gas que vamos a considerar, que continúan siendo sólidos y elásticos, son pequeños sólidos de una forma cualquiera, antes de abordar de lleno el problema tenemos que recordar algunas definiciones y algunos principios de la mecánica de los cuerpos sólidos.

*
* *

Sea (fig. 35) M un cuerpo sólido de cualquier forma, pero terminado por una superficie continua.

Sea G su centro de gravedad, que lo tomaremos por origen de coordenadas, y sean x, y, z tres ejes coordenados trirrectangulares.

En un instante cualquiera ∂t el movimiento del sólido estará determinado, en primer lugar, por un movimiento de traslación de todo el sólido.

Supongamos que la velocidad en dicho instante esté representada por la recta $G\,V$, cuyas tres componentes paralelas a los ejes designaremos por u, v, w.

Por virtud de este movimiento de traslación todos los puntos del cuerpo tienen velocidades iguales y paralelas a V, y en el intervalo de tiempo ∂t todos trazan rectas también iguales y paralelas, cuya magnitud será

$$V \partial t.$$

Pero el cuerpo puede tener además un movimiento de rotación alrededor de G, es decir, del centro de gravedad, y esta rotación se demuestra fácilmente que está representada por una rotación instantánea alrededor de una recta $G\,\Omega$ que pase por dicho centro de gravedad. Su dirección es la que marca el eje instantáneo de rotación y su longitud la magnitud de dicha velocidad de rotación por unidad de tiempo.

Un punto cualquiera del cuerpo a la distancia r del eje trazará un arco infinitamente pequeño

$$\Omega\, r\, \partial t$$

en el intervalo ∂t.

Dicha rotación alrededor del eje instantáneo Ω se demuestra, y hemos demostrado en varias conferencias, que puede substituirse por tres rotaciones simultáneas o sucesivas al-

rededor de los ejes coordenados, que se obtienen determinando las componentes de Ω con relación a dichos tres ejes.

Si estas componentes o proyecciones se representan por ω_1, ω_2, ω_3, la rotación alrededor del eje $G\Omega$ podrá substituirse por las tres rotaciones

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3$$

alrededor del eje de las x, del eje de las y, y del eje de las z.

Claro es que tales cantidades representan la rotación por unidad de tiempo; los caminos recorridos, los arcos realmente descritos alrededor de estos ejes, dependerán de la distancia del punto a dicho eje y tendrán como factor ∂t.

Por ejemplo, llamando r a dicho radio, para la rotación ω_1 el arco descrito será

$$\omega_1 \, r \, \partial t.$$

Lo mismo podemos repetir para las otras dos rotaciones.

En suma, en el intervalo de tiempo infinitamente pequeño ∂t, el movimiento del cuerpo está definido por las dos rectas

$$GV = V, \qquad G\Omega = \Omega.$$

La primera representa la velocidad de traslación, que en estilo moderno puede decirse que es el vector de traslación; la segunda representa un giro alrededor del eje instantáneo y, por tanto, alrededor del centro de gravedad.

Pero en vez de las dos rectas V, G podemos substituír sus componentes, y diremos que el movimiento del cuerpo está definido por tres traslaciones

$$u, v, w$$

paralelas a los tres ejes coordenados x, y, z, que pasan por el centro de gravedad.

Y por tres rotaciones instantáneas

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3$$

alrededor de los tres ejes coordenados, que también pasan, como hemos especificado, por el centro de gravedad G del del mismo cuerpo. También podemos decir que ω_1, ω_2, ω_3 son las componentes del vector de rotación.

Respecto a la elección del origen G y a la posición de los vectores V y Ω, pueden establecerse varios teoremas interesantes; pero nosotros, de toda esta teoría, sólo tomamos lo puramente preciso para nuestro objeto.

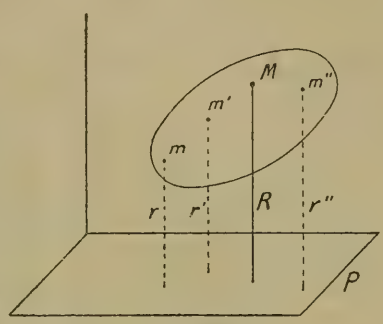


Figura 36

Diremos, pues, en resumen, que todas las moléculas del gas de que se trata (gas hipotético compuesto de moléculas elásticas y sólidas) se mueven en el espacio con movimientos que, en cada instante, están definidos por las dos rectas V, Ω.

Pero aún tenemos que precisar más la definición de los ejes coordenados, y para ello necesitamos recordar algo, aunque sea muy poco, sobre la teoría de los momentos de inercia.

Momentos de inercia.—Primero: Se llama momento de inercia de un sistema o conjunto de masas m, m', m'' ..., con relación a un plano P (fig. 36), la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de su distancia r al plano, medida naturalmente por la perpendicular.

Es decir,

$$\text{momento de inercia } (m, m', m'' \ldots) = mr^2 + m'r'^2 + \\ + m''r''^2 + \ldots = \Sigma\, mr^2.$$

Hemos expresado abreviadamente esta suma por el signo Σ.

Si las masas m, m', m'' ..... son elementos de una masa M comprendida en la superficie S, lo que en el caso precedente era una suma Σ se convertirá en una integral, cada masa m será, naturalmente, una diferencial, y podremos escribir

$$\text{momento inercia } M = \int_v \partial m r^2$$

extendiéndose la integral a todo el volumen encerrado en la superficie S.

Análogamente a lo que se hace en los problemas sobre centros de gravedad, y en general siempre que se buscan cantidades medias, se podrá determinar una distancia R tal, que un punto en que se reunieran todas las masas y que distase R del plano P tuviera *él solo* el mismo momento de inercia que todas las masas dadas, lo cual se expresa por la ecuación

$$\Sigma\, mr^2 = R^2\, \Sigma\, m$$

o en el caso de una masa continua, por esta otra

$$\int \partial m r^2 = R^2 \int \partial m = MR^2.$$

Esto es lo que hemos representado con las mismas letras en la figura 36.

Segundo: Se llama momento de inercia de un conjunto de masas m, m', m'', ..., reconcentradas, como en el caso anterior, en un punto cada una, respecto a un eje X (fig. 37),

a la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de la distancia al eje.

Es decir,

$$mr^2 + m'r'^2 + m''r''^2 + \ldots$$

o bien

$$\Sigma\, mr^2.$$

Si las masas constituyen un conjunto continuo, o sea un volumen comprendido en la superficie S, el momento de inercia se expresará, no por una suma, sino por una integral

$$\int_v \partial m r^2.$$

Lo mismo que en el caso precedente, podemos buscar una distancia R tal, que reconcentrando en un punto todas las masas y colocando ese punto a la distancia R del eje tenga dicho punto material el mismo momento de inercia que las masas primitivas. La distancia R se determina por la ecuación

$$\Sigma\, mr^2 = R^2\, \Sigma\, m = R^2\, M$$

o bien si las masas se extienden de una manera continua en un volumen V

$$\int_v \partial m r^2 = M R^2.$$

Las ecuaciones en este segundo caso son idénticas a las del primero en la forma; pero fíjense mis alumnos en que representan sistemas geométricos distintos. Las r, en el pri-

mer caso, son paralelas y perpendiculares a un plano P; en el segundo caso no son paralelas, pero son todas perpendiculares a una recta X.

Advirtamos, por último, que el punto M en la figura 36 no tiene posición determinada, basta con que diste del plano P la magnitud R.

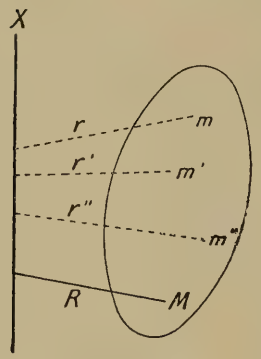


Figura 37

Y asimismo el punto R de la figura 37 tampoco está determinado de posición, basta con que diste R del eje.

Tercero: Se llama momento de inercia de un sistema de puntos o masas materiales reconcentradas en puntos m, m', m'', ... con relación a un centro O, la suma de los productos de cada masa por el cuadrado de la distancia a este centro, de modo que tendremos (fig. 38)

$$\text{momento de inercia de } (m, m', m'' \ldots) = m r^2 + \\ + m' r'^2 + \ldots = \Sigma\, m r^2.$$

Si las masas m, m' ... son los elementos de una masa continua M, la suma se convertirá en integral, y resultará

$$\text{momento de inercia, masa } M \text{ con relación á } O = \int_v \partial m \,.\, r^2.$$

De igual suerte que en los dos casos anteriores, podemos determinar una longitud R tal, que reuniendo en un punto M todas las masas m, m' ..., con tal que este punto M diste del punto O dicha longitud R se tenga

$$MR^2 = \Sigma\, m r^2$$

ó bien

$$MR = \int_v \partial m r^2.$$

Lo mismo en este caso que en los demás el punto M no es un punto fijo del espacio.

Lo único que interesa es, que la masa del punto M sea igual a $m + m' + m''$ ... y que la distancia R está determinada por la ecuación precedente.

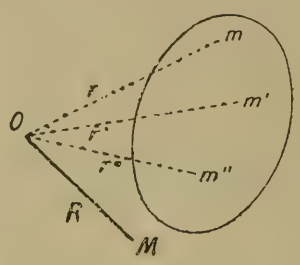


Figura 38

Haremos una advertencia análoga a la que hemos hecho ya en los dos primeros casos. Que aunque las fórmulas son idénticas algebraicamente, la distribución de las distancias r es distinta en este último caso respecto a los dos anteriores. En el primero las r eran perpendiculares a un plano; en el segundo, eran todas perpendiculares a una recta X; en el tercero todas pasan por un punto O.

***

De estas definiciones se deducen, por el pronto, dos consecuencias:

1.ª Que el momento de inercia de un sistema de puntos m, m' ... continuos o discontinuos, importa poco, con relación a una recta X (fig. 39) es igual a la suma de los momentos de inercia con relación a dos planos P, P' rectangulares, que pasen por dicha recta.

Esto es evidente, porque sea m uno de los puntos que se consideren; bajemos desde este punto dos perpendiculares,

$m\,p$, $m\,p'$ a los planos P, P' y prolonguemos el plano de estas perpendiculares hasta que corte a la recta X en o. De este modo formaremos el rectángulo $o\,p\,m\,p'$.

Llamando x e y a las perpendiculares $m\,p'$ y $m\,p$ en cualquiera de los rectángulos que se forman y que no están representados en la figura, tendremos

$$r^2 = x^2 + y^2$$

y multiplicando por la masa m

$$m r^2 = m x^2 + m y^2.$$

Si repetimos esto mismo para los diferentes puntos del sistema, tendremos las ecuaciones

$$m'\,r'^2 = m'\,x'^2 + m'\,y'^2$$
$$m''\,r''^2 = m''\,x''^2 + m''\,y''^2$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

y sumando todas ellas término a término

$$\Sigma\, m\, r^2 = \Sigma\, m\, x^2 + \Sigma\, m\, y^2.$$

Pero $\Sigma\, m\, r^2$ es el momento de inercia de los puntos con relación al eje X, la suma $\Sigma\, m\, x^2$ es el momento de inercia de dichos puntos con relación al plano P', y $\Sigma\, m\, y^2$ es a su vez el momento de inercia de los mismos puntos con relación al plano P.

Luego el teorema queda demostrado; el momento de inercia de los puntos, con relación a una recta, es igual a la suma de los momentos de inercia de estos mismos puntos con relación a dos planos rectangulares que pasen por dicha recta.

Pero fíjense mis alumnos en que los planos han de formar un ángulo recto, porque si no, no se formarían triángulos rectángulos, y la demostración caería por su base.

2.ª Análogamente, podremos demostrar, que el momento de inercia de varios puntos formando un sistema continuo o discontinuo con relación a un centro O (fig. 40) es igual a la suma de los momentos de inercia de estos mismos puntos con relación a tres planos coordenados rectangulares que pasen por dicho centro.

Sea m uno de los puntos: lo que de él digamos podríamos decir de los demás.

Bajemos a los tres planos coordenados las perpendiculares mp, mp', mp'', que llamaremos x, y, z, y tracemos la recta $o\,m$, que llamaremos r.

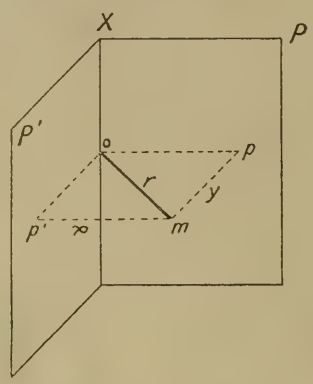


Figura 39

Se sabe por un teorema elemental, que existe la relación

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2;$$

multiplicándola por m, resultará

$$mr^2 = mx^2 + my^2 + mz^2;$$

repitiendo esto mismo para todos los demás puntos, tendremos

$$m'r'^2 = m'x'^2 + m'y'^2 + m'z'^2,$$

. . . . . .

y sumando todas estas ecuaciones

$$\Sigma\, mr^2 = \Sigma\, mx^2 + \Sigma\, my^2 + \Sigma\, mz^2.$$

Pero el primer miembro es evidentemente el momento de inercia de todos los puntos m, m' ... con relación al origen, y los tres términos del segundo miembro son respectivamente los momentos de inercia de los puntos dados con relación a los tres planos del sistema trirrectangular, lo cual demuestra el teorema.

Advirtamos, para concluir, que en toda esta teoría supo-

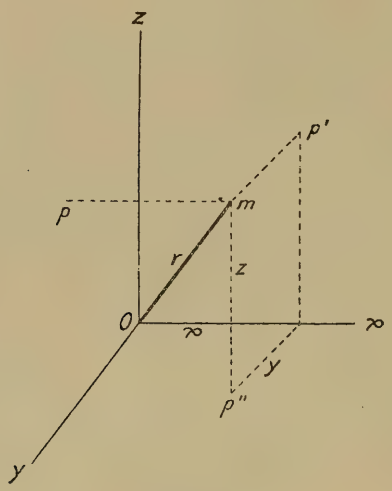


Figura 40

nemos que los puntos, planos y rectos se encuentran en el espacio finito, de modo que son finitas las masas y las distancias.

*
* *

Completemos estas definiciones con un teorema fundamental en la teoría, que vamos recordando, que es el teorema del

Elipsoide de inercia.—Imaginemos un cuerpo cualquie-

ra E continuo o discontinuo. Si lo primero, tendremos que emplear integrales; si lo segundo, emplearemos *sumas*.

Sea (fig. 41) O un punto arbitrario de este cuerpo; por dicho punto tracemos tres ejes trirrectangulares x, y, z, que serán los ejes de referencia, y una recta $O\,X$ que consideraremos como eje de inercia del cuerpo.

Es decir, que vamos a determinar el momento de inercia del cuerpo en cuestión, con relación al eje X.

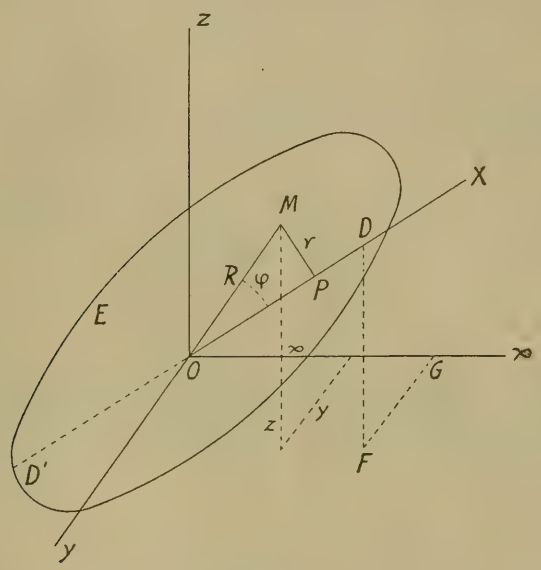


Figura 41

Tomemos un punto M del cuerpo de masa ∂m (admitiendo la continuidad).

El momento de inercia del cuerpo, con relación al eje X, será evidentemente

$$\int_v \partial m r^2,$$

representando por r la perpendicular $M\,P$, bajada desde el

punto M al eje X. Es la definición que hemos dado en un sistema cualquiera material para su momento de inercia, con relación a un eje, que aquí suponemos que es X.

Tendremos, pues, que determinar el valor de r.

En el triángulo $M P O$, en que R representa la distancia $M O$ y φ el ángulo $M O P$, será el valor de r

$$r = R \operatorname{sen} \varphi$$

y, por tanto,

$$r^2 = R^2 \operatorname{sen}^2 \varphi$$

Pero designando, como se ve en la figura, por x, y, z las tres coordenadas de M, se tendrá

$$R^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

Y, por otra parte, tendremos también

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - \cos^2 \varphi.$$

Mas φ es el ángulo que forman las rectas $O M$ y $O X$; los cosenos del ángulo que forma $O M$ con los ejes son evidentemente

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \quad \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

y designando por $\cos \alpha$, $\cos \beta$, $\cos \gamma$ los cosenos de los ángulos que forma el eje de inercia $O X$ con los ejes coordenados, y recordando que el coseno del ángulo que forman dos rectas es igual a la suma del producto de los cosenos que forman con los ejes coordenados, resultará desde luego,

$$\cos \varphi = \frac{x \cos \alpha}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{y \cos \beta}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} + \frac{z \cos \gamma}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

Substituyendo este valor en el del sen φ, se obtiene

$$\operatorname{sen}^2 \varphi = 1 - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2}{x^2 + y^2 + z^2}$$

Por último, substituyendo a su vez este valor en el de r^2, tendremos

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2) \left[1 - \frac{(x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2}{x^2 + y^2 + z^2} \right]$$

o bien

$$r^2 = x^2 + y^2 + z^2 - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

Sólo falta desarrollar esta expresión, y para simplificar el desarrollo recordaremos que se tiene

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Luego podemos multiplicar la primera parte del segundo miembro por esta expresión, que es multiplicar por la unidad, con lo cual la última ecuación tomará esta forma

$$r^2 = (x^2 + y^2 + z^2)(\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma) - \\ - (x \cos \alpha + y \cos \beta + z \cos \gamma)^2$$

Desarrollando y simplificando, hallaremos, por último,

$$r^2 = (y^2 + z^2) \cos^2 \alpha + (x^2 + z^2) \cos^2 \beta + (x^2 + y^2) \cos^2 \gamma - \\ - 2\,x\,y \cos \alpha \cos \beta - 2\,x\,z \cos \alpha \cos \gamma - 2\,y\,z \cos \beta \cos \gamma$$

Teniendo ya el valor de r^2, para obtener el momento de inercia del cuerpo, con relación al eje X, no hay más que substituír en la expresión

$$I_x = \int_v \partial m r^2$$

representando por I_x el momento de inercia que buscamos, y hallaremos

$$I_x = \cos^2 \alpha \int_v (y^2 + z^2)\, \partial m + \cos^2 \beta \int_v (x^2 + z^2)\, \partial m +$$

$$+ \cos^2 \gamma \int_v (x^2 + y^2)\, \partial m - 2 \cos \alpha \cos \beta \int_v x\, y\, \partial m -$$

$$- 2 \cos \alpha \cos \gamma \int_v x\, z\, \partial m - 2 \cos \beta \cos \gamma \int_v y\, z\, \partial m.$$

Ahora bien, las tres primeras integrales tienen una significación perfectamente clara; son los momentos de inercia con relación a los tres ejes coordenados. Por ejemplo, la primera integral, en la que V indica que ha de extenderse la integración a todos los puntos del cuerpo, representa, como antes vimos, el momento de inercia de éste con relación al eje de las x, toda vez que $y^2 + z^2$ es el cuadrado de la distancia a dicho eje de la masa ∂m.

Una cosa análoga podremos decir de las dos siguientes.

Representando, pues, por A, B, C estos tres momentos de inercia, y representando por A_1, B_1, C_1 las otras tres integrales, es decir,

$$A_1 = \int_v y\, z\, \partial m\,, \quad B_1 = \int_v x\, z\, \partial m\,, \quad C_1 = \int_v x\, y\, \partial m$$

resulta para el momento de inercia buscado la siguiente expresión

$$I_x = \cos^2 \alpha \,.\, A + \cos^2 \beta \,.\, B + \cos^2 \gamma \,.\, C - 2\, A_1 \cos \beta \cos \gamma -$$
$$- 2\, B_1 \cos \alpha \cos \gamma - 2\, C_1 \cos \alpha \cos \beta$$

Y ya podemos definir lo que se entiende por *elipsoide de inercia* o de los momentos de inercia.

Sobre la recta $O\,X$, en uno y en otro sentido, vamos a tomar una longitud $O\,D$ igual *a la relación inversa de la raíz cuadrada* del momento de inercia relativo a dicho eje X, es decir,

$$O\,D = O\,D' = \sqrt{\frac{1}{I_x}}$$

e inmediatamente vamos a ver el motivo de esta construcción, al parecer extraña.

Si por el punto O trazamos todo alrededor una serie de rectas, como hemos trazado la $O\,X$, y si para todas ellas hacemos lo mismo que acabamos de hacer, es decir, tomamos en uno o en otro sentido vectores que tengan cada uno de ellos por valor,

$$\frac{1}{\sqrt{I_{x'}}}, \quad \frac{1}{\sqrt{I_{x''}}}, \ldots$$

todos los puntos análogos al D formarán una superficie cerrada, puesto que tomamos estos vectores en uno y otro sentido, y siempre son, en general, cantidades finitas, puesto que lo son los momentos de inercia I_x ...

Pues bien, esta superficie, que representa un papel importantísimo en la teoría de los momentos de inercia, vamos a demostrar desde luego que es un elipsoide, y éste es el que llamaremos *elipsoide de inercia* o *elipsoide de los momentos de inercia* para el punto O que hemos elegido, que es arbitrario.

En efecto, en la ecuación anterior dividamos por I_x, y tendremos

$$1 = A\,\frac{1}{I_x}\cos^2\alpha + B\,\frac{1}{I_x}\cos^2\beta + C\,\frac{1}{I_x}\cos^2\gamma -$$

$$- 2\,A_1\,\frac{\cos\beta\cos\gamma}{I_x} - 2\,B_1\,\frac{\cos\alpha\cos\gamma}{I_x} - 2\,C_1\,\frac{\cos\alpha\cos\beta}{I_x}$$

que puede escribirse de este modo,

$$1 = A\left(\frac{1}{\sqrt{I_x}}\right)^2 \cos^2\alpha + B\left(\frac{1}{\sqrt{I_x}}\right)^2 \cos^2\beta + C\left(\frac{1}{\sqrt{I_x}}\right) \cos^2\gamma -$$

$$-2A_1\left(\frac{1}{\sqrt{I_x}}\right)\cos\beta . \frac{1}{\sqrt{I_x}}\cos\gamma - 2B_1\frac{1}{\sqrt{I_x}}\cos\alpha . \frac{1}{\sqrt{I_x}}\cos\gamma -$$

$$-2\,C_1\frac{1}{\sqrt{I_x}}\cos\alpha . \frac{1}{\sqrt{I_x}}\cos\beta$$

o también suprimiendo el subíndice x de I, porque ya no cabe confusión y vamos a emplear esta letra en otro sentido

$$1 = A\left(\frac{1}{\sqrt{I}}\right)^2 \cos^2\alpha + B\left(\frac{1}{\sqrt{I}}\right)^2 \cos^2\beta + C\left(\frac{1}{\sqrt{I}}\right)^2 \cos^2\gamma -$$

$$-2A_1\frac{1}{\sqrt{I}}\cos\beta . \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\gamma - 2B_1\frac{1}{\sqrt{I}}\cos\alpha . \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\gamma -$$

$$-2\,C_1\frac{1}{\sqrt{I}}\cos\alpha\frac{1}{\sqrt{I}}\cos\beta$$

Ahora bien, en la figura 41, y para un eje cualquiera X, consideremos el vector correspondiente OD y hallemos sus tres componentes: OG, que llamaremos X; GF, que llamaremos Y, y DF, que llamaremos Z, y recordando que la recta OX forma con los ejes coordenados los ángulos α, β, γ, resultará evidentemente

$$OG = X = OD\cos\alpha = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\alpha$$

$$GF = Y = OD\cos\beta = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\beta$$

$$DF = Z = OD\cos\gamma = \frac{1}{\sqrt{I}}\cos\gamma$$

y substituyendo estos valores en la última ecuación hallaremos, por fin,

$$1 = AX^2 + BY^2 + CZ^2 - 2A_1 YZ - 2B_1 XZ - C_1 XY.$$

Ahora bien, variando el eje OX varía el punto D recorriendo toda la superficie E; pero las coordenadas de este punto también serán variables, serán las que hemos designado por X, Y, Z.

En suma, son las coordenadas variables de los puntos de dicha superficie.

Luego la ecuación precedente es la ecuación analítica de la expresada superficie E, y vemos desde luego que es una ecuación de segundo grado.

Pero como además la superficie E hemos visto que es cerrada, claro es que será un elipsoide, y queda demostrada la proposición.

***

Hemos hallado la ecuación del elipsoide de inercia de un cuerpo cualquiera, y esto es muy importante y casi me atrevería a decir muy curioso.

El cuerpo puede tener una forma cualquiera, salvando, desde luego, las discontinuidades de su superficie, y siempre la superficie definida de este momento será un elipsoide, lo cual facilita mucho el problema del movimiento del cuerpo, porque a lo que hay que atender no es a la forma más o menos caprichosa de éste sino a la forma regular de su elipsoide de inercia.

Pero no podemos detenernos en un estudio ajeno al de estas conferencias.

Haremos, sin embargo, una observación importante.

Hasta aquí los ejes coordenados x, y, z han sido arbitrarios; pero todo elipsoide tiene tres ejes de simetría, y si para

el punto O elegimos estos tres ejes coordenados, los tres últimos términos de la ecuación precedente desaparecerán; luego sus coeficientes deberán reducirse a cero y debemos tener

$$A_1 = 0, \quad B_1 = 0, \quad C_1 = 0.$$

Recordando la significación de estos coeficientes, podre-

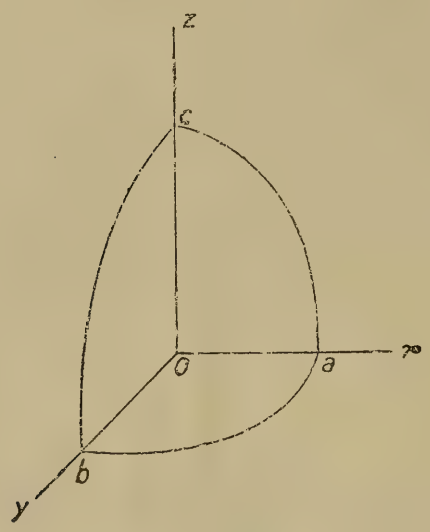


Figura 42

mos decir, que las condiciones para que el elipsoide de inercia esté referido a sus ejes serán estas tres

$$\int_v y\,z\,\partial m = 0 \quad , \quad \int_v x\,z\,\partial m = 0 \quad , \quad \int_v x\,y\,\partial m = 0,$$

con lo cual la ecuación se reducirá a la siguiente

$$A\,X^2 + B\,Y^2 + C\,Z^2 = 1.$$

Si en la figura 42 representamos este elipsoide, pero ya

referido a sus tres ejes $O\,a$, $O\,b$, $O\,c$, que serán los ejes principales de inercia del cuerpo, los valores de a, b, c se obtendrán desde luego haciendo $X = 0$, $Y = 0$ para obtener c, y tendremos

$$c^2 = \frac{1}{C} \quad \text{o bien} \quad c = \frac{1}{\sqrt{C}}$$

y análogamente

$$b = \frac{1}{\sqrt{B}} \qquad a = \frac{1}{\sqrt{A}}$$

lo cual hubiera podido preverse, desde luego, porque A, B, C son los momentos de inercia con relación al eje de las X, de las Y y de las Z, y los vectores que desde el centro van al elipsoide tienen por valor la unidad dividida por la raíz cuadrada del momento de inercia con relación a dichas rectas.

Pero en nuestro caso, dichas tres rectas coinciden en dirección con los tres ejes.

El elipsoide referido a sus ejes tomará la forma ordinaria

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} + \frac{Z^2}{c^2} = 1.$$

Hasta ahora hemos tomado por origen de coordenadas un punto cualquiera O; en adelante, y para las aplicaciones que hemos de hacer de esta teoría, supondremos que el punto O, es decir, el origen de coordenadas, coincide con el centro de gravedad.

Todavía nos queda algo que decir de la teoría de los momentos de inercia, pero lo dejamos para la conferencia inmediata.

XXXIII.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

(Continuación.)

POR BLAS LÁZARO E IBIZA.

DÆDALEA CINEREA *(Bull.)* Fr.

Sinonimia.

Agaricus coriaceus Bull.

Iconografía.

Fries. Ic. select., lám. 192, fig. 2.
Britz. Polyp., fig. 101.

Descripción.—Aparato esporífero semirredondeado, de cuatro-siete centímetros de diámetro, grueso, ondeado, con zonas anchas, concéntricas, aterciopelado o erizado, cuyo color oscila entre ceniciento y amarillento muy claro. Carne ocrácea y con zonas de diversa intensidad. Tubos anchos hasta de más de un centímetro de longitud en la porción central. Poros blanquecinos o grisáceos, como empolvados de ceniza, redondeados, alargados, sinuosos y unidos en dibujo laberintiforme. Espora alargada, de cinco a seis μ.

Habitación.—Sobre los troncos y maderos labrados y viejos de cupulíferas, especialmente en los de los robles, en verano y otoño.

Area.—En las regiones boreal y central de la Península.

Observaciones.—La coloración de su haz distingue bien esta especie de la *Dædalea quercina* y también el dibujo laberintiforme de los poros, que es menos complejo y con poros menos largos en la *cinerea*. La forma total de esta última dista mucho de la forma mensular a la que aquella se aproxima generalmente.

DÆDALEA CONFRAGOSA *(Bolt.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus confragosus Bolt.
Boletus labyrinthiformis Bull.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 491, fig. A y B.
Bolton. Hist. of Fung., lám. 160.
Sow. Engl. Fung., lám. 193 (¿variedad?).
Láz. Fot. Hist. nat., lám. 1.ª, fig. 20.

Descripción.—Aparato esporífero más o menos mensular casi leñoso, de contorno arriñonado, de unos diez centímetros, no inserto por toda su base, algo giboso y sinuado en su borde, con la superficie superior velloso-aterciopelada, zonada, de color pardo rojizo o francamente manchada de rojizo, como polvo de ladrillo. Carne poco abundante, fibrosa, acorchada, rojiza y al fin parda. Tubos anchos, verticales de doce a quince milímetros de longitud. Poros estrechos y largos, empolvados de gris ceniciento, luego castaños, cambiantes o algo tornasolados, hendidos, dentados y comunicándose, formando laberinto. Espora cilíndrica, incolora, de seis a siete μ.

Habitación.—Sobre los troncos de betuláceas y cupulíferas durante el otoño y la variedad sobre los pinos viejos.

Area.—Comprobada su existencia en la región oriental.

Observaciones.—Existe en España una variedad de esta especie llamada

Variedad **Pini**, que difiere por tener los poros de color rojizo de ladrillo y por aparecer sobrepuestos los aparatos esporíferos. Esta variedad se encuentra en algunas localidades del centro y en la dehesa de la Albufera (Valencia).

Gen. **MENSULARIA** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos de forma mensular, con la superficie superior semirredondeada, plana y normal al soporte, y la inferior conoidea, bastante pronunciada, por lo que su altura es aproximadamente igual a su radio. Estos aparatos son anuales, y, por tanto, su cara superior carece de zonas y de surcos concéntricos. Tubos no muy largos, más o menos oblicuos, dispuestos en una sola capa. Carne abundante y zonada en la sección vertical.—Las especies viven sobre troncos, y los aparatos esporíferos pueden aparecer solitarios o reunidos en corto número.

MENSULARIA RADIATA *(Sow.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus radiatus Sow.
Polystictus radiatus Fries.

Iconografía: lám. 123.

Sow. Engl. Fung., lám. 196.
Klotzch. Fl. Boruss., lám. 461.
Lucand. Champ. de la France.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 36.

Descripción. – Aparato esporífero, semirredondeado, de tres a cinco centímetros, cuya superficie superior presenta multitud de arrugas radiantes, y es aterciopelada y de color amarillo o azafranado al principio, y después lampiña y pardo ocrácea, con la margen adelgazada y amarillo pálida. Carne fibrosa, rígida, leonada y con zonas. Tubos pardoclaros. Poros pequeños, leonados, con pruina grisácea, tornasolados. Espora elipsoidea de cuatro a cinco μ de diámetro.

Habitación. - Sobre los tocones y troncos cortados de abedul, aliso y avellano durante el verano.

Area.—Pirineos y Provincias Vascongadas.

MENSULARIA ULMARIA (*Sow.*) Láz.

Sinonimia.

Boletus ulmarius Saw.
Polyporus fraxineus Bull.
Polyporus ulmarius Fr.
Fomes incanus Quel.
Fomes cytisinus Berk.
Fomes ulmarius Fr.

Iconografía.

Bull., Champ. de la France, lám. 433, fig. II.
Sow., Engl. Fung., láms. 88 y 288.
Lucand. Champ. de la France, lám. 200.
Berkl. Outl. Brit. Fung., lám. 16, fig. 5.

Descripción.—Aparatos esporíferos mensulares de diez a treinta centímetros de diámetro horizontal, lisos, planos y pubescentes cuando jóvenes, después con depresiones concéntricas, algo gibosos y con la superficie crustácea y dura, que sucesivamente presenta los colores crema, gris-rosado encarnado o pardo violáceo y ocráceo en la zona central, blanquecino en el borde. Carne blanca y luego amarillenta ocrácea, clara, dura y compacta, zonada y algo sápida y olorosa. Tubos finos, no estratificados, amarillentos y luego rojizos. Poros redondos, pequeños, con pruina blanca, que sucesivamente pasan por los colores blanco, rojizo azafranado o ladrillo y grisáceo. Esporas elipsoideas o casi esféricas, incoloras o muy débilmente rosadas, de seis a ocho μ.

Habitación.—Aparecen varios aparatos superpuestos unos a otros, formando un conjunto empizarrado sobre los troncos viejos de las más diversas especies, como chopos, olmos, robles, fresnos, acacias de flor, castaños y otros, en verano y otoño.

Area.—Comprobado en las comarcas del Norte y del Oeste.

MENSULARIA MARGINATA *(Pers.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus marginatus Pers.
Fomes marginatus Fr.
Fomes fulvus Schæff non Fr.

Iconografía.

Quelet. Champ. Vosg. Jura., lám. 19, fig. 2.

Descripción.—Aparato esporífero más o menos mensular, de diez a quince centímetros de diámetro horizontal, con la superficie superior con algunas ondulaciones y zonas, con cutícula crustácea y como recubierta de un barniz resinoso, coloreada de pardo negruzco, con la zona marginal rojiza y el borde engrosado y amarillo pálido. Carne dura, acorchada, amarillenta sucia y pálida, con sabor acídulo y olor algo terebintáceo. Tubos delgados leonado pálidos. Poros pequeños de color amarillento pálido o pajizo y de los cuales fluyen algunas gotitas incoloras. Esporas elipsoideas, débilmente amarillentas, de unas diez μ.

Habitación.—Sobre robles, encinas y cerezos durante todo el año. Los aparatos esporíferos comienzan a aparecer y originan sus capas nuevas de tubos en el verano.

Area.—Provincias de la región central.

MENSULARIA ALBA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero mensular, de siete a diez centímetros de diámetro horizontal, cuya cara superior aparece con nivel general casi plano, pero con la superficie muy desigual presentando granulaciones gruesas mezcladas con pequeñas anfractuosidades, lo que la hace aparecer accidentada y discontinua; su coloración general es blanca mate, sin vellosidad ni pubescencia, sin zonas concéntricas, ni margen diferenciado, pero manchada de pardo negruzco por la facilidad con que empasta y retiene las partículas

descompuestas de los leños en que vive. Carne gruesa en el centro, blanca fibrosa, casi insípida, con olor agradable de seta. Tubos largos, de diez y seis o diez y ocho milímetros, delgados en una sola capa, de un color crema muy claro, casi blancos. Poros pequeños, redondeados al principio y luego angulosos con el borde entero de un blanco puro, que por una compresión muy fuerte adquieren un tono muy levemente verdoso. Espora elipsoidea, lisa, de ocho a nueve μ de diámetro.

Habitación.—En la cara interna de los tocones viejos, huecos y muy descompuestos, del castaño, durante el verano.

Area.—Encontrada por mí alguna vez en los castañares del litoral asturiano.

MENSULARIA FULVA *(Fries.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus fulvus Fr.
Fomes fulvus Fr.

Iconografía.

Fries. Ic. select. hymen., lám. 184, fig. 3.
Britz. Hymen. Ausbg., tomo V, fig. 46.
Roll. Atl. des Champ., lám. 96, fig. 211 bis.

Descripción.—Aparato esporífero mensular, de diez a veinte centímetros de diámetro máximo horizontal por siete a doce de altura, con la superficie superior casi plana, pruinoso tomentosa, de color entre leonado y azafranado, que palidece con el tiempo, y con zonas y surcos concéntricos y apenas indicados o nulos y del mismo color. Carne muy abundante, constituyendo casi todo el grosor del aparato, fibrosa, de consistencia entre suberosa y leñosa, de color pardo ocrácea y estratificada horizontalmente. Una sola capa tubífera que no llega hasta el margen, en el que la carne sobresale formando un reborde bastante grueso. Tubos

cortos y muy delgados. Poros de color de canela oscuro, con pruina blanco grisácea.

Habitación. —Sobre troncos viejos de muy diversa naturaleza (robles, encinas, abetos, manzanos, ciroleros, arces, etcétera) durante todo el año.

Area.—Hállase bien comprobada la existencia de esta especie en las comarcas del Occidente, Noroeste y Norte de la Península.

MENSULARIA VERNICOSA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero mensular, de contorno general redondeado, pero profundamente sinuoso, hasta de unos dos centímetros de diámetro por ocho a nueve centímetros de altura en su porción más gruesa; superficie superior sumamente desigual formada por una serie de masas redondeadas muy salientes, constituyendo colinas y ondulaciones separadas por surcos y arrugas profundas, sin que en su relieve se advierta ninguna tendencia a orientaciones radiantes ni concéntricas con los bordes; toda la porción central de esta superficie está recubierta como de un barniz resinoso y brillante en algunos puntos, formando una capa tenue y poco resistente, cuya coloración varía del pardo rojizo claro o castaño al pardo negruzco; la zona marginal es pardo rojiza mate y los bordes son prominentes y forma una zona blanco grisácea, de anchura muy desigual, que avanza en algunos puntos hacia el centro. Carne abundantísima, manifiestamente estratificada, de color ocráceo claro al principio y luego intensamente pardo rojizo y de consistencia suberosa. Tubos de uno a dos centímetros de longitud, muy finos y de color pardo ocráceo, más oscuro que el de la carne. Poros muy pequeños, angulosos, de igual color que los tubos, con el borde entero y muy delgado, y con una eflorescencia pruinosa blanca tan abundante que en algunos puntos recubre los poros hasta borrarlos. Esporas elipsoideas alargadas de seis a ocho μ de diámetro mayor.

Habitación.—Durante todo el año sobre robles vivos y sobre fresnos.

Area.—Hasta hoy solamente he hallado este poliporáceo en los bosques de las provincias del Norte, en la Real Casa de Campo (Madrid) y en el Jardín Botánico de Madrid.

Observaciones.—He tenido ocasión de recoger y estudiar grandes ejemplares de aparatos esporíferos aislados correspondientes a esta especie; pero poseo uno formado por pisos de ménsulas superpuestas que me parece justifica la distinción de una variedad.

Variedad **superposita**: Caracterizada por la superposición de varios aparatos esporíferos tan íntimamente soldados que sólo queda libre de cada uno una zona marginal de tres a cuatro centímetros de anchura. En el corte vertical, la carne de todos ellos aparece homogénea hasta muy cerca de la zona libre.

Los ejemplares de esta variedad proceden del Jardín Botánico de Madrid, donde en Octubre fueron recogidos sobre un almez por el Sr. Del Coto.

Gen. **SCALARIA** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos sobrepuestos formando una escalera de ménsulas distanciadas, con la cara superior estrecha y la inferior muy desarrollada. Carne dura y leñosa, bastante oscura. Tubos de mediana longitud, más bien cortos, estratificados. Poros pequeños e iguales. Especie perennes, cuyos aparatos esporíferos viven reunidos en grupos poco numerosos sobre diversos árboles.

SCALARIA FUSCA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos mensulares sobrepuestos, de catorce a diez y ocho centímetros de diámetro horizontal por ocho a diez de altura y solamente cuatro a cinco en su mayor saliente, formando una masa aplicada a

los troncos con pliegues salientes distanciados; la cara superior de estos escalones es algo convexa, lampiña, con surcos concéntricos aproximados y poco profundos, de coloración pardo-leonada y aun casi negra, con pocas desigualdades cuando es joven, pero sembrada de tuberosidades desiguales cuando es vieja. Carne durísima y leñosa, de color pardo rojizo bastante oscuro. Tubos de uno a dos centímetros de longitud, delgados, del color de la carne. Poros finísimos e iguales, de un pardo oscuro y sucio, con algo de pruina blanca cuando jóvenes, después sin ella y negruzcos.

Habitación.—Hállase durante todo el año sobre los troncos viejos de las hayas, robles y almendros.

Area.— Primeramente he hallado esta especie en los bosques del interior de Asturias, en la base de la Cordillera Cantábrica; de Cibea me la envió el Dr. Rodríguez y antes la había recogido yo en Muniellos; después recogí algún ejemplar sobre almendros en los cigarrales de las cercanías de Toledo y sobre robles en Cercedilla (Madrid), y últimamente me han sido aportados por D. Enrique Ortiz Soriano algunos ejemplares, recogidos también sobre almendros en Lucena del Cid (Castellón). Ante estos datos hemos de suponer que la especie está bastante difundida y que es una de tantas como han pasado inadvertidas en nuestro país.

Tribu 4.ª — Polisticteos

Superficie inferior formada por poros pequeños e iguales o muy semejantes; carne que no penetra nunca entre los tubos..... 1

Superficie inferior sin poros propiamente dichos; carne penetrando entre los tubos o engrosando los tabiques..... 2

1. Tubos cortos dispuestos en una sola capa o estrato; aparato esporífero de dos a tres milímetros de grueso..... Gen. *Polystictus.*
   Tubos en una sola capa; aparatos esporíferos de uno a dos centímetros de grueso. Gen. *Polystictoides*
   Tubos formando dos o más estratos..... Gen. *Boudiera.*

2. { Los poros comunicando unos con otros dan origen a un dibujo laberintiforme en la cara inferior del himenóforo..... Gen. *Bulliardia*.
Láminas radiantes, algo anatomosadas, formando mallas muy largas y estrechas. Gen. *Lenzites*.

Género **POLYSTICTUS** *Fr.*

Hongos cuyos aparatos esporíferos son anuales y aparecen sentados casi siempre lateralmente, sobre los leños; tienen la consistencia coriácea y afectan la forma de lámina semirredondeada o conoidea, rara vez orbicular, siendo a veces de tamaño bastante grande en sentido horizontal, pero siempre de poco grueso, pues careciendo casi de carne su mayor grueso no excede de dos o tres milímetros. Los tubos dispuestos en una sola capa o estrato son siempre cortos, por lo que la capa tubífera es también muy delgada. Generalmente los aparatos esporíferos aparecen reunidos, ya formando rosetones, cubriéndose parcialmente unos a otros, o ya formando grupos empizarrados.

A.—*Carne persistente blanca; poros todos iguales.*

POLYSTICTUS VERSICOLOR *(Bolt.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus versicolor Bolt.
Polyporus versicolor Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 86.
Bolt. Hist. of. Fung., lám. 81.
Schœff. Fung. qui in Bav., láms. 267 y 268.
Œder. Fl. Dan., lám. 1554.
Sow. Engl. Fung., láms. 229 y 387, fig. 7.
Eloffe. Champ. com., lám. 3, fig. 11.

Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, láms. 45, 46 y la 48 (variedad).

Battr. Fung. agr. arim., lám. 35, fig. A.

Britz. Hymen. Ausgb., tomo V, fig. 63.

Hussey. Ill. of Brit. Myc., tomo I, lám. 34.

Sic. Hist. nat. des Champ., lám. 56, fig. 285.

Sterb. Theatr. Fung., lám. 27, fig. K.

Pat. Tabl. anal., lám. 143.

Duf. Atl. Champ., lám. 50.

Michœl. Führ. für Pilz., tomo II, lám. 32.

Roll. Atl. des Champ., lám. 96, fig. 211.

Mass. Engl. Fung., lám. 31, fig. 4.

Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 34.

Descripción.—Sombrerillos orbiculares o semirredondeados, sobrepuestos en grupos arrosetados, con el borde ondeado, planos delgados y rígidos, con la superficie superior pubescente o aterciopelada brillante, de color amarillo pajizo, crema, leonado, gris liláceo, violado o bayo oscuro, dibujando zonas concéntricas que alternan las de matiz más claro y satinada en otras más oscuras y mates; en general las periféricas más claras y casi siempre blanca o casi blanca la marginal, que luego se oscurece por desecación en los ejemplares muy antiguos. Carne escasa y coriácea. Tubos muy cortos de color pardo claro. Poros pequeños y redondos, al fin desgarrados y comunicando unos con otros, los cuales pasan sucesivamente por los colores blanco, crema y amarillo claro, nunca intenso. Esporas elipsoideas, alargadas, de seis a siete μ.

Habitación.—Sobre tocones de coníferas, cupulíferas, betuláceas y otras en los bosques durante todo el año.

Area.—Su existencia está demostrada en todas las comarcas peninsulares.

Observaciones.—Entre los caracteres de esta especie que pueden servir para distinguirla de otras afines que tienen la

cara superior aterciopelada y con zonas concéntricas de diversa coloración, estimamos como el mejor la coloración más clara de las zonas periféricas y sobre todo de la marginal que llega a ser blanca o casi blanca en fresco, por lo menos el filete que adorna el borde. Mas como toda especie muy difundida ofrece diferentes tipos, que pueden considerarse como variedades dentro de la especie. Reseñaré las observadas por mí, aparte del tipo genuino que es el más común.

Variedad **fuscatus:** caracterizada por tener la coloración dominante pardusca y la zona clara del margen muy estrecha (un milímetro cuando más) y aun puede faltar toda ella.

El Piélago (Avilés, Asturias), sobre aliso, B. Lázaro; San Ildefonso (Segovia), sobre pinos, B. Lázaro; Pontevedra, sobre manzanos (Crespi); Cibea (Asturias), sobre *Alnus glutinosa*, Dr. Rodríguez; Guecho (Vizcaya), sobre el mismo, Lázaro; Valle del Oro, sobre castaño, Sr. Casares Gil; San Ildefonso (Segovia), sobre pinos, Lázaro; Vivero (Lugo), sobre roble, Casares Gil.

Variedad **albomarginatus;** su principal carácter consiste en que la zona marginal blanca o blanquecina es muy ancha (cuatro a seis milímetros por lo menos); la coloración dominante en el resto es parda oscura.

Salinas de Avilés, Rivadesella y Covadonga (Asturias), B. Lázaro, todas sobre roble; Valencia, Sr. Boscá, sobre traviesas del ferrocarril, probablemente de roble; Dehesa de la Villa (Madrid), sobre pinos, recogida por el Sr. Rodríguez López Neyra; Pontevedra, sobre cerezos y manzanos, Sr. Crespi; Portillo (Toledo), sobre chopos, Sr. Cortés Latorre; Garrotxa del Ampurdan (Gerona), sobre alcornoques, Sr. Cazurro.

Variedad **lutescens** *(non. Polystictus lutescens* Pers.) Distínguese porque el color dominante es pardoamarillento, bastante claro, y la zona clara marginal bastante ancha, tanto o casi tanto como en la variedad anterior.

Llerana (Santander), sobre roble, Sr. Díaz.

Var. **rufescens:** La coloración general es la dominante o sea la pardogrisácea, pero entre sus zonas hay algunas de color marcadamente rojizo; la marginal clara es estrecha.

Salinas de Avilés (Asturias), sobre aliso, B. Lázaro; Bayona de Galicia (Pontevedra), sobre pino marítimo, B. Lázaro; Coruña, sobre la misma especie, B. Lázaro; Moncayo, sobre roble, B. Lázaro; Lago Pillarno (Asturias), Dr. Villalain, sobre roble; Pontevedra, sobre eucalipto y sobre cirolero, Sr. Crespi.

Variedad **virescens:** Bella variedad que las zonas grisáceo-oscuras alternan con amplias zonas de un verde intenso; la marginal clara es muy estrecha.

San Juan de Nieva (Asturias), sobre eucalipto, B. Lázaro; Pontevedra, sobre eucalipto, Sr. Crespi; Portillo (Toledo), sobre chopos, Sr. Cortés y Latorre.

Variedad **inversus:** Bien caracterizada por tener los aparatos esporíferos invertidos, aplicando a los troncos la cara superior y mostrando al exterior la inferior o porífera.

Muniellos (Asturias), sobre alisos, B. Lázaro; Villaviciosa (Asturias), sobre manzanos, B. Lázaro; Pontevedra, sobre manzanos, Sr. Crespi.

POLYSTICTUS INVERSUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos invertidos, de forma concoídea ú orbicular de tres a cuatro centímetros de diámetro, con la superficie estéril (la inferior por la inversión) cubierta de escamitas fibrilosas de color leonado muy claro, interrumpido por algunas líneas estrechas parduscas, que forman así un dibujo zonado; cara porífera de color de crema algo sucio, pardo oscuro en toda la zona próxima al borde. Carne blanquísima muy escasa. Poros algo mayores que el *P. versicolor*, iguales, blancos al principio y después levemente ocráceos. Espora elipsoidea de seis a ocho μ, lisa.

Habitación.—Sobre los manzanos en otoño e invierno.

Area.—Sólo la conozco de Pontevedra, de donde me la trajo el profesor Sr. Crespi.

POLYSTICTUS LUTESCENS *(Schœff.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus versicolor Schæff. nou Bolt.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 136.
Michœl. Führ. für Pilz., tomo III, lám. 41.

Descripción. — Aparatos esporíferos semicirculares, reunidos y aproximados en bastante número sobre los troncos, pero nunca soldados entre sí, de tres a cuatro centímetros de radio, delgados, con la cara superior adornada por zonas concéntricas estrechas, alternando unas pubescentes y de color amarillo pálido con otras erizadas y de color leonado o levemente pardo rojizo; borde algo engrosado, de color grisáceo pálido o blanquecino. Carne blanca y muy coriácea. Tubos cortos (uno a dos milímetros). Poros iguales, blancos y luego rojizos. Espora elipsoidea de seis a siete μ en su diámetro mayor.

Habitación.—Hállase en verano y otoño sobre diversos árboles, de familias muy variadas, especialmente sobre amigdaláceas y hayas.

Area.—Nunca frecuente; pero la he recogido alguna vez en Aragón y en las provincias septentrionales y en las del Noroeste y en la región occidental.

POLYSTICTUS FIBULA *(Sow.)* Fries.

Iconografía.

Sow. Engl. Fung., tomo III, lám. 387, fig. 8.

Descripción.—Aparatos esporíferos invertidos, muy delgados, adheridos por el centro, de contorno redondeado, de

tres a cinco centímetros de diámetro, con la cara inferior (la esteril) convexa, aterciopelada o pelosa, con zonas apenas indicadas, todas de color blanco sucio y más tarde leonado pálidas. Carne muy escasa, blanquísima, coriácea y tenaz, aunque blanda en fresco. Tubos cortos, de un milímetro. Superficie superior, que por efecto de la inversión es la porífera, marcadamente cóncava, cubierta de poros pequeños, redondeados, bastante iguales, blancos al principio y luego de color de crema, y al fin casi ocráceos, especialmente en la parte central. Espora elipsoidea, de ocho a diez μ de diámetro máximo, con la exospora sembrada de papilas.

Habitación.—En verano y principios de otoño sobre las ramas secas de diversos árboles de cupulíferas, betuláceas y salicáceas.

Area.—Tan sólo puedo citarla de San Vicente de la Barquera (Santander), donde la he recogido por mí mismo.

B.—*Carne persistentemente blanca; poros más o menos desiguales.*

POLYSTICTUS ZONATUS *(Schœff.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus coriáceus Batsch.
Boletus multicolor Schæff.
Polyporus ochraceus Pers.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 269.
Œder. Fl. Dan., lám. 2028, fig. 2.
Rostz. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 44.
Battr. Fung. agr. arim., lám. 35, fig. B.
Bastch. Elench. Fung., lám. 24, fig. 127.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 61.
Britz. Polyp., fig. 151.
Quel. Champ. Vosg. Jura., lám. 18, fig. 4.

Descripción.—Aparato esporífero delgado, semirredondeado, de tres a seis centímetros de diámetro horizontal, convexo y más o menos jiboso en la base, con la superficie superior pubescente al principio, lampiña después, rugosa y de fondo pardo amarillento claro, con zonas concéntricas ocráceas o grises azuladas bastante oscuras. Carne escasa, blanca, de consistencia suberosa. Tubos cortos. Poros algo desiguales, redondeados o poligonales, blancos al principio y luego de color crema y aun pardo amarillento claro. Espora elipsoidea, bastante alargada, de unas diez μ de diámetro longitudinal por cinco o seis de ancho.

Habitación.—Sobre los troncos de las salicáceas en verano y otoño y alguna variedad sobre robles.

Area.—Encontrada en las Provincias Vascongadas, Asturias y Galicia y en la región central.

Observaciones.—Entre los *Polystictus* que presentan la cara superior aterciopelada y con zonas conténtricas policromas el mejor carácter de la especie *zonatus* es la existencia de alguna o algunas zonas de un gris azulado bastante oscuro y aun negruzco a veces, que se destacan acentuadamente sobre las demás coloraciones. Pero dentro de este carácter general hay variantes que nos obligan a distinguir algunas variedades.

Variedad **amplizonatus:** Caracterizada principalmente por la anchura de cuatro a siete milímetros de sus zonas, especialmente las más próximas al margen.

Recogida por mí en Salinas de Avilés, Guetaria (Guipúzcoa); Bayona de Galicia (Pontevedra); recolectada en el Monasterio de Piedra (Zaragoza), por el Sr. Mas y Guindal.

Variedad **angustizonatus:** Difiere principalmente por la estrechez de sus zonas que, en su mayoría, apenas pasan de líneas algo anchas.

Recolectada por D. Vicente Navarro en Nájera (Logroño).

Variedad **fuscogriseus:** Muy caracterizada por la tonalidad general oscura; al fondo general de su cara superior es

gris oscuro, sin nada de amarillento y zonas casi negras unas y grises claras otras.

Remitida desde Cibea (Asturias) por el Dr. D. Ambrosio Rodríguez, y recogida por mí en Salinas de Avilés; en ambas localidades sobre los robles.

POLYSTICTUS ALBUS *(Huds.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus albus Huds.
Boletus salicinus Bull.
Polyporus albus Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 433, fig. 1.
Price. Ill. of the., Fung., fig. 78.
Britz. Hymen, Ausgb., V, fig. 32.

Descripción.—Aparato esporífero semirredondeado de cuatro a nueve centímetros de diámetro horizontal, delgado, concoideo, tenaz, con la superficie superior lisa, levemente tomentosas de color blanquecino y luego algo amarillento o grisáceo. Carne no muy abundante y tierna, de color blanco y con zonas. Tubos cortos y delgados, blanco rosados. Poros pequeños, desiguales, redondeados, luego alveolados y cuya coloración pasa del blanco al rosa y al rojizo. Esporas elipsoideas, de unas seis μ, con la esospora sembrada de puntitos traslúcidos.

Habitación.—Sobre los troncos de las salicáceas, hayas y otros árboles en los bosques durante el invierno y la primavera.

Area.—Común en las comarcas del Noroeste, Norte y en los Pirineos; menos frecuentes en los bosques de la región central.

POLYSTICTUS ALBESCENS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos de contorno semi-

circular y algo ondeado, de tres a cinco centímetros de diámetro, cuyo grueso no llega a un centímetro, aun en la porción central; superficie superior finamente aterciopelada, suavísima, de color blanquecino, homogéneo, a veces con algún surco concéntrico levemente indicado. Carne escasa, blanca o apenas matizada de crema, fibrosa y algodonosa. Tubos cortos, delgados, de igual coloración que la carne. Poros pequeños, desiguales, unos poligonales y otros redondeados y alargados, de color de crema muy claro, con el borde entero y no cubriendo homogéneamente la cara central.

Habitación.—Sobre los chopos en otoño.

Area.—Sólo puedo citar esta curiosa especie en Córdoba, de donde hace algunos años me la envió para su estudio el Sr. Hernández Pacheco, profesor que era entonces en el instituto de la mencionada ciudad.

POLYSTICTUS CORYLICOLA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos concoideos con el contorno semicircular, de dos a cuatro centímetros de diámetro, patentes o aplicados sobre el soporte, muy delgados, con el margen algo ondeado; superficie superior aterciopelada y de color leonado, dividida en zonas concéntricas por líneas cubiertas de cerditas escamosas erizadas y de color pardo más intenso y algo rojizo. Carne escasa y blanca. Tubos muy cortos, de un milímetro cuando más. Poros poligonales, algo desiguales, relativamente algo mayores que en otras especies de este género, ocráceos al principio y luego pardos y aun casi de color de café. Espora de unas siete μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los troncos de los avellanos, en otoño.

Area.—Sólo he observado esta especie en algunas localidades de Asturias (Avilés, Rivadesella) y Santander (San Vicente de la Barquera). De Ramales, en esta última provincia me ha procurado ejemplares el Sr. Ortiz.

POLYSTICTUS KIMATODES Fries.

Sinonimia.

Polyporus Kimatodes Fr.

Iconografía.

Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 24.
Fries. Ic. select. Hymen., lám. 183, fig. 1.

Descripción.—Aparatos esporíferos casi laminares, ligeramente convexos por el haz y cóncavos por el envés, con el contorno entre arriñonado y concoideo, con el borde ondeado y la superficie superior pubescente, de color pardo claro y al fin blanquecina, sin entícula. Carne blanca y escasa. Tubos cortísimos, blanquecinos. Poros desiguales redondeados, de tamaño mediano, blancos, que lentamente van adquiriendo una coloración grisácea.

Habitación.—Es común en los troncos de los pinos, tanto en países montuosos como en tierras bajas durante la estación otoñal.

Area.—Hasta hoy sólo se ha citado en las regiones occidental, central y septentrional.

C.—*Carne más o menos coloreada.*

POLYSTICTUS ADUSTUS *(Willd.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus adustus Willd.
Polyporus adustus Bull.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 501, fig. 2.
Batsch. Elench. Fung., lám. 41, fig. 226.
Œder. Fl. Dam., lám. 1850, fig. 1.
Sow. Engl. Fung., lám. 231 (variedad).

Klotzch. Fl. Boruss., lám. 472.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 38.
Britz. Polyp., fig. 35, 34 (variedad) y 133.
Quel. Champ. Vosg. Jura, lám. 18, fig. 2.
Gillet. Hymen., lám. 577 (variedad).
Pat. Tabl. anal., lám. 142.
Roll. Atl. des Champ., lám. 96, fig. 210.

Descripción.—Aparato esporífero semirredondeado, patente o revuelto, de tres a cinco centímetros en su diámetro mayor, concoideo y delgado, con la superficie superior vellosa, blanquecina, con zonas concéntricas de color gris parduzco o leonado, que se ennegrece en los bordes. Carne escasa, blanda, algodonosa al cortarla, blanca al principio y pasando luego a tonos grisáceos y aun negruzcos. Tubos cortos y pequeños, de color gris o pardusco muy claro. Poros redondos, desiguales, pruinosos, de color gris casi plateado y al fin pardo negruzcos. Espora elipsoidea de unas cinco μ.

Habitación.—Sobre los tocones en los bosques, excepto en los de coníferas, en otoño e invierno.

Area. - Comprobada hasta hoy solamente en las regiones septentrional, central y occidental.

POLYSTICTUS CROCEUS *(Pers.)* Fries.

Sinonimia.

Boletus croceus Pers.
Polyporus croceus Fr.

Descripción. – Aparatos esporíferos de contorno semicircular, frecuentemente sobrepuestos, gruesos, de nueve a doce centímetros de diámetro mayor, con la superficie superior levemente aterciopelada y de coloración variable desde el amarillo pálido al anaranjado. Carne relativamente abundante entre fibrosa y esponjosa, rojizo pálida con líneas estrechas y no muy marcadas de color anaranjado. Tubos

relativamente largos (hasta seis ó siete milímetros próximamente) de color amarillento sucio, tirando algo a rojizo. Poros angulosos, de mediano tamaño, finamente pestañosos en su borde, cuya coloración cambia del amarillo anaranjado al azafranado. Esporas elipsoideas de unas ocho μ en su diámetro mayor.

Habitación.—Hállase en otoño sobre los troncos viejos o cortados de los robles.

Area.—Se ha comprobado alguna vez en las regiones septentrional y occidental de la Península.

Gen. **POLYSTICTOIDES** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos de contorno semicircular, aislados generalmente, rara vez superpuestos en número de dos o tres, de forma laminar, pero como sus capas carnosa y tubífera son relativamente gruesas llegan á alcanzar de uno a dos centímetros de grueso total en su porción central, adelgazándose hacia el borde. Tubos relativamente largos, de medio a un centímetro. Poros pequeños, redondeados o poligonales.

A.—*Carne marcadamente coloreada.*

POLYSTICTOIDES CUTICULARIS (*Bull.*) Láz.

Polyporus cuticularis Bull.
Polystictus cuticularis Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 462.

Descripción.—Aparatos esporíferos delgados, concoideos semirredondeados en su contorno de diez a treinta centímetros de diámetro horizontal, subpedicelados o angostados en la base, reunidos en grupos empizarrados, con la super-

ficie superior aterciopelada por la existencia de pelitos sedosos, amarillenta leonada, después ocrácea y pardo negruzca, ornada de zonas oscuras, concéntricas, bastante separadas. Carne muy escasa, fibrosa, tierna en fresco, después seca y de color leonado ocráceo. Tubos largos relativamente, hasta más de un centímetro, de color pardo oscuro. Poros redondos con el borde más o menos laciniado, leonados, con pruina blanquecina que luego pasa a cérea algo verdosa. Espora elipsoidea, de unas siete μ, con la exospora sembrada de papilas.

Habitación.—Sobre los troncos de cupulíferas en fin de verano.

Area.—Hasta hoy sólo es conocida en la región septentrional.

POLYSTICTOIDES FUSCUS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos gruesecitos, de contorno semicircular, con la cara superior plana o algo cóncava y la inferior convexa, y con el borde levemente ondeado; superficie superior formada por una cutícula separable, no zonada, con algunos surcos concéntricos indicados, de color homogéneamente pardo terroso, finamente granugienta y mate. Carne de color crema clara, poco consistente, formando una capa delgada hacia la periferia, pero que en el centro puede alcanzar un centímetro de grueso próximamente. Tubos de color crema claro, estrechos, hasta de un centímetro de longitud en la porción central, y más cortos en la periférica.

Habitación.—Hállase en verano sobre chopos, abedules y otros árboles.

Area.—Unicamente en la región septentrional puedo afirmar su existencia. Los ejemplares que poseo proceden de San Vicente de la Barquera (Santander) y Salinas de Avilés (Asturlas).

B.—*Carne blanca o casi blanca.*

POLYSTICTOIDES HIRSUTUS *(Schrad.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus hirsutus Schrad.
Polyporus hirsutus Fr.

Iconografía.

Œder. Fl. Dan. lám. 2079, fig. 1 (variedad).
Britz. Hymen., Ausbg., V, fig. 59.
Britz. Polyp., fig. 150.

Descripción.—Aparato esporífero delgado, semirredondeado, zonado concéntricamente, de cuatro a siete centímetros de diámetro, con la superficie superior blanca, erizada de pelos rígidos que la hacen aparecer aterciopelada o lanuda, pardo grisácea oscura en la región central, leonada clara en la zona marginal. Carne blanca, muy coriácea. Tubos cortos, casi blancos. Poros redondos, bastante iguales, relativamente gruesos, blancos al principio, amarillentos luego y finalmente parduscos. Esporas elipsoideas, bastante alargadas, de unos siete μ.

Habitación.—Aparecen los aparatos esporíferos sobrepuestos en grupos sobre árboles muy diversos (hayas, abedules, alisos, eucalíptos, cerezos) en verano y otoño.

Area.—Comprobada su existencia en localidades montuosas de las regiones boreal, central y occidental, y en el Nordeste de la Península.

Observaciones.—Esta especie es algo polimorfa y sobre todo variable en las tonalidades de los pelitos rígidos que erizan las zonas de la cara superior de sus aparatos esporíferos, por lo que debo hacer mención de las variedades que pueden distinguirse en los ejemplares que he tenido ocasión de observar en España,

Variedad **albescens:** caracterizada por la tonalidad general gris clara, con las zonas más claras de color blanco y las oscuras o erizadas aparecen matizadas de un pardo grisáceo claro, por lo que no se marcan grandes contrastes.

He recibido ejemplares correspondientes a esta variedad, procedentes de Olmedo (Valladolid), donde la recogió el doctor Gutiérrez Martín, sin el dato del árbol sobre que vivía.

Variedad **griseus:** distinta por su carencia de zonas blancas, todas son grises, unas claras y otras oscuras, sin ninguna tonalidad parda ni rojiza.

Esta la he hallado en diversas localidades de Asturias, y también me la ha remitido de Cibea (cerca de Cangas de Tineo) el doctor Rodríguez; todos estos ejemplares fueron recogidos sobre aliso.

Variedad **fuscus:** fácil de reconocer porque su tonalidad dominante es parda y porque en las zonas oscuras, las más erizadas, el color pardo intenso tiene un tono acentuadamente rojizo, el cual desaparece en los ejemplares viejos pasando a un pardo bastante oscuro.

La recogí hace bastantes años sobre el tocón de un almez en el jardín de la Facultad de Farmacia de Madrid y la he hallado varias veces sobre los olmos viejos en la sierra de Guadarrama.

POLYSTICTOIDES AMORPHUS *(Sow.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus aureolus Pers.
Polyporus irregularis Sow.
Polyporus roseosporus Rostk.
Polistictus amorphus Fr.

Iconografía.

Sow. Emgl. Fung., lám. 423.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 12.
Gillet. Champ. de la France, lám. 469.

Descripción.—Aparatos esporíferos muy variables en su forma, constituyendo repliegues sobre los troncos, patentes o reflejos, semirredondeados, de dos a cuatro centímetros de diámetro, muy delgados y concoideos, membranosos y festonados o rizados en sus bordes, con la superficie superior blanca y tomentosa; carne escasa blanca y tierna, algo coriácea. Tubos cortos y amarillentos. Poros redondeados, bastante iguales, blancos, y luego amarillos, anaranjados y aun algo rojizos. Esporas elipsoideas de cuatro o cinco μ.

Habitación.—Hállanse, agrupados sobre los tocones en los bosques de coníferas, en verano y en otoño.

Area.—Limítase hasta hoy a las zonas montañosas del Norte y Pirineos y región central. En los pinares del Guadarrama y aun en la Real Casa de Campo (Madrid) hemos podido comprobar su existencia.

POLYSTICTOIDES ABIETINUS *(Dicks.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus abietinus Dicks.
Boletus purpurascens Pers.
Polyporus abietinus Fr.
Polistictus abietinus Fr.

Iconografía.

Dicks. Fasc. pl., III, lám. 9, fig. 9.
Purton. Bot. descr., III, lám. 13.
Œder. Fl. Dam., lám. 1928 y 2079, fig. 2.
Grev. Scott. crypt. Fl., lám. 226.
Gillet. Hymen., lám. 463.
Doas et Pat. Champ. fig. et dess., lám. 67.
Myg. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 34 B., fig. 1 y 2.

Descripción.—Aparatos esporíferos subdivididos en grupos numerosos, patentes o revueltos, de dos a cuatro centímetros de diámetro, convexos, apergaminados y muy del-

gados, con la superficie superior vellosa, con surcos o pliegues radiantes y más o menos zonados, blanquecinos o cenicientos, teñidos al fin de verdoso, excepto en los bordes, que están algo ondulados. Carne casi nula, blanca. Tubos medianos pardo-violáceos. Poros desiguales, grandecitos, angulosos, purpurinos, enteros al principio, más tarde desgarrados o dentados y rojizo-violáceos.

Habitación.—Sobre los troncos de coníferas, principalmente los abetos durante el otoño.

Area.—Localidades montuosas del Norte, Oeste y Sur.

Observación.—Es considerado actualmente como la forma joven de un *Irpex*, acaso del *violaceus*, que en estado adulto no se ha encontrado aún en nuestro país.

(Continuará.)

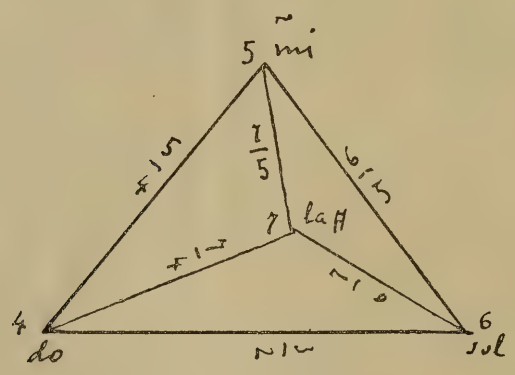
XXXIV.—Sobre la teoría científica de la música

(Continuación.)

POR JUAN DOMÍNGUEZ BERRUETA

Entremos ya en la exposición esquemática del acorde tridimensional.

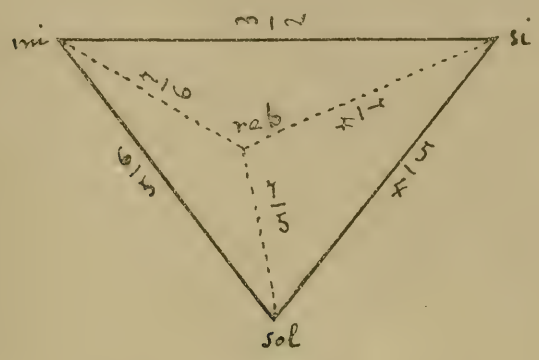
Para la mayor claridad de las figuras, en vez de representar el *tetaedro armónico* en perspectiva, como hemos hecho anteriormente, lo haremos en proyección en esta forma.



(Figura 20.)

Es decir, que los tres puntos, *do — mi — sol,* del *acorde trifónico* los consideramos en el plano de la figura, con sus posiciones reales; y el punto del espacio, *la* ♯, lo consideramos en su proyección ortogonal, y sus distancias a los vértices del triángulo, *do — mi — sol,* son las proyecciones respectivas de las distancias del punto del espacio *la* ♯, a los mismos vértices.

Si formamos el tetraedro *simétrico* del anterior, respecto al *punto* medio del lado *mi — sol*, tendremos



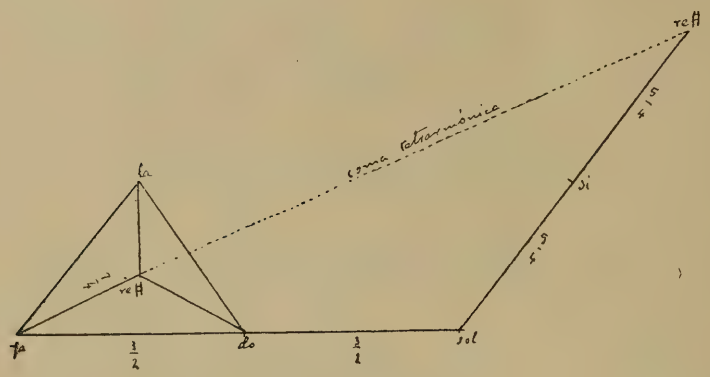
(Figura 21.)

Ahora los tres puntos *mi — sol — si*, del *acorde menor trifónico* están también en el plano de la figura; y el punto *re♭* del espacio (*simétrico* del *la♯* respecto al punto medio del lado $\frac{6}{5}$) tiene su proyección, en el plano de la figura, simétrica de la del punto la♯. Es claro que estando el punto la♯ en el espacio, por encima del plano de la figura, el punto *re♭*, en el espacio, estará debajo del mismo plano, y por eso representamos de puntos las rectas que lo unen con los vértices *mi — sol — si*.

Recordando las propiedades geométricas de las figuras *simétricas* podemos establecer: *1.º*, que el *tetraedro armónico menor, mi — sol — si — re♭*, es el mismo, cualquiera que sea el *centro de simetría; 2.º*, que pudiéramos llevar ese mismo tetraedro a la posición simétrica, respecto al plano *do — mi — sol* del *tetraedro armónico mayor, do — mi — sol — la♯*; y *3.º*, que los dos *tetraedros*, aun cuando tienen sus elementos iguales, no son superponibles.

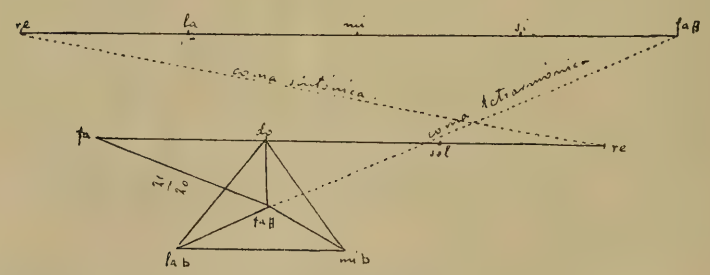
Esto sentado, podremos ya representar esquemáticamente

las fórmulas [A], [B], [C], [D] del *temperamento tridimensional.*



(Figura [A])

Se ve en este esquema cómo se engendra el intervalo $\frac{7}{4}$ en el ciclo de dos *quintas*, dos *terceras* y una *coma tetrarmónica.*

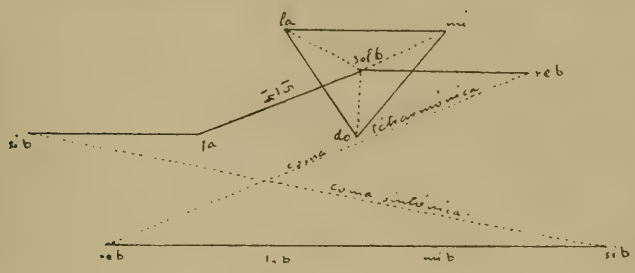


(Figura [B])

En este esquema el ciclo se cierra con siete *quintas*, una *coma sintónica*, otra *tetrarmónica* y el intervalo *fa* — *fa* ♯ $= \frac{21}{20}$.

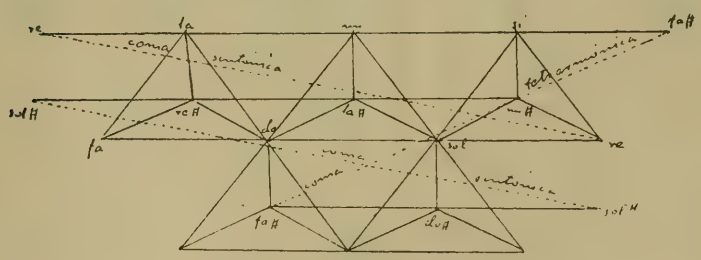
La traducción de este esquema es que el ciclo del temperamento se cierra aquí con cinco quintas, una *coma sintó-*

nica, otra *tetrarmónica* y el intervalo $\frac{15}{14} = fa - sol\,\flat$. Hay que advertir que si se toman las *quintas* ascendentes, el pun-



(Figura [C])

to de partida está en *sol* ♭, siguiendo esta marcha: *sol* ♭ — *re* ♭ — *la* ♭ — *mi* ♭ — *si* ♭ — *fa,* y entonces el intervalo final está invertido $= sol\,\flat - fa = \frac{14}{14}$.

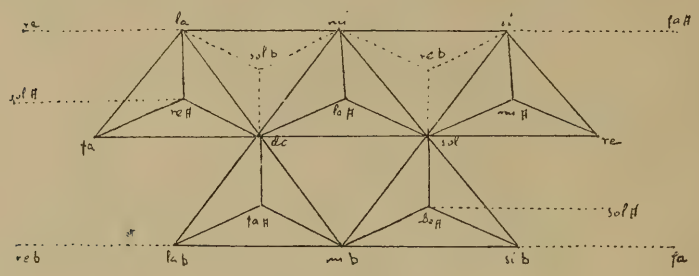


(Figura [D])

En este esquema se ve el ciclo de las doce *quintas* con dos *comas sintónicas* y una *tetrarmónica* para terminar en el intervalo $mi\sharp - fa = \frac{63}{64}$.

Por último, combinando la fórmula [D] con la [C] para representar el esquema completo de las 17 *quintas,* en las que limitamos nuestro temperamento, y suprimiendo en la

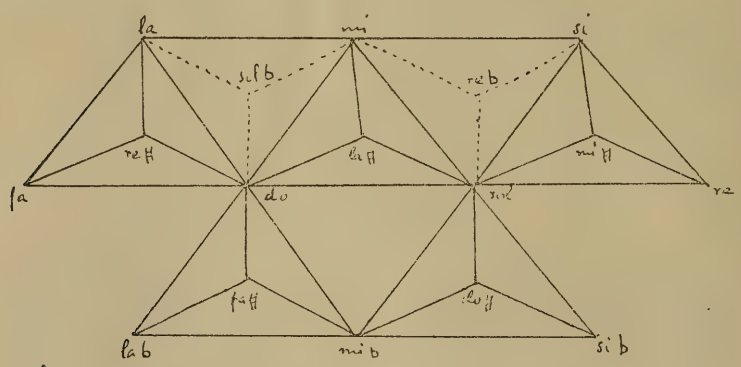
figura, para mayor sencillez, las líneas que representan las *comas*, cuya dirección ya conocemos por los esquemas anteriores, resulta:



(Figura [E])

Las *comas sintónicas* unirían las notas: re — re, fa — fa, sol♯ — sol♯; y las *comas tetrarmónicas* unirían: fa♯ — fa♯ y re♭ — re♭.

Suprimiendo, pues, las notas repetidas, aisladas, que son sustituídas mediante la reducción de la *coma* por sus homónimas de los tetraedros, obtendremos el esquema fundamental de nuestra gama, que es el siguiente:



(Figura [F])

El sol♯ no debe entrar en las notas de nuestra gama porque (véase la figura anterior) exigiría la formación de un

tetraedro, *si* ♭ — *re* — *fa* — *sol* ♯, con un *fa* distintodel fundamental, o de un tetraedro *si* ♭ — *re* – *fa* — *sol* ♯, con un *si* ♭ y un *re* distintos de los fundamentales.

Otra nota anterior al *sol* ♭ tampoco entra en nuestra gama, porque exigiría un tetraedro *re* — *fa* — *la* — *do* ♭, con el *re* distinto del fundamental.

Otra nota posterior al *mi* ♯ tampoco entra en nuestra gama, porque exigiría un tetraedro: *re* — *fa* ♯ — *la* — *si* ♯, con dos notas *fa* ♯, *la*, distintas de las fundamentales, que forman los tetraedros del temperamento.

Quedan por examinar otras notas posibles: las que formarían tetraedros con los triángulos de acorde menor: *fa* — *la* ♭ — *do, do* *mi* ♭ — *sol, sol* — *si* ♭ — *re.*

La primera sería un *mi* ♭ ♭, la segunda un *si* ♭ ♭, la tercera un *fa* ♭. Prescindiendo de los *dobles bemoles* (primeramente porque suponen ya una prolongación de la gama más allá de los *semitonos cromáticos*, que darían lugar a notas entre *re* y *re* ♯, entre *la* y *la* ♯, y después porque tampoco hay lugar, como hemos visto en la generación de los tetraedros, a los *dobles sostenidos)*, tampoco el *fa* ♭ sería admisible, primero, porque ya quedaría un tetraedro *sol* — *si* ♭ — *re* — *fa* ♭, *insimétrico* respecto de la figura en general; segundo, porque ese *fa* ♭, que valdría *mi* ♯ : $\frac{49}{48}$, sería en realidad un *doble bemol* colocado entre *mi* y *mi* ♯.

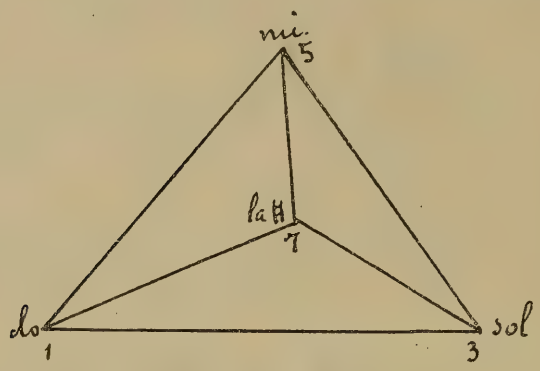
Analicemos ahora la composición y factura de cada tetraedro, armónicamente considerado.

Sea el acorde fundamental: *do* — *mi* — *sol* — *la* ♯.

Los números que expresan los armónicos que engendran sus notas (fig. [a]) son 1, 3, 5, *7*. Para reducirlos a la octava do_1 — do_2 bastará dividir dichos números por las potencias de *2*, que representan las octavas descendentes de las notas. Así quedarán reducidas a las siguientes refacciones numéricas de vibraciones: $1, \frac{3}{2}. \frac{5}{4} \frac{7}{4}$.

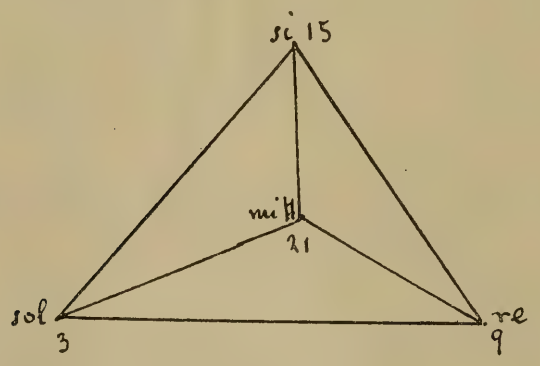
¿Cómo formaremos armónicamente el acorde *sol* — *si* — *re* — *mi*♯?

Con un tetraedro idéntico al anterior, sólo que la *unidad*



(Figura [a]

no es *do* = 1, sino *sol* = 3. Luego las notas tendrían por factores numéricos componentes los respectivos números anteriores multiplicados por 3.



(Figura [b].)

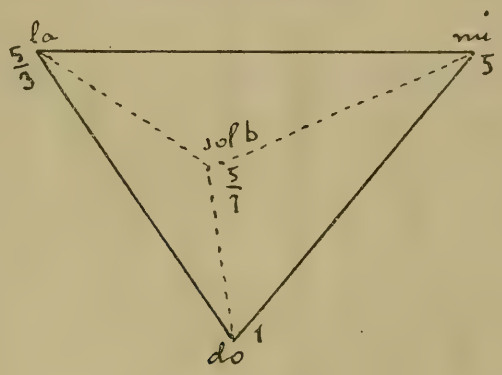
Y reduciendo las notas a la octava do_1 — do_2, resultará: $sol = \frac{3}{2}$, $re = \frac{9}{8}$, $si = \frac{15}{8}$, $mi\sharp = \frac{21}{16}$.

Análogamente formaríamos el acorde *fa — la — do — re♯*, tomando al $fa = \frac{1}{3}$ por unidad.

Y el acorde *la♭ — do — mi♭ — fa♯*, tomando el $la♭ = \frac{1}{5}$, por unidad.

Y el acorde *mi♭ — sol — si♭ — do♯*, con el $mi♭ = \frac{3}{5}$, por unidad.

Para el acorde menor *la — do — mi — sol♭*, no tenemos mas que calcular una nota, *sol♭* $\left(\textit{simétrica}\text{ de } fa♯ = \frac{7}{5}\right)$. Las otras dos notas están ya calculadas.



(Figura [f])

Y reducidas a la octava fundamental: $la = \frac{5}{3}$; $do = 1$; $mi = \frac{5}{4}$; $sol♭ = \frac{10}{7}$.

Estudiemos la característica del *acorde menor* respecto al *acorde mayor fundamental* [a].

1.° El acorde [a] es *simétrico* del [f] respecto al punto medio del lado *do — mi* (véase esquema [F]).

2.° Las notas del *acorde mayor* llevan este orden de generación armónica: *do — mi — sol — la♯* = 1 — 5 — 3 — 7.

Las notas del *acorde menor* deberán llevar este orden de números *simétricos* (inversos) respecto al punto medio del lado *do — mi*:

$$1 - \frac{1}{5} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7}.$$

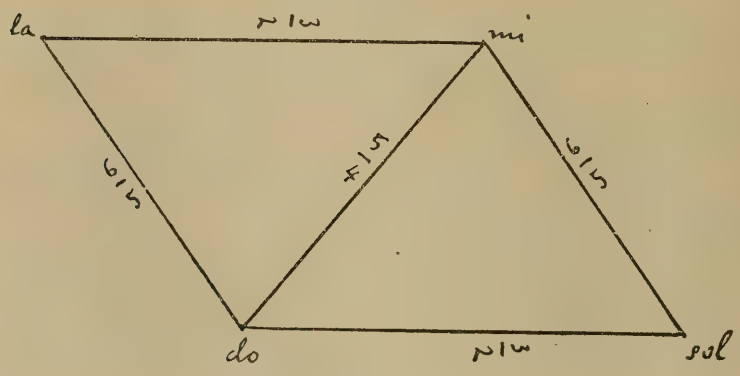
Y teniendo en cuenta las propiedades del *acorde menor trifónico*, que por lógica analogía extendemos al *tetrafónico*, el orden de sucesión de notas debe también ser *inverso* (por *simetría)* del orden de las notas en el *acorde mayor*, tendremos para el *acorde tetrafónico menor:*

$$\frac{1}{7} - \frac{1}{3} - \frac{1}{5} - 1.$$

Si multiplicamos por 5 esos cuatro valores, con lo cual no altera en nada la relatividad de las notas, resulta:

$$\frac{5}{7} - \frac{5}{3} - 1 - 5 = sol\,\flat - la - do - mi. \qquad [f]$$

Hemos dicho que por lógica analogía extendemos al acorde tetrafónico esa propiedad de *inversión* en el orden de las notas, y vamos a demostrarlo matemáticamente.



(Figura 22.)

En los *tetraedros simétricos* se ha dicho, y es cierto, que no son superponibles en general; los *triángulos simétricos* sí lo son siempre. Podría creerse que la característica del *acorde trifónico* no era, por tanto, aplicable, geométricamente, al *tetrafónico*. Y sí lo es. En efecto: sean los acordes trifónicos, *mayor* y *menor*, *do — mi — sol*, *la — do — mi* (fig. 22).

El orden de notas en el triángulo del acorde *mayor* recorre sus vértices en el sentido de las agujas de un reloj; el orden de notas en el acorde *menor* sigue el curso *inverso*.

Por consiguiente, aun cuando esos dos triángulos *simétricos* respecto al *punto medio* del lado *do — mi* son superponibles por una rotación de 180 grados alrededor de dicho *centro de simetría*, observamos que el punto *mi* del *acorde menor* coincidiría con el punto *do* del *acorde mayor*, y *viceversa*. De modo que habríamos conseguido una *coincidencia* «a la inversa», si podemos expresarlo así. Es decir, que esos dos triángulos, aun siendo superponibles (*), por tener sus elementos iguales, no son superponibles *armónicamente*, teniendo en cuenta el *sentido*, la *orientación* de los lados.

Para dar una prueba más de nuestro aserto cambiemos el *sentido* de la sucesión de los vértices en el acorde *menor*, lo que conseguiremos con un *rebatimiento* del triángulo *la — do — mi* alrededor del eje *do — mi*. La figura resultante será la siguiente: (fig. 23).

Hemos conseguido la misma *orientación* para los triángulos con el rebatimiento; pero el triángulo *do — mi — sol* no puede coincidir con el *do — mi — la*, pues los angulos adyacentes del lado común *do — mi* no son *respectivamente* iguales.

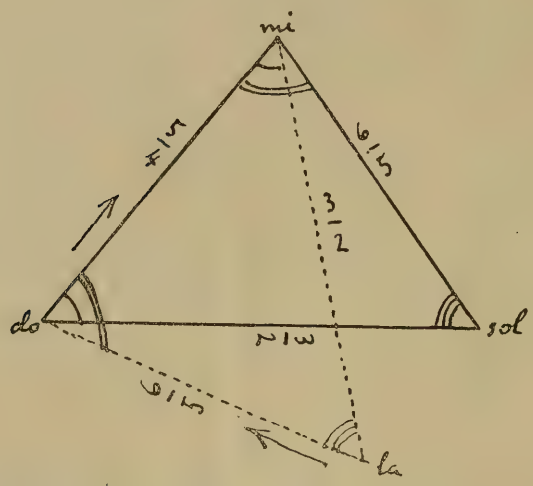
En resumen, si intentamos la superposición de los triángulos *(trifónicos mayor* y *menor)* por un *giro* sin salir de su

---

(*) Geométricamente, en magnitud.

plano, coinciden, pero orientadas a la inversa (como dos rectas AB y BA de la misma magnitud, pero de sentido inverso). Y si queremos orientarlos en un mismo sentido, por un *rebatimiento*, no pueden coincidir en las magnitudes respectivas de sus lados y sus ángulos.

Luego queda demostrado que los *triángulos trifónicos*, como los *tetraedros tetrafónicos, mayor* y *menor*, no son superponibles *armónicamente*, es decir, en *magnitud* y *orien-*



(Figura 23.)

tación, en *cantidad* y *cualidad*, en forma *geométrica* y forma *musical*.

Esta idea de la *orientación* aplicada a los *triángulos trifónicos* explica claramente toda la teoría, que tan insegura y confusamente exponen los autores acerca de la «inversión» de *armónicos* en el *acorde menor*, de la «inversión» de las *terceras*, de la «inversión» del *centro de gravedad*, etc., etc.

Análogamente trataríamos de los demás *acordes tetrafónicos menores re♭ — mi — sol — si = do — re♯ — fa♯ — la♯ = sol — la♯ — do♯ — mi♯*.

Quedamos, pues, en que nuestra gama posee los siguientes *acordes tetrarmónicos mayores:*

do — mi — sol — la ♯ = fa — la — do — re ♯ = sol — si
re — mi ♯ = la♭ — do — mi♭ — fa = mi♭ — sol — si♭ — do ♯.

Y los siguientes *acordes menores:*

sol♭ — la — do — mi = re♭ — mi — sol — si = do — re ♯
fa ♯ — la ♯ = sol — la ♯ — do ♯ — mi ♯.

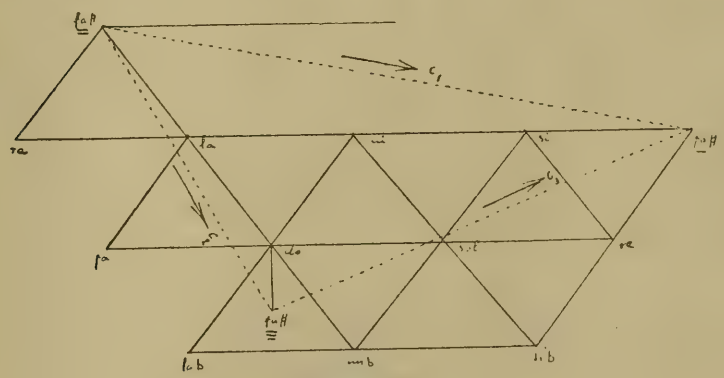
Estos son los acordes *tipos* constituídos por los intervalos fundamentales:

$$\frac{3}{2}, \frac{5}{4}, \frac{6}{5}, \frac{7}{4}, \frac{7}{5}, \frac{7}{6}.$$

* * *

Demostramos la existencia de una *coma tetrarmónica* distinta de la definida en nuestras fórmulas y esquemas [A], [B], [C] y [D].

Gráficamente puede hallarse en seguida la relación entre la *coma sintónica,* que llamaremos C_1, la nueva *coma tetrarmónica* C_2 y la hallada ya anteriormente C_3. Sea, en efecto, el esquema:



(Figura [K])

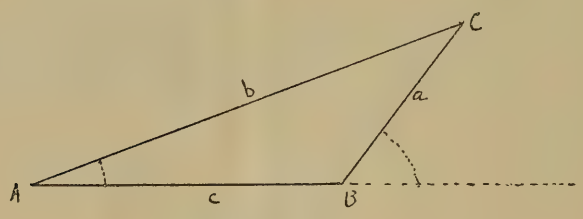
Hemos subrayado una vez al *fa ♯ toloméico,* dos veces al FA ♯ de los *físicos,* y tres veces al FA ♯ *tetrarmónico.*

Observando la figura se ve que la *coma toloméica* es igual al producto de las otras dos: $c_1 = c_2 \times c_3$. Porque el camino recorrido por la primera (FA♯ — *fa*♯) es igual al resultado de recorrer las otras dos: (FA♯ — FA♯) + (FA♯ — *fa*♯). Y ya sabemos que lo que se entiende por *coma de distancias acústicas* (intervalos) entre las notas musicales es el *producto de las relaciones numéricas* que representan dichas notas.

De esa propiedad de la composición de intervalos, de la cual hemos dado ya la explicación *logarítmica*, puede darse también una demostración *algebraica* general.

En efecto, la *suma algebraica* de dos *cantidades dirigidas* se obtiene colocando la primera y a continuación la segunda con las mismas *magnitudes* y *direcciones* que tienen. Y la *suma* es la recta (en *magnitud* y *dirección)* que une al *punto origen* con el *punto terminal.*

Así en la figura siguiente:



(Figura 24.)

AC = AB + BC (algebraicamente).

Es decir, poniendo las expresiones algebraicas de las rectas:

$$b \cdot \left(\cos A + \sqrt{-1} \cdot \operatorname{sen} A\right) = c + a \cdot \left(\cos B + \right.$$
$$\left. + \sqrt{-1} \operatorname{sen} B\right).$$

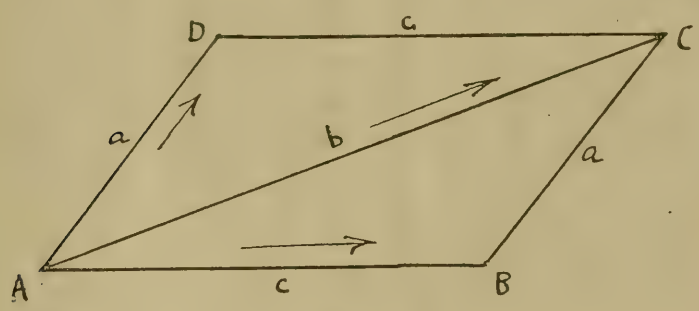
[Los binomios encerrados en paréntesis son los coeficientes de *dirección,* que indican el ángulo que la recta for-

ma con la dirección *positiva*. La recta *c* no lleva coeficiente porque tiene dirección positiva.]

No nos extendemos en desarrollar estas ideas porque a nuestro propósito es suficiente lo expuesto, y no hemos de trasladar a nuestras páginas un capítulo de trigonometría algebraica, por otra parte elementalísimo.

Lo que sí añadiremos es el concepto de *resultante*, como de *fuerzas físicas* angulares, que tiene la *suma algebraica* en el caso que nos ocupa (y en general también), y que servirá para afianzarnos en la idea de verificar el *producto* o *resultante* de intervalos por medio de la *suma algebraica* de las rectas que los representan en nuestros esquemas.

Así la resultante de las *fuerzas a* y *c* es la diagonal *b* del paralelógramo ABCD.



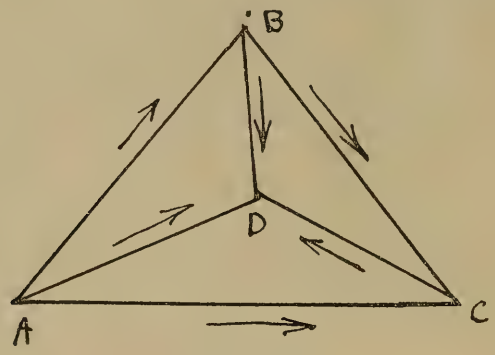
(Figura 25.)

Y vemos que esa *resultante* es la misma *suma algebraica* de las rectas AB y BC.

Pues bien, esto tiene importante aplicación en nuestros esquemas de los acordes tridimensionales para hallar en un momento dado, y con la mayor sencillez, el intervalo que separa a dos notas cualesquiera.

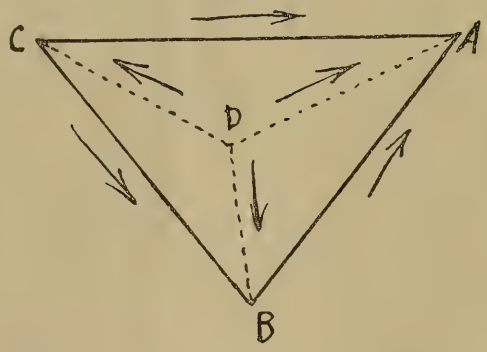
Para ello consideremos los dos tetraedros que representan a los acordes tetrafónicos mayor y menor. Y señalemos

en sus aristas la dirección de los intervalos, teniendo en cuenta el orden (alfabético) de las notas (figs. 26 y 27).



(Figura 26.)

Ya sabemos que en el acorde *menor* el orden de sucesión está invertido con respecto al *mayor*.



(Figura 27.

Las aristas en el tetraedro del acorde mayor tendrán esta composición algebraica, según lo ya explicado:

$$AC = AB + BC;\ AD = AC + CD;\ BD = BC + CC.$$

Y en el acorde menor:

$$DA = DC + CA;\ DB = DC + CB;\ CA = CB + BA.$$

Observamos que las aristas *elementales* son únicamente tres: AB, BC y CD, a las que designaremos por las letras *a*, *b* y *c*, respectivamente.

Y recordando las relaciones numéricas que representan los lados de los tetraedros tetrafónicos, tendremos que $a = \frac{5}{4}$, $b = \frac{6}{5}$, $c = \frac{7}{6}$.

A esos factores elementales reducimos todos los intervalos posibles de la gama. Y con esto damos por terminada la exposición de nuestro *acorde tridimensional*, base de una armonía nueva.

Hemos de hacer constar que en nuestro trabajo de regeneración de la gama no hemos perdido de vista que no hay mejor progreso que el que tiene sus cimientos en la tradición, y que no nos ha guiado en nuestras investigaciones ningún prurito de revolucionar a todo trance, no dejando piedra sobre piedra en el edificio musical.

Pero esta misma libertad de ánimo nos da fuerza y razón para no rendir culto a una rutina que ha consagrado, sin base alguna de ciencia ni de arte, tantos errores y prejuicios en la teoría de la gama.

XXXV.—Los parásitos del «poll-roig».

Por Ricardo García Mercet.

Por los años de 1910 a 1912 debió adquirir en España su mayor fuerza expansiva, y a la vez intensiva, la plaga del naranjo que se conoce vulgarmente en la costa del Levante con el nombre de *poll-roig*.

Los daños que causaba entonces a esos frutales la funesta cochinilla eran sin duda tan enormes que, con frecuencia, vimos se hacía eco la Prensa noticiera de la alarma y de los quebrantos que producía a los agricultores el desarrollo de esa plaga, que nadie podía dominar.

No pudo por menos aquel estado de cosas de llamar la atención de los entomólogos de nuestro país, ya que por sus conocimientos eran principalmente los designados para estudiar la plaga y proporcionar sobre el insecto que la constituía las noticias necesarias para que pudiera ser combatido.

Hice yo por aquellos años algunos estudios del *poll-roig* con el fin de determinar su extensión por la Península, los árboles y las plantas a que atacaba, la manera de distinguirlo y caracterizarlo y descubrir los insectillos que a expensas del funesto fitófago pudieran vivir.

Como fruto de aquellos estudios pude presentar una comunicación sobre el asunto a la Sección de Ciencias Naturales del Congreso que celebró en Valencia el año 1910 la *Asociación Española para el progreso de las Ciencias*, y escribí al poco tiempo algunas breves notas que fueron publicadas en el *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural* y en un periódico noticiero de los que más lectores tienen en Valencia.

La causa de que aquellas publicaciones mías ofreciesen

algún interés y originalidad consistió principalmente en haber tenido la fortuna de encontrar entre los materiales que de Sevilla, Valencia, Alicante, Murcia, Almería, Málaga y las Baleares recibí para observación, algunos individuos del piojo rojo atacados por otros insectos que les causaban la muerte. Este hallazgo mío, debido exclusivamente a la casualidad, tuvo a la sazón algún interés porque nadie hasta entonces había encontrado, ni en España ni fuera de España, los parásitos del piojo rojo.

Dos eran los enemigos de esta cochinilla que yo encontré, y ambos pertenecían al orden de los Himenópteros y a una familia de este orden que se denomina de los Calcídidos. Se trataba, por consiguiente, de dos avispitas, llamémoslas así, pero de un tamaño muy pequeño, apenas un milímetro de longitud, tanto que para observarlas y estudiarlas se requería el empleo del microscopio. Uno de esos insectillos lo describí en el *Boletín de la Real Sociedad Española de Historia Natural* correspondiente al mes de Febrero de 1912, y como era una especie desconocida del género *Aphelinus,* la designé con el nombre de *A. Chrysomphali* para indicar su procedencia del piojo rojo *(Chrysomphalus dictyospermi);* pero la otra avispita quedó entonces por publicar, y ahora daré su descripción formando parte de la presente nota.

La especie ya descrita, o sea el *Aphelinus Chrysomphali,* es de los dos parásitos del piojo rojo el que encontré en mayor cantidad, y el que, como consecuencia lógica, me pareció más digno de estudio, por el partido que de él pudiera sacarse para combatir la plaga del *poll-roig* aprovechando el conocimiento de uno de sus enemigos naturales. Pero debo declarar que cuando verifiqué estos estudios, los años 1910 á 1912, el número de cochinillas que aparecían atacadas por el parásito era muy reducido en todas las localidades donde se advertía la presencia de éste. Probablemente se trataría de una especie que empezaba entonces a

prosperar y a dar principio a su obra de protección. Desde aquella fecha hasta la de ahora ¿ha seguido multiplicándose y extendiendo su esfera de acción este insectillo beneficioso? A esta pregunta no puedo contestar de un modo categórico y preciso. Al poco tiempo de haber hallado los parásitos del piojo rojo del naranjo dejé su estudio para atender a otra labor, y no he vuelto a ocuparme en practicar observaciones sobre los enemigos del *Chrysomphalus*. Lo único que a este propósito puedo y debo decir es que a poco de haber hallado en varias localidades los parásitos del piojo rojo, empezaron los naranjos a verse libres de esta plaga. Por lo menos la creciente invasión de la cochinilla se contuvo y en algunas comarcas hasta se extinguió (*). Débase a la acción de estos parásitos, a la de otros insectos entomófagos, a influencias climatológicas o a causas más difíciles de presumir, el caso es que desde hace dos o tres años se va convirtiendo en huésped más soportable el que fué temible y funesto *poll-roig*.

Pero el que hoy no sea ya enemigo tan formidable como lo hubo sido la cochinilla roja de los naranjos no significa que haya dejado de ser una plaga que no nos deba preocupar. Desgraciadamente el exótico *Chrysomphalus* (**) ha encontrado en los países mediterráneos excelentes condiciones de existencia, y no estamos libres de que desapareciendo

---

(*) El propietario de un huerto de naranjos en Palma de Mallorca me participa, por ejemplo, que hace tres y cuatro años tenía todos los árboles atacados por el piojo rojo, siendo tan extraordinaria la invasión de cochinillas que amenazaba con destruir el naranjal. Pues bien, esos naranjos, sin que se les haya sometido a tratamiento artificial de ninguna clase, se encuentran ahora completamente libres del insecto que los destruía y han dado este año una cosecha de fruto abundante y de excelentes condiciones. El propietario de referencia se muestra admirado de que eso haya podido ocurrir. Más adelante, en este mismo trabajo, se encontrará la probable explicación del fenómeno.

(*) Se admite que esta cochinilla es originaria de las Antillas.

las circunstancias que determinaron su decrecimiento pueda cualquier día volver a adquirir la fuerza expansiva que hasta hace poco tuvo. Por eso, de paso que doy a conocer el parásito del piojo rojo que conservo inédito desde el año 1910, me parece oportuno publicar algunas noticias sobre los trabajos que ejecutan varios entomólogos italianos para descubrir nuevos y más eficaces enemigos de esta cochinilla.

En Italia, en efecto, el *Chrysomphalus dictyospermi* está tan extendido como en España, y ataca a un número tan grande de plantas y árboles como en nuestro país (*). Se comprende, por tanto, que allí preocupe la invasión de este piojillo del naranjo y que se estudie con perseverancia el medio más fácil y económico de combatirlo.

Pero hasta ahora los trabajos de los entomólogos italianos habían dado poco fruto. Ninguno de los parásitos encontrados por mí en España ha sido hallado en aquella otra península. Tampoco se ha intentado la introducción de ellos por el escaso valor que deben poseer, dado el reducido número de piojillos que encontré víctimas de estos calcídidos. Mas como los estudios que allí verifican algunos laboratorios o estaciones de entomología agraria se efectúan no sólo sobre materiales de Italia sino sobre muestras recibidas de otros países, uno de esos centros de investigación (**) ha encontrado mi *Aphelinus Chrysomphali* en los naranjos de Grecia y Sicilia, y ha descubierto además en ramas invadidas de *Chrysomphalus* procedentes de la isla de Madera un nuevo parásito del *poll-roig*. Así ha tenido la bondad de

(*) El piojo rojo es una de las especies de polifagia más extensa que se conocen. Yo lo he observado sobre toda clase de naranjos, sobre el limonero, el algarrobo, el laurel, la adelfa, el evónimo, la yedra, el aligustre, el peral, el mirto, el plátano; la vid, el madroñero, el níspero, el acerolo, el boj y la palmera, pero se le señala como parásito de otra porción de árboles y arbustos.

(**) La estación de entomología agraria de Florencia, dirigida por el Profesor Antonio Berlese.

comunicármelo recientemente, en carta particular, el director del establecimiento a que acabo de referirme.

El nuevo enemigo del piojo rojo es, como los que yo encontré hace años, un pequeño himenóptero de la familia de los calcídidos, más afin del *Aphelinus Chrysomphali* que del otro parásito que en la presente nota me propongo describir. Pero se diferencia esencialmente de los míos por ser un parásito endófago, o sea interno de la especie víctima, mientras que los dos por mí encontrados son parásitos exófagos, o sea externos a la cochinilla. Esta distinción en el modo de operar como parásitos los calcídidos a que estoy refiriéndome no tiene nada de extraordinaria. La avispita descubierta por Berlese pertenece a un género cuyas especies son todas parásitos endófagos, mientras que las encontradas por mí corresponden a dos géneros *(Aphelinus* y *Aphycus)* de los que no he obtenido ni observado hasta ahora sino formas exófagas.

Fig. 1.ª—Ninfa de *Aphycus hesperidum* encontrada bajo un escudo del *poll-roig.* — (Muy aumentada.)

El microhimenóptero hallado por Berlese pertenece al género *Prospaltella* de la tribu de los Afelininos, y ha sido descrito bajo el nombre de *P. Lounsburyi* (*). En el estado larval y ninfal vive este insectillo en el interior de las ninfas y de los adultos del piojo rojo, y dentro de ellos experimenta la transformación en forma alada. El *Aphelinus* y el *Aphycus* hallados por mí como enemigos del *poll-roig* viven bajo el escudo protector de la cochinilla, pero fijados externamente, mientras son larvas, al cuerpo del Cóccido, y al transformarse en ninfas quedan independientes de su víc-

(*) A. Berlese e G. Paoli: Un endofago esotico efficace contro il *Chrysomphalus dictyospermi.* Morg.

tima, aunque bajo la coraza que ésta construyó para protegerse. Todas las ninfas de *Aphelinus Chrysomphali* y de *Aphycus hesperidum* que he observado yo, se encontraban así, y de ellas da idea el grabado adjunto (fig. 1.ª). En cambio las ninfas de la *Prospaltella Lounsburyi* se encuentran del modo que indica la figura 2.ª que reproduzco del folleto publicado por Berlese y Paoli.

Fig. 2.ª — Ninfa de *Prospaltella lounsburyi* en ninfa de *Crysomphalus* (según Berlese y Paoli).

El descubrimiento del nuevo enemigo del *Chrysomphalus dictyospermi* ofrece por lo pronto bastante interés, pues el porcentaje de cochinillas que destruye en la isla de Madera oscila entre un 40 y un 60 por 100 de las que se encuentren sobre cualquier árbol invadido. De presumir es que introducido en Europa, y cuidando de su difusión y multiplicación en los lugares donde el piojo rojo del naranjo constituya un huésped molesto, sea para esta cochinilla un enemigo que la impida prosperar y la deje reducida a la condición de insecto soportable.

A esto deben aspirar el agricultor y el entomólogo en la lucha que emprendan contra las plagas del campo. La extinción total de una especie fitófaga polífaga como el *poll-*

roig es una obra que puede reputarse como imposible de conseguir (por ser muy varias las plantas a que dirige sus ataques), mucho más si tratamos de combatirla solamente por medios artificiales. Los insectos fitófagos de alimentación muy especializada son los únicos que podemos aspirar a que sean dominados artificialmente, porque como viven a expensas de una planta tan sólo, operando sobre ésta es posible que consigamos, con más o menos trabajo, su destrucción. Los que se alimentan indistintamente de varias especies de plantas son mucho más difíciles de exterminar, por resultarnos tarea superior a las fuerzas humanas el atacarlos en todas sus viviendas. Esto es lo que ocurre con el *poll-roig*. De poco servirá, en definitiva, que se le combata sobre el naranjo si queda viviendo, por ejemplo, en el algarrobo, en la yedra, en el evónimo, en el aligustre y en las palmeras. De estas plantas pasará nuevamente a aquellas de que fué expulsado en cuanto encuentre ocasión propicia. Por eso, para esta clase de enemigos, la manera más eficaz de atacarlos es la de la lucha natural, o sea la que consiste en oponer al crecimiento de la plaga el de las especies entomófagas que la devoren, porque estas especies, teniendo una esfera muy amplia de acción sobre sus víctimas, las buscarán y perseguirán en todos los vegetales que sirvan a los fitófagos de alimento.

De aquí el interés grandísimo que puede tener para la agricultura española el conocimiento de los parásitos y perseguidores del *poll-roig*, entre los cuales parece que debe figurar en primera línea la *Prospaltella*, descubierta recientemente por los entomólogos italianos Sres. Berlese y Paoli (*).

(*) Entre los insectos entomófagos que pudieran ser perseguidores y destructores del *poll-roig* señalaba yo, en el trabajo que presenté al Congreso de Valencia en 1910, el diminuto coleóptero coccinelido que se conoce científicamente con el nombre de *Chilochorus bipustulatus*. Este insectillo, por fortuna abundante en Valencia, era

Para dar cuenta principalmente de este hallazgo, que considero de verdadera importancia si se confirma el porcentaje destructor de la cochinilla roja que se le atribuye, he escrito la presente nota, que termino con la publicación del parásito del *Chrysomphalus dictyospermi* encontrado por mí y que aún no había dado a conocer. Este insecto pertenece a la tribu de los Encirtinos, de la familia de los Calcídidos, y es el

entonces perseguido y destruído por los agricultores levantinos suponiéndole la madre del *poll-roig*, sin duda porque verifica el desove bajo los escudos secos de las cochinillas. Para destruir, principalmente, este error funesto y que fuese respetada una especie que se alimenta exclusivamente de piojillos de los vegetales escribí el trabajo a que me he referido y publiqué más tarde, en *El Mercantil Valenciano*, un artículo de divulgación científica dedicado a la presentación de las especies enemigas y devoradoras del *poll-roig*.

En aquella época no estaba comprobado de un modo indudable que el *Chilochorus bipustulatus* utilizase para su alimentación las larvitas del *Chrysomphalus*, pero era presumible que las empleara como alimento, pues se sabía constituyen sus manjares favoritos los individuos jóvenes del *Diaspis pentagona* (piojo blanco de la morera), del *Lecanium oleæ* (negrilla del olivo), del *Aspidiotus hederæ* (piojo de la yedra) y de otras cochinillas que en el estado larval apenas se diferencian del piojo rojo. La presunción, pues, de que el *Chilochorus*, donde no encontrara *Diaspis* ni *Lecanium* y hubiera *Chrysomphalus* atacaría a éstos era tan razonable que no titubeé en consignarla por escrito en los dos trabajos que acabo de citar.

Posteriormente he visto que en Sicilia y aun creo que en la Península italiana se ha comprobado la eficacia del *Chilochorus bipustulatus* contra el piojo rojo del naranjo y otras cochinillas similares.

Por otra parte, el Catedrático de Agricultura y Director del Instituto General y Técnico de Valencia, mi muy estimable amigo don Francisco Morote, me ha participado recientemente que desde que empezó á decrecer la plaga del *poll-roig* se encuentran los naranjos de aquella provincia más visitados de *Chilochorus* que lo estuvieron nunca.

Todo ello tiende a presentar el *Chilochorus* como un insecto altamente útil y de la mayor eficacia para combatir las cochinillas más dañinas y perjudiciales a la Agricultura. También demuestra que no anduve desacertado cuando señalé este pequeño coleóptero como una de las especies enemigas y destructoras del *poll-roig*.

Aphycus hesperidum *nov. sp.*

Hembra.—Cabeza de color anaranjado; mandíbulas rojizas, obscurecidas en el ápice; escapo amarillo, en el dorso con una mancha longitudinal negra; pedicelo amarillo, negruzco en la base; los tres primeros artejos del funículo negros, los tres últimos amarillo blanquecinos; maza con el primer artejo negro, el segundo negro en la mitad basilar y blanco en la apical, y el tercero blanco amarillento; ojos grises

Fig. 3.ª — Antena de la ♀ de *Aphycus hesperidum* (muy aumentada).

obscuros; estemas de color de carmín. Tórax y abdomen de color amarillo de limón, con la parte anterior del pronoto y dos manchas grandes a los lados del segmento medio negras. Alas hialinas. Patas de color amarillo de limón.

Cabeza casi lisa, con algunos pelitos sobre la frente y vértice; ojos lampiños; estemas dispuestos en triángulo acutángulo, las posteriores más próximos entre sí que del estema anterior, pero más próximo cada uno a la órbita interna del ojo compuesto adyacente; frente estrecha; antenas insertas sobre el borde superior de la boca; escapo alargado, cerca de cuatro veces más largo que ancho en el centro; pedicelo piriforme, más largo que los dos primeros artejos del funículo reunidos; los tres primeros artejos del funículo de casi igual longitud y anchura; el cuarto, quinto y sexto aumentan suavemente en amplitud; la maza más gruesa que el funículo y casi tan larga como los seis artejos precedentes

reunidos (fig. 3.ª); mandíbulas cortas, tridentadas en el ápice; palpos maxilares de dos artejos.

Pronoto corto; escudo del mesonoto escamoso, con siete filas transversales de pestañitas blanquecinas; axilas y escudete escamosos también y con pestañitas blancas; escudete en el ápice con dos pestañas negras, bastante largas; lados del metanoto reticulados, formando mallas grandes la reticulación; metatórax corto. Alas anteriores grandes y anchas, tan largas como la cabeza, tórax y abdomen reunidos, con pestañas marginales de muy corta longitud; ner-

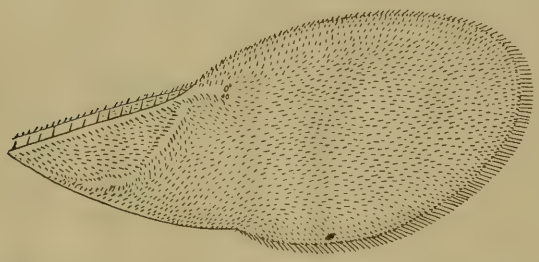


Fig. 4.ª—Ala anterior de *Aphycus hesperidum* (muy aumentada).

vio estigmático largo y terminado en forma de cabeza de pájaro; nervio marginal muy corto; el posmarginal rudimentario. Las pestañitas discales del ala y los espacios claros que dejan entre sí en el tercio basilar dispuestos como lo indica la figura 4.ª Alas metatorácicas cortas, con el disco cubierto de pestañitas y pestañas relativamente largas en el borde posterior. Patas intermedias más fuertes que las del primero y tercer par. Cara interna de los cuatro primeros artejos de los tarsos intermedios, en su mitad apical, con una serie de espinitas cortas, gruesas y romas que contribuyen a dar robustez a los artejos. El espolón, en las tibias del segundo par, tan largo como el metatarso correspondiente. Tibias posteriores con un solo espolón, de escasa longitud.

Abdomen más corto que el tórax, pero tan ancho como éste; estrechado hacia el ápice a partir del 4.° segmento; el 1.°, 2.°, 3.° y 4.° anillos de casi igual longitud; el último segmento grande y lateralmente retraído hacia la base del abdomen, alcanzando la retracción hasta el ápice del 4.° anillo; los espiráculos setíferos, portadores cada uno de tres pestañas muy largas y una corta, aparecen situados

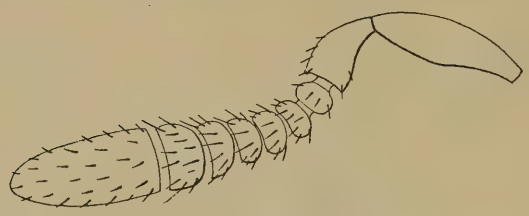


Fig. 5.ª—Antena de ♂ de *Aphycus hesperidum* (muy aumentada).

en el comienzo del último tercio abdominal; oviscapto apenas saliente, arranca de la base del 4.° segmento.

Longitud del cuerpo.....	1,100 m.m.
» de las antenas.....	0,520 m.m.
» de las alas anteriores..... ..	1,080 m.m.
Anchura máxima ídem íd.....	0,540 m.m.
Longitud de las pestañas más largas del borde posterior de las alas anteriores.....	0,021 m.m.
Longitud de las alas posteriores.....	0,630 m.m.
Anchura máxima ídem íd.....	0,175 m.m.
Longitud de las pestañas más largas ídem íd.....	0,055 m.m.

Macho.—Difiere de la hembra por los caracteres siguientes: Coloración general amarillento pardusca; antenas uniformemente de color pardo claro (fig. 5.ª); frente más ancha; los estemas posteriores separados entre sí por una distancia próximamente igual a la que los separa del estema anterior; pronoto y borde anterior del escudo del mesonoto pardos; borde posterior del escudete, lados del mismo, metanoto

y segmento medio pardos; todos los anillos abdominales pardo obscuros en el centro; el 6.° anillo casi en su totalidad pardo; tarsos de las patas intermedias menos pectinados.

Longitud del cuerpo.....	0,830 m.m.
» de las antenas...	0,410 m.m.
» de las alas anteriores.	0,710 m.m.
Anchura máxima ídem íd.....	0,390 m.m.
Longitud de las alas posteriores.... .	0,440 m.m.
Anchura máxima ídem íd...	0,110 m.m.
Longitud de las pestañas más largas de las alas posteriores.....	0,040 m m.

Observaciones. — *A. hesperidum* es una especie muy afín de *A. philippiæ* Masi y de *A. previdens* Silvestri. He aquí, comparativamente expresados, los caracteres que distinguen estos tres insectos entre sí.

A. philippiæ.	A. previdens.	A. hesperidum.
♀ Color amarillo. Escapo tres veces más largo que ancho en el centro, con una mancha transversal negra. Maza de las antenas truncada en el ápice. Longitud de las pestañas marginales más largas de las alas anteriores, 0,012 m. m. ♂ Coloración y antenas como en la ♀. (Los tres primeros artejos del funículo, negros; el 4.°, obscurecido; 5.° y 6.°, amarillos; maza negra en la base y amarilla en el ápice.) Dorso del abdomen, a veces con una mancha parda, que cubre los 2/3 basilares de la región.	♀ Color amarillo, con el pronoto, borde anterior del mesonoto, metanoto, segmento medio y primer anillo abdominal pardos. Escapo negro en el centro y blanco en la base y ápice. Maza de las antenas ovoidea. Longitud de las pestañas más largas de las alas anteriores, 0,028. ♂ Cuerpo de color ocráceo, obscurecido en el dorso. Maza y funículo de las antenas bastante pelosos y de color pardo. Parásito endófago.	♀ Cabeza de color de naranja; pronoto pardusco; el resto del tórax y el abdomen amarillos. Escapo cuatro veces más largo que ancho en el centro, con una mancha longitudinal negra. Maza de las antenas ovoidea. Longitud de las pestañas más largas de las alas anteriores, 0,021 m. m. ♂ Coloración del cuerpo amarillento pardusca; antenas muy poco pelosas y uniformemente de color pardo claro. Dorso del abdomen pardo en el centro, desde la base al ápice. Parásito exófago.

Biología. — Esta especie es un parásito exófago del *Chrysomphalus dictyospermi* var. *pinnulifera*, al que hace víctima de sus ataques sea cual fuere la planta sobre que viva.

He obtenido este *Aphycus* del *Chrysomphalus* en el naranjo (Sevilla, Huelva, Valencia y Palma de Mallorca), en el laurel (Palma de Mallorca) y en la adelfa (Sevilla). Ahora bien, el número de escudos de *Chrysomphalus* que he encontrado atacados por este Encirtino ha sido siempre muy pequeño; de modo que se trata de un enemigo del piojo rojo que molestaba poco a éste y no influía en su difusión. Así al menos pasaba por los años 1910 a 1912, que fué cuando obtuve este calcídido.

He dicho, repetidamente, que se trata de un parásito exófago porque he visto sus larvas y sus ninfas siempre externas al cuerpo de la cochinilla, aunque vivan bajo el escudo protector del Cóccido. La coraza de *Chrysomphalus* que haya sido elegida por el *Aphycus* para colocar su descendencia, encierra a última hora restos de la cochinilla que allí vivió, y a su lado, libre de toda envoltura, la ninfa del pequeño calcídido, en fase más o menos avanzada de su desarrollo. En cierto período de éste es muy fácil reconocerlas, no sólo por su color uniformemente amarillo sino por la forma y número de los artejos de las antenas, que pueden contarse cuando el estado ninfal está muy adelantado. No he podido practicar observaciones sobre la forma de efectuar las ♀♀ la deposición del huevo en el escudo del Cóccido, pero es presumible lo verifiquen de igual modo que los *Aphelinus* parásitos exófagos de las cochinillas, sobre los que se han hecho, entre otros, por M. Marchal, interesantes estudios de observación acerca de este particular.

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NUMERO

PÁGS.

XXXII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia décimacuarta..... 709

XXXIII.—Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia) (continuación), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 734

XXXIV.—Sobre la teoría científica de la música (conclusión), por *Juan Domínguez Berrueta*..... 760

XXXV.—Los parásitos del «poll-roig», por *Ricardo García Mercet*..... 776

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, 1,50 pesetas.

REVISTA

DE LA

REAL ACADEMIA DE CIENCIAS

EXACTAS, FÍSICAS Y NATURALES

DE

MADRID

TOMO XIV.—NÚMERO 12.
JUNIO DE 1916

MADRID
IMPRENTA RENACIMIENTO
CALLE DE SAN MARCOS, 42.
1916

ADVERTENCIA

Los originales para la Revista de la Academia se han de entregar completos, en la Secretaría de la Corporación, antes del día 20 de cada mes, pues de otro modo quedará su publicación para el mes siguiente.

XXXVI.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimaquinta.

SEÑORES:

Hemos empezado en nuestra última conferencia una digresión sobre los momentos de inercia, que va siendo larga y que sin embargo no puede terminar todavía; porque en el cuarto ejemplo de la teoría cinemática de los gases hemos de acudir a cada momento a varios teoremas sobre este concepto de la Dinámica, que yo supongo que mis alumnos conocen, pero que bueno es recordar, para que no se compliquen con las dificultades de la nueva teoría, las ideas, acaso algo desvanecidas, de otras que estudíaron hace tiempo: el tiempo todo lo borra.

Hemos definido el elipsoide de los momentos de inercia, que para cualquier cuerpo, en general, tiene siempre una forma fija. La superficie, digamos abreviadamente de los vectores de inercia siempre es, como vimos, un elipsoide, aunque no todo elipsoide pueda considerarse à priori como elipsoide de inercia, según se discute en Mecánica.

Hemos demostrado, también, que si los ejes de coordenadas para cualquier origen O han de coincidir con los tres ejes principales de inercia del cuerpo es indispensable y es suficiente, que dichos tres ejes hayan sido elegidos de tal modo que se tenga:

$$\int_v yz\partial m = 0, \int_v xz\partial m = 0, \int_v xy\partial m = 0.$$

Extendiéndose estas integrales a todo el volumen del cuerpo.

Y por lo demás es evidente, que siempre podrá satisfacerse a estas tres condiciones; porque si todo cuerpo tiene una superficie de vectores de inercia, y ésta siempre es un elipsoide, y un elipsoide siempre tiene tres ejes, refiriendo su ecuación a estos tres ejes desaparecerán los términos que contengan los rectángulos de las diferenciales de las variables, es decir, de $X\ Y$; $X\ Z$; $Y\ Z$.

Por último dijimos que en adelante tomaremos por origen de coordenadas el centro de gravedad.

Hasta aquí el resumen rapidísimo de la Conferencia precedente:

***

Y ahora sigamos recordando algunos teoremas sobre el movimiento de un cuerpo sólido cualquiera alrededor de su centro de gravedad; problema que se simplifica notablemente introduciendo en su solución la teoría de los momentos de inercia.

Estudiemos el movimiento de rotación de un sólido alrededor de uno de los ejes principales de inercia que pasa por el centro de gravedad.

Sean (fig. 43) OX, OY, OZ, los tres ejes principales de inercia de un cuerpo cualquiera cuyo centro de gravedad es el origen O.

Supongamos que una fuerza R actúa sobre el cuerpo y que en éste el eje de inercia OZ está fijo.

Esta fuerza R tenderá a hacer girar al cuerpo alrededor de dicho eje OZ, y vamos a determinar la velocidad de giro ω que dicha fuerza R le comunica en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño ∂t.

Para simplificar supondremos que la fuerza R tiene una dirección perpendicular al eje Z y que el plano horizontal

que pasa por R encuentra al eje en el punto a. Desde este punto a bajaremos una perpendicular ρ a la fuerza R, y el momento de la fuerza con relación al eje será evidentemente

$$R\rho.$$

Hemos supuesto la fuerza perpendicular al eje, es decir, situada en un plano horizontal; de no ser así, la descompon-

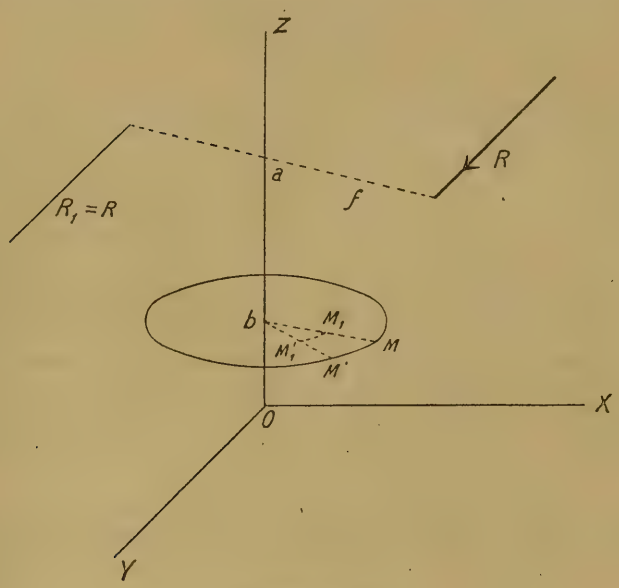


Figura 43.

dríamos en dos fuerzas: una situada en un plano horizontal, otra paralela al eje, y con ésta no habría que contar para el movimiento de rotación, porque no puede producir ninguno.

Por eso supondremos, según lo dicho, que la fuerza dada R está en un plano horizontal a R.

Por el teorema de D'Alambert, el movimiento de giro alrededor del eje Z puede reducirse a un problema de equi-

librio entre la fuerza R y las fuerzas de inercia de los diferentes puntos.

Sea M un punto cualquiera del cuerpo.

En su movimiento de giro alrededor del eje de las Z durante el tiempo infinitamente pequeño ∂t, trazará un arco también infinitamente pequeño MM' que designaremos por ∂s, siendo s un arco contado sobre el paralelo MM' a partir de un punto arbitrario como origen.

La fuerza de inercia de la masa ∂m, situada en M, será

$$-\partial m \cdot \frac{\partial^2 s}{\partial t^2}$$

que puede ponerse bajo la forma

$$-\partial m \frac{\partial \frac{\partial s}{\partial t}}{\partial t}.$$

Pero $\frac{\partial s}{\partial t}$ es la velocidad del punto M sobre el paralelo, y si trazamos en el plano de dicho paralelo los radios bM, bM' y el arco $M_1 M_1'$ con un radio igual a la unidad y hacemos

$$M_1 M'_1 = \partial s_1$$

hallaremos evidentemente, llamando r a la distancia bM,

$$\partial s = r \partial s_1.$$

Luego la fuerza de inercia de la masa ∂m será

$$-\partial m \frac{\partial \frac{r \partial s_1}{\partial t}}{\partial t} = -r \partial m \frac{\partial \frac{\partial s_1}{\partial t}}{\partial t}$$

Pero $\frac{\partial s_1}{\partial t}$, que es la velocidad de un punto que dista la unidad del eje, es la velocidad de rotación del cuerpo en

este instante; representándola por ω, la fuerza de inercia que vamos calculando tendrá esta forma:

$$-r\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t}$$

Para todos los puntos del cuerpo podemos hacer lo mismo, y las fuerzas, entre las cuales necesitamos establecer equilibrio, serán para cada punto del cuerpo

$$-r\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t};$$

y además la fuerza exterior R.

Todas ellas son perpendiculares al eje, luego el equilibrio se expresará multiplicando cada una por su distancia a dicho eje, sumando e igualando a cero la suma.

La suma en este caso es la integral extendida a todos los puntos del cuerpo, es decir, a todo el volumen de éste.

Y tendremos, como ecuación del equilibrio dinámico, o como ecuación del movimiento de rotación del cuerpo alrededor del eje de las Z,

$$-\int_v r^2\,\partial m\frac{\partial\omega}{\partial t}+\rho R=0$$

ó bien

$$\frac{\partial\omega}{\partial t}\int_v r^2\,\partial m=R\rho.$$

Hemos sacado fuera de la integral $\frac{\partial\omega}{\partial t}$ porque ω es la misma en todos los puntos del cuerpo, y, por tanto, no varía de un elemento a otro de la integral para un instante dado.

Esta es la ecuación del movimiento de rotación, y cuan-

do se dé la ley de variación de R no habrá mas que integrarla para conocer el valor de la velocidad de rotación en cada instante.

Si la fuerza R fuese nula, la derivada de ω lo sería, y la velocidad de rotación sería constante.

Pero todos estos son problemas de mecánica, en que no debemos ocuparnos.

La última ecuación es la única que nos interesa, y por eso la hemos recordado.

Dicha ecuación es la que hemos de aplicar al caso de un choque sustituyendo a la fuerza R el *impulso*, como veremos más adelante.

Exactamente a la misma ecuación llegaríamos si en vez de aplicar al cuerpo la fuerza R aplicáramos el par R, R_1. No habría más diferencia sino sustituir al momento de R el momento del par, que en el caso de la figura sería $2R\rho$.

***

Vamos a recordar ahora, aunque sea de paso, una propiedad importante de esta teoría.

Refirámonos a la misma figura, pero suprimiendo con el pensamiento las fuerzas exteriores R y R_1.

Sólo queda el cuerpo girando con un movimiento uniforme, y vamos a ver que en esta hipótesis el giro uniforme del cuerpo no introduce ninguna reacción sobre el eje, de modo que si el centro de gravedad está fijo el eje puede estar libre y el cuerpo continuará girando con la misma velocidad alrededor del mismo eje.

Sea (fig. 44) M un punto del cuerpo de masa ∂m. Este punto describe un paralelo MM_1 con la velocidad angular constante ω.

Si ω es la velocidad angular del sistema, representando

la distancia OM del centro del paralelo, que está sobre el eje, al punto M, la velocidad de este punto será

$$r\omega$$

y su cantidad de movimiento

$$\partial m \cdot r\omega.$$

Esta cantidad de movimiento representa naturalmente

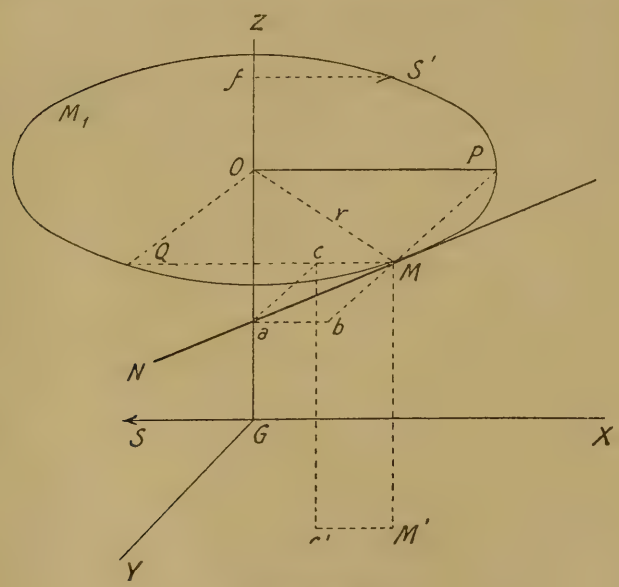


Figura 44.

una fuerza F, la que hubiera sido preciso aplicar a la masa ∂m durante la unidad el tiempo para obtener la velocidad $r\omega$.

Lo mismo podemos decir para cualquier otro punto del cuerpo, y vamos a demostrar que este conjunto de fuerzas no ejerce ninguna presión sobre el eje GZ.

Tomemos sobre la tangente NM desde M una longitud

o vector

$$Ma = \partial m \cdot r\omega$$

que será la fuerza en M; y descompongámosla en el plano del paralelo en dos componentes Mb y Mc paralelas a los ejes de las Y y de las X.

Tendremos, empezando por la fuerza Mb

$$Mb = aM \cos aMb,$$

o bien

$$Mb = \partial m \cdot r\omega \cos POM.$$

El punto P lo hemos obtenido prolongando Mb hasta que encuentre al plano de las X, Z. De modo que OP será la coordenada X del punto M y tendremos

$$\cos POM = \frac{X}{r}$$

y por tanto

$$\text{fuerza } Mb = \partial m \cdot r\omega \cdot \frac{X}{r}$$

o

$$\text{fuerza } Mb = \partial m\, X\omega.$$

Para todos los puntos del cuerpo podemos decir otro tanto, y las fuerzas Mb representarán un conjunto de fuerzas paralelas al eje de las Y; por tanto, serán perpendiculares al plano X, Z, y sus pies en dicho plano, que serán P..... distarán del eje de las Z las magnitudes X.....

La resultante de estas fuerzas será

$$\text{resultante paralela al eje de las } Y = \int_v \partial m\, X\omega = \omega \int_v \partial m \cdot X$$

puesto que ω es constante.

Pero el centro de gravedad G está, por hipótesis, sobre el eje de las Z, luego

$$\int_v \partial m\, X = 0$$

y, por consiguiente, la resultante que buscamos será nula.

Exactamente lo mismo podemos decir de la componente Mc. Prolongándola hasta que encuentre al plano de las Y, Z, en Q también tendremos

$$\text{fuerza } Mc = aM \cos aMc.$$

Pero hemos visto que se tiene

$$aM = \partial m \cdot r\omega$$

y además en la figura resulta

$$\cos aMc = \cos oMP = \frac{Y}{r}$$

luego sustituyendo estos valores en el de Mc hallaremos

$$\text{resultante paralela al eje de las } X =$$

$$= \int_v Mc = \int_v aM \cos aMc = \int_v \partial m \cdot r\omega \frac{Y}{r} = \int_v \partial m \omega Y$$

o bien

$$\omega \int_v \partial m\, Y.$$

Mas la suma de los momentos $\partial m\, Y$ de las masas ∂m, con relación al eje de las z, es como antes igual a cero, porque el centro de gravedad está en dicho eje Z, luego el eje de las z no está sometido a ninguna fuerza puesto que ambas componentes son nulas.

Pero un sistema de fuerzas puede tener una resultante

nula, sin que por ello se anule su efecto, toda vez que puede reducirse a un par.

Si por ejemplo, las fuerzas paralelas al eje de las x como la cM dieran un par, colocándolo, como siempre es posible, con sólo hacerle mover en su plano, en la posición SS', la fuerza S se anularía en el punto fijo G, pero la otra fuerza del par S', actuando en el punto f, tendería a mover el eje Z.

Ahora bien, este caso no puede ocurrir, porque las fuerzas cM tienen un momento nulo con relación al punto G.

Y esto se ve inmediatamente.

Si las fuerzas Mc constituyesen un par, proyectando Mc en $M'c'$, sobre el plano de las $X\ Y$, y aplicando en c' dos fuerzas iguales a Mc y contrarias, tendríamos un par paralelo al plano de las XZ cuyo brazo de palanca cc' sería igual a Z; luego el momento de este par sería

$$Mc \cdot cc' = \partial m \omega\ YZ.$$

Y la suma de todos los pares análogos a éste tendría por valor

$$\omega \int_v \partial m\ YZ.$$

Cantidad que es igual a cero porque los ejes *son ejes principales de inercia.*

Lo mismo podríamos decir respecto a las fuerzas Mb paralelas al eje de las Y.

También obtendríamos, para el momento del par resultante,

$$\omega \int_v \partial m\ XZ = 0.$$

No quedarían, pues, mas que pares, cuyo plano sería pa-

ralelo al plano de las XY, cuyo eje es paralelo al eje de las Z, alrededor del cual se verifica el movimiento.

Podría presentarse todavía otra forma de la misma duda. ¿Estos pares y esta rotación alrededor del eje de las Z no engendrará fuerzas centrífugas que tiendan a separar el eje de las Z de su posición?

También esta duda desaparece inmediatamente, porque consideremos, por ejemplo, que el punto M en su movimiento de rotación alrededor del eje de las Z engendra una fuerza centrífuga en la dirección OM, cuyo valor será evidentemente

$$\partial m r \omega^2,$$

y la componente de esta fuerza, paralela al eje de las X, es decir, a OP, será igual a

$$\partial m r \omega^2 \cdot \cos MOP = \partial m r \omega^2 \frac{OP}{r} = \partial m r \omega^2 \frac{X}{r} = \partial m \omega^2 \cdot X.$$

La suma de todas estas componentes será la integral

$$\omega^2 \int_v^v \partial m X$$

que es nula, como hemos visto, porque el centro de gravedad está en el eje de las Z.

Otro tanto podemos decir de la componente de la fuerza centrífuga en la dirección OQ.

Luego la resultante de todas las fuerzas centrífugas es nula, y como también lo serán sus momentos con relación al plano XY, resulta que, en efecto, el eje Z queda inmóvil.

En resumen, el cuerpo, al girar alrededor del *eje principal de inercia Z, que pasa por el centro de gravedad, no tiende a separar este eje de* su *posición*, aun cuando el eje no tenga más punto fijo que el centro de gravedad.

***

Si sobre el cuerpo actuase un par (fig. 43) R, R_1 cuyo plano fuese paralelo al plano de las X, Y, tampoco el eje tendería a salir de su posición, porque respecto a las fuerzas R y R_1 podríamos hacer consideraciones análogas a las precedentes. En suma y en general, el movimiento de rotación del sistema, siendo el centro de gravedad G un punto fijo, depende de tres ecuaciones, que son: las igualdades de los tres pares de las fuerzas de inercia y de las componentes del par dado.

Como el par dado es paralelo al plano de las $X\,Y$, las tres ecuaciones serán estas:

Par de las fuerzas de inercia paralelo al plano de las

$$X\,Z = 0$$

par de las fuerzas de inercia paralelo al plano de las

$$Y\,Z = 0$$

par de las fuerzas de inercia paralelas al plano de las

$$X\,Y + R \cdot 2\rho = 0$$

Las dos primeras hemos visto que quedan satisfechas por sí en el movimiento de rotación alrededor del eje Z, sin que éste tienda a salir de su posición. La última ecuación queda satisfecha por sí misma, porque es la que nos ha servido para determinar el valor de ω.

Todo lo que precede no es mas que el recuerdo ligerísimo de una teoría elemental en que no insistimos, porque ya deben conocerla mis alumnos.

Y pasemos a otro punto, que es para nosotros de suma importancia.

El cálculo de la fuerza viva de un cuerpo, girando alrededor del centro de gravedad.

***

Cálculo de la fuerza viva de un cuerpo girando alrededor de su centro de gravedad, que suponemos fijo.—Dado un sistema de masas continuas o discontinuas, se sabe que la fuerza viva, en un instante cualquiera, de dicho sistema de masas, es la suma de los productos de cada elemento de masa por el cuadrado de la velocidad en el instante que se considera; es decir,

$$\int_V \partial m\, v^2$$

representando ∂m un elemento de masa v la velocidad en el instante que se considera, y V indica que se ha de extender la integral a todo el volumen, o mejor dicho, a todas las masas.

La integral será una integral contínua si las masas son continuas, o una suma si las masas son discontinuas, o una suma de integrales si el sistema está formado de varios cuerpos.

Para nuestro caso todo está reducido a aplicar la fórmula precedente a la rotación de un cuerpo sólido cualquiera alrededor de su centro de gravedad en un instante dado, aquel en el que deseamos calcular su fuerza viva.

Y ante todo recordemos que si una velocidad V_1 tiene por componentes u_1, v_1, w_1, y éstas son componentes rectangulares, se verificará, siendo m la masa del punto

$$m V_1^2 = m(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2) = m u_1^2 + m v_1^2 + m w_1^2.$$

Es decir, que la fuerza viva de la masa m será la suma de las fuerzas vivas correspondientes a las tres velocidades rectangulares.

Se sabe también, por cinemática, que el movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un centro fijo en un intervalo de tiempo infinitamente pequeño ∂t, puede considerarse pro

ducido por una rotación instantánea alrededor de determinado eje OI (fig. 45), eje que pasa por el punto fijo O.

Y esto se ve inmediatamente.

Porque sea un punto A del sólido en el instante t, y supongamos que en el instante $t + \partial t$ pasa a B, siendo la línea AB infinitamente pequeña.

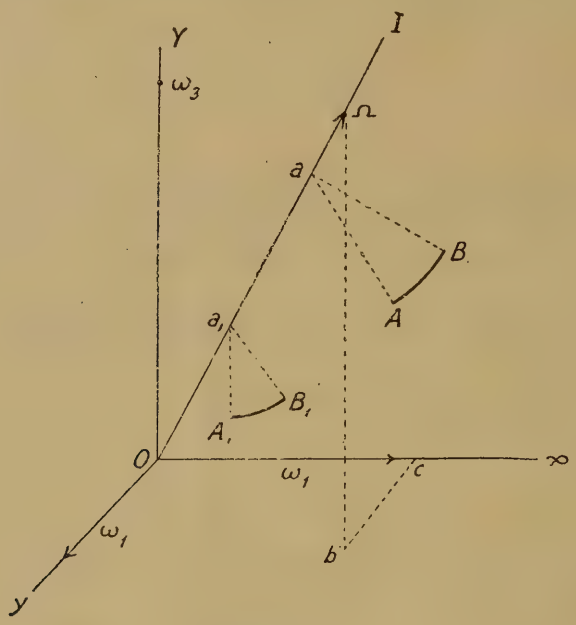


Figura 45.

Las distancias OA y OB serán evidentemente iguales, puesto que el cuerpo es sólido y la recta OA, al venir el punto A a B, conserva su longitud.

Ahora bien, trazando por el punto medio de AB un plano perpendicular a esta línea, el cual pasará forzosamente por O, puesto que OA y OB son iguales, el giro alrededor de cualquier recta situada en este plano transportará el punto A al punto B.

Tomemos ahora otro punto cualquiera A_1 en el instante t, y sea B_1 la posición de este punto en el instante $t + \partial t$.

Repitiendo lo que hemos dicho hace un momento, es decir, trazando por el punto medio de $A_1 B_1$ un plano perpendicular a esta recta, que también pasará por O, el giro alrededor de cualquier recta trazada en este segundo plano transportará también el punto A_1 a B_1.

Pero los dos planos pasan por O, luego se cortarán según una recta OI, y el giro del cuerpo sólido alrededor de esta recta transportará el punto A a B y el punto A_1 a B_1.

Mas en estas condiciones, si la posición del cuerpo estaba determinada por A, A_1, O en el tiempo t, estará determinada por B, B_1, O en el instante $t + \partial t$. Y este movimiento no es otra cosa que un giro alrededor de OI.

Dicha línea se llama, pues, eje instantáneo de rotación.

El ángulo de los dos planos es el ángulo que ha girado el cuerpo alrededor del eje OI, y el límite de la relación entre este ángulo y ∂t será la velocidad del giro.

Queda demostrado lo que acabábamos de indicar: que durante un intervalo infinitamente pequeño ∂t el movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo puede considerarse como una rotación infinitamente pequeña de velocidad finita alrededor de un cierto eje instantáneo OI.

Si sobre este eje tomamos una longitud $O\Omega$ igual a la velocidad de rotación, dicho vector $O\Omega$ definirá por sí el movimiento infinitamente pequeño del cuerpo en el intervalo ∂t.

Pero si descomponemos el vector $O\Omega$ en sus tres componentes $Oc, cb, \Omega b$, o si se quiere, según los ejes, y se representan por $\omega_1\ \omega_2\ \omega_3$; se sabe por las Conferencias del año precedente (Conferencia IX, figuras 7.ª y 8.ª) que cinemáticamente la rotación de un punto cualquiera alrededor del eje O con la velocidad Ω equivale a tres rotaciones instantáneas alrededor de los ejes x, y, z, velocidades de rotación representadas, como se ha dicho, por $\omega_1, \omega_2, \omega_3$, es decir, por los componentes de Ω.

*
* *

Y ahora vengamos a nuestro problema, a la determinación de la fuerza viva de un sólido girando alrededor de un punto fijo.

Sea (fig. 46) un cuerpo sólido cualquiera. Tomemos un sistema de coordenadas rectangulares x, y, z y supongamos, porque éste va a ser nuestro caso, que el origen O es el centro de gravedad.

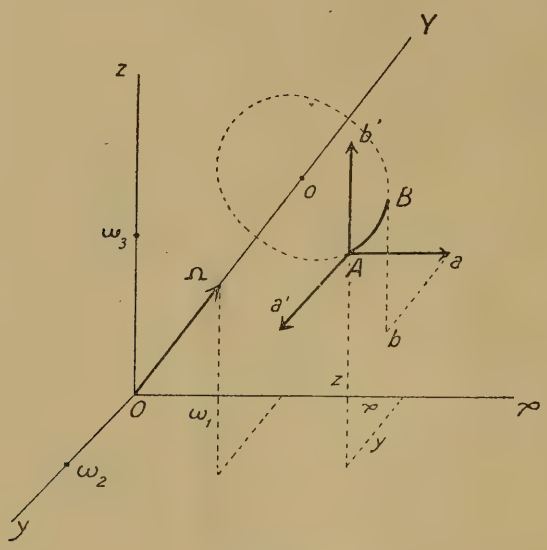


Figura 46.

Consideremos el instante t y el intervalo infinitamente pequeño ∂t.

Sea A un punto del cuerpo cuya masa, infinitamente pequeña, es ∂m.

Acabamos de demostrar, que el movimiento del cuerpo equivale a un giro alrededor de cierto eje instantáneo OY.

De modo que el punto A, o sea la masa ∂m, describirá en ∂t un arco infinitamente pequeño AB, que se confundirá con una línea recta.

La velocidad en el instante t será

$$\frac{AB}{\partial t}.$$

Pero esta es también la velocidad de rotación Ω alrededor del eje instantáneo Y.

Tal rotación equivale a tres rotaciones instantáneas alrededor de los ejes x, y, z, cuyos valores serán ω_1, ω_2, ω_3, siendo estas tres magnitudes las componentes, como se ve en la figura, según los ejes, de Ω.

Pero demostramos en la citada Conferencia novena del curso de 1913 a 1914 que para cada punto A de un cuerpo, la rotación AB o las tres rotaciones parciales ω_1, ω_2, ω_3 equivalían a tres traslaciones Aa, ab, y Bb paralelas a los ejes, o dividiendo todas estas magnitudes por ∂t, que la velocidad

$$\frac{AB}{\partial t}$$

equivalía a tres velocidades paralelamente a los ejes

$$\frac{Aa}{\partial t}, \frac{ab}{\partial t}, \frac{Bb}{\partial t}$$

que podemos llamar, como entonces las llamábamos, u_1, v_1, w_1.

Estas tres velocidades expresadas en función de las rotaciones ω_1, ω_2, ω_3 allí las expresábamos por estas fórmulas

$$u_1 = \eta' (z - z') - \zeta' (y - y')$$
$$v_1 = \zeta' (x - x') - \xi' (z - z')$$
$$w_1 = \xi' (y - y') - \eta' (x - x')$$

Mas observen mis alumnos que las notaciones son distintas.

Las que allí llamábamos ξ', η', ζ' aquí están designadas

por ω_1, ω_2, ω_3 y además $x-x'$, $y-y'$, $z-z'$, aquí son x, y, z, de suerte que las fórmulas anteriores serán éstas:

$$u_1 = \omega_2 z - \omega_3 y$$
$$v_1 = \omega_3 x - \omega_1 z$$
$$w_1 = \omega_1 y - \omega_2 x$$

En resumen, en vez de la velocidad, según AB, podemos sustituir para el punto A tres velocidades trirrectangulares u_1, v_1, w_1, según las lineas Aa, Aa', Ab'.

Y de aquí se deduce que la fuerza viva para la masa ∂m del punto A será

$$\partial m \left(\frac{AB}{\partial t}\right)^2 = \partial m\,(u_1^2 + v_1^2 + w_1^2)$$

y poniendo en vez de u_1, v_1, w_1 sus valores

$$\partial m \left(\frac{AB}{\partial t}\right)^2 = \partial m \Big[(\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + \\ + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2\Big].$$

Aplicando esta misma fórmula a cualquier punto del cuerpo e integrando, obtendremos:

$$\text{fuerza viva del cuerpo} = \int_V \partial m \Big[(\omega_2 z - \omega_3 y)^2 + \\ + (\omega_3 x - \omega_1 z)^2 + (\omega_1 y - \omega_2 x)^2\Big];$$

y desarrollando y ordenando según las magnitudes ω:

$$\text{fuerza viva} = \int_v \partial m \Big[\omega_1^2 (z^2 + y^2) + \omega_2^2 (x^2 + z^2) + \\ + \omega_3^2 (x^2 + y^2) - 2\omega_2 \omega_3 yz - 2\omega_1 \omega_3 xz - 2\omega_1 \omega_2 xy\Big];$$

y por fin dividiendo la integral total en varias integrales

$$\text{fuerza viva} = \omega_1^2 \int_v \partial m\,(z^2 + y^2) + \omega_2^2 \int_v \partial m\,(x^2 + z^2) +$$

$$+ \omega_3^2 \int_v \partial m\,(x^2 + y^2)$$

$$- 2\omega_2\,\omega_3 \int_v \partial m\,yz - 2\omega_1\,\omega_3 \int_v \partial m\,xz - 2\omega_1\,\omega_2 \int_v \partial m\,xy.$$

Pero las tres primeras integrales representan, según hemos visto, los momentos de inercia del cuerpo con relación a los ejes x, y, z que suponemos que son los ejes principales de inercia.

Y en esta hipótesis las tres últimas integrales son iguales a cero, porque son las condiciones para que los ejes de las x, de las y, de las z, sean ejes principales de inercia, con lo cual la expresión anterior se simplifica y resulta

$$\text{fuerza viva} = A\omega_1^2 + B\omega_2^2 + C\omega_3^2,$$

pues hemos designado por A, B, C, los momentos de inercia del cuerpo, con relación a los ejes x, y, z, que son los ejes principales.

Ahora bien, representando por m la masa total del cuerpo y por k_1, k_2, k_3 los radios de giro con relación a estos ejes, se sabe que A, B, C pueden escribirse de este modo

$$A = mk_1^2,\ B = mk_2^2,\ C = mk_3^2;$$

que es como decir, que la magnitud k_1 es tal que si a la distancia k_1 del eje de las x se coloca un punto material en el que se haya reconcentrado toda la masa m del cuerpo, este punto tendrá el mismo momento de inercia del cuerpo dado con relación a x: por eso $m\,k_1^2$ es igual a A.

Y análogamente para k_2 y k_3.

Con lo cual tendremos, por último, que la fuerza viva de un cuerpo en un instante dado, cuando el centro de gravedad está fijo y las rotaciones instantáneas alrededor de los ejer principales de inercia son ω_1, ω_2, ω_3 tiene por valor

$$m\omega_1{}^2k_1{}^2 + m\omega_2{}^2k_2{}^1 + m\omega_3{}^2k_3{}^2,$$

en que m es la masa total del cuerpo.

*
* *

Hemos determinado la fuerza viva en función de las velocidades de rotación y para un instante dado, cuando el cuerpo puede girar libremente alrededor del centro de gravedad como punto fijo.

Ahora vamos a resolver un problema más general.

Cálculo de la fuerza viva de un cuerpo sólido que se mueve libremente y en un instante dado.—Sabemos por Cinemática que el movimiento de un cuerpo sólido se puede representar por el movimiento del centro de gravedad en que se ha reunido toda la masa y sobre el cual actúan todas las fuerzas exteriores, y que se puede suponer además que en un instante cualquiera el centro de gravedad es fijo para la posición a que ha llegado, y que el cuerpo gira alrededor de dicho centro de gravedad como si estuviera realmente fijo. Movimiento según acabamos de ver, que equivale a tres rotaciones instantáneas alrededor de los tres ejes principales de inercia.

Supongamos que el cuerpo C ha llegado a la posición que marca la figura 47.

Su centro de gravedad G describe la trayectoria B_1GB, y para la posición C del cuerpo suponemos también que los ejes principales de inercia de éste son x, y, z.

Admitamos que en el instante t la velocidad del centro

de gravedad G es V, y las componentes de esta velocidad u, v, w.

La fuerza viva del cuerpo será, como siempre, la suma de las fuerzas vivas de sus diferentes puntos.

Tomemos uno de estos puntos A, cuya masa designaremos ∂m, y calculemos la fuerza viva de esta masa:

fuerza viva de la masa ∂m del punto A =

= ∂m multiplicada por el cuadrado de la velocidad del punto A.

Por el punto A trazaremos tres ejes x', y', z', paralelos a x, y, z, y sobre esos tres ejes vamos a contar las componentes de la velocidad del punto A, que son de dos clases.

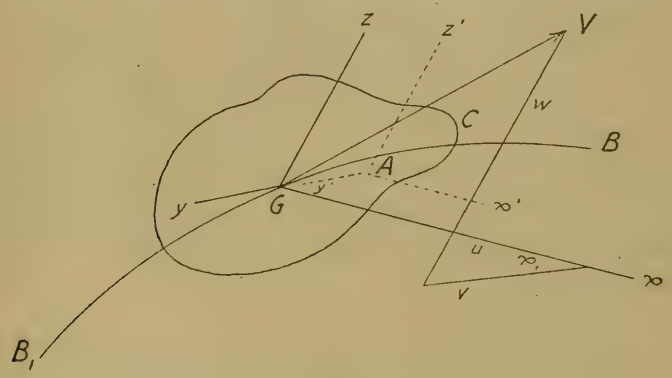


Figura 47.

1.ª El punto A, como todos los puntos del cuerpo, en el instante t tiene la velocidad V, que es la velocidad de traslación. La misma que la del centro de gravedad, es decir, que el punto A tiene tres componentes, según los ejes x', y', z', que son

$$u, v, w.$$

2.ª El punto A gira con rotaciones instantáneas alrededor de los tres ejes x, y, z, y acabamos de ver que estas

rotaciones producen tres componentes, cuyos valores son, según demostrábamos hace un instante,

$$u_1 = \omega_2 z' - \omega_3 y'$$
$$v_1 = \omega_3 x' - \omega_1 z'$$
$$w_1 = \omega_1 y' - \omega_2 x'.$$

Aquí ponemos x' y' z' para designar las tres coordenadas de A paralelamente a los ejes principales de inercia.

Luego en último resultado la velocidad del punto A tendrá tres componentes trirrectangulares

$$u + u_1, v + v_1, w + w_1$$

o bien

$$u + \omega_2 z' - \omega_3 y'$$
$$v + \omega_3 x' - \omega_1 z'$$
$$w + \omega_1 y' - \omega_2 x'$$

Y pues son trirrectangulares, el cuadrado de la resultante será la suma de los cuadrados de las componentes; de suerte que la fuerza viva del punto A, cuya masa es ∂m, será evidentemente

$$= \partial m \Big[(u + \omega_2 z' - \omega_3 y')^2 + (v + \omega_3 x' - \omega_1 z')^2 + \\ + (w + \omega_1 y' - \omega_2 x'). \Big]$$

Como lo que hemos dicho del punto A podemos decir de cualquier punto del cuerpo, bastará integrar la expresión anterior en todo el volumen V de éste, y tendremos: fuerza viva del cuerpo =

$$\int_V \partial m \Big[(u + \omega_2 z' - \omega_3 y')^2 + (v + \omega_3 x' - \omega_1 z')^2 + \\ + (w + \omega_1 y' - \omega_2 x')^2 \Big]$$

Y desarrollando

$$\int_v \partial m \Big[u^2 + 2u(\omega_2 z' - \omega_3 y') + (\omega_2 z' - \omega_3 y')^2 +$$
$$+ v^2 + 2v(\omega_3 x' - \omega_1 z') + (\omega_3 x' - \omega_1 z')^2 +$$
$$+ w^2 + 2w(\omega_1 y' - \omega_2 x') + (\omega_1 y' - \omega_2 x')^2. \Big]$$

La primera columna, que será

$$\int_v \partial m (u^2 + v^2 + w^2),$$

observando que u, v, w, son las componentes del movimiento de traslación en el instante t que estamos considerando que, por tanto, son constantes para todos los puntos del cuer po y que como constantes pueden salir fuera de la integral, tomará la forma

$$u^2 \int_v \partial m + v^2 \int_v \partial m + w^2 \int_v \partial m.$$

Las tres integrales representan la masa del cuerpo, es decir, m, con lo cual esta primera columna tendrá el valor

$$m(u^2 + v^2 + w^2). \qquad (1)$$

La segunda columna, que es

$$2 \int_v \Big[u(\omega_2 z' - \omega_3 y') + v(\omega_3 x' - \omega_1 z') +$$
$$+ w(\omega_1 y' - \omega_2 x') \Big] \partial m$$

es evidentemente igual a cero, porque todos sus miembros son nulos.

Consideremos, por ejemplo, el primero

$$2\int_v u\,\omega_2\,z'\,\partial m.$$

Como u y ω_1 son constantes para todos los puntos del cuerpo, puesto que la componente de la traslación paralela al eje de las x y la rotación alrededor del eje de inercia que coincide con y son siempre los mismos para todo el sólido, podrán salir fuera de la integral, y tendremos

$$2\,u\,\omega_2\int_v z'\,\partial m.$$

Pero la integral representa la suma de los momentos de todos los elementos de la masa con relación al plano de las x, y, y como este plano pasa por el centro de gravedad, que es el origen, dicha integral será nula, y resultará

$$2\,u\,\omega_2\int z'\,\partial m = 0.$$

Otro tanto podemos decir para el segundo término

$$-2\int u\,\omega_3\,y'\,\partial m.$$

Sacando u y ω_3 fuera de la integral, por ser constantes, se convertirá en

$$2\,u\,\omega_3\int_v y'\,\partial m.$$

En que la integral es también nula, porque representa la suma de los momentos de los diferentes puntos del cuerpo con relación al plano de las x, z, y este plano también pasa por el centro de gravedad. Así

$$-2\,u\,\omega_3\int_v y'\,\partial m = 0$$

y podemos repetir esto mismo para todos los demás términos de la segunda columna: siempre tendrán uno de estos factores

$$\int_v x' \partial m, \int_v y' \partial m, \int_v z' \partial m$$

que todos ellos son iguales a cero, pues representan momentos de los diferentes puntos de la masa con relación a los tres planos coordenados que pasan por el origen, que es el centro de gravedad.

En resumen, la segunda columna toda ella se anula.

Pasemos a la tercera columna

$$(\omega_2 z' - \omega_3 y')^2 + (\omega_3 x' - \omega_1 z')^2 + (\omega_1 y' - \omega_2 x')^2$$

que como hemos visto en el movimiento de rotación del cuerpo alrededor de un punto fijo representa la fuerza viva que corresponde a dicho movimiento de rotación, y tiene por valor

$$\omega_1^2 m k_1^2 + \omega_2^2 m k_2^2 + \omega_3 m k_3^2. \qquad (2)$$

Reuniendo, pues, el valor de la primera columna y el valor de la tercera columna podemos establecer esta ecuación sacando m factor común

$$\text{fuerza viva de un cuerpo sólido} = m \Big[u^2 + v^2 + w^2 + \\ + \omega_1^2 k_1^2 + \omega_2^2 k_2^2 + \omega_3^2 k_3^2. \Big]$$

Hemos resuelto, pues, el problema. Es decir, hemos hallado la fuerza viva en un instante cualquiera en que el centro de gravedad de un cuerpo sólido tiene una velocidad de

traslación, cuyas componentes son u, v, w, y tres rotaciones instantáneas alrededor de los ejes principales de inercia, que pasan por dicho centro de gravedad, rotaciones representadas por ω_1, ω_2, ω_3.

Esta fuerza viva viene precisamente en función de estas seis velocidades, y es una función lineal de los cuadrados de las mismas, forma clásica en estos problemas de Cinemática.

Todavía en la Conferencia inmediata hemos de agregar algo a esta digresión, que resulta demasiado larga, que se refiere a cuestiones que deben conocer ya mis alumnos, pero que es indispensable tener muy presentes al abordar el problema principal, como hallaremos ocasión de comprobar en breve.

XXXVII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte.)

POR JOSÉ ECHEGARAY.

Conferencia décimasexta.

SEÑORES:

Hemos venido complicando, y valga la palabra, el problema general de los gases, siempre compuestos, en esta teoría cinemática, de átomos, moléculas o partecillas muy pequeñas, que se agitan en todos sentidos dentro del espacio en que están encerradas, llegando por fin a un estado permanente de agitación, pero siempre el mismo. El mismo en el tiempo y, por decirlo de este modo, el mismo en el espacio.

Suponemos, pues, un *orden estadístico* para el movimiento de esta multitud de átomos.

Y tales ideas ya las hemos precisado en los ejemplos anteriores, y las precisaremos más y más a medida que avancemos en nuestro estudio.

Mas hemos empleado una frase hace un momento, que conviene explicar todavía, aunque mis alumnos habrán comprendido seguramente el sentido en que la empleamos.

Hemos dicho que vamos *complicando* cada vez más el problema cinemático de los gases, y esto quiere decir que vamos complicando o generalizando, si se quiere, cada uno de los átomos, moléculas o partecillas del gas.

Por de contado en cada sistema suponemos que todas son absolutamente iguales; pero ¿cuáles son las condicio-

nes de cada una de ellas, de esta unidad que se repite miles y miles de veces en el espacio en que el gas está encerrado?

Aquí procedemos de lo más sencillo a lo más complicado, y esta serie de hipótesis constituye cada uno de los ejemplos, que hemos estudiado hasta aquí y constituirá los ejemplos, que hemos de seguir estudiando.

Primero suponíamos, que cada partecilla del gas era una esfera sumamente pequeña, homogénea y perfectamente elástica.

Su número era enorme y la suma de sus volúmenes siempre era muy pequeña en comparación con el volumen del espacio en que se agitaban.

Este era el caso más sencillo y este era el primer ejemplo.

Aquí no había que tener en cuenta mas que el movimiento del centro de cada esferilla, la rotación de las esferillas importaba poco, porque entre esferilla y esferilla no existía ni roce ni adherencia: en el choque sólo se desarrollaban fuerzas elásticas normales a cada esferilla.

Y aquí el orden estadístico puede definirse de una manera rigorosa.

Decir que el conjunto de esferillas ha llegado al estado permanente de agitación, a un estado regular, podemos decir también, significa que si en un instante t existen

n esferillas con la velocidad v
n' esferillas con la velocidad v'
n'' esferillas con la velocidad v''

y asi sucesivamente, en otro instante cualquiera t' sucederá exactamente lo mismo; y que, por tanto, los choques no alterarán de ninguna manera esta distribución de velocidades.

Significa además que en cualquier espacio del gas, cuyo volumen sea muy grande en comparación con la suma de los volúmenes de las esferillas en él comprendidos, sucederá

exactamente lo mismo, que en otro volumen igual al primero del espacio en cuestión.

En suma, el orden estadístico significa, por decirlo de este modo, permanencia en el tiempo y en el espacio de la distribución de velocidades.

Esta ley de distribución vimos que se expresaba por una exponencial, que llamábamos *densidad de velocidades*.

En el exponente entraba la fuerza viva de una de las esferillas multiplicada por cierto coeficiente h.

La exponencial estaba multiplicada además por otro coeficiente A.

Y ya explicábamos como se comprende que podrían determinarse ambos coeficientes.

De este primer ejemplo, sencillísimo o al menos el más sencillo de todos, pasamos a otro más complicado, porque el gas ya no era homogéneo, sino que se componía de dos o más sistemas, homogéneos cada sistema en sí, pero distintos unos de otros.

Mas en todos ellos el átomo, la molécula o la partecilla que constituyan el gas queda siempre de forma esférica, y cada esferilla continuaba siendo homogénea, elástica y de superficie igual y pulimentada, excluyendo todo rozamiento y toda adherencía.

Las demás hipótesis eran las mismas que para el primer ejemplo.

Y siempre buscábamos la solución de este problema del movimiento permanente: es decir, de la constancia de la distribución de velocidades para todos los instantes del tiempo y para todos los puntos del espacio.

Al resolver este nuevo problema era de notar que la distribución permanente de velocidades, la que no se altera por los choques daba para el coeficiente de densidad relativo a estas velocidades una exponencial como en el caso anterior y en el exponente de la exponencial siempre entraba una constante negativa como en el primer caso.

La exponencial también estaba multiplicada por un coeficiente constante A.

Esta exponencial nos indicaba en ambos ejemplos el número de esferillas que constantemente caminaban con la misma velocidad.

Y sólo en esta velocidad teníamos que pensar. La rotación de cada esferilla no nos interesaba.

En ambos problemas el caso era el mismo, que si sólo se tratase de puntos matemáticos elásticos y valga la expresión.

Ya en el tercer problema complicamos más sus condiciones: era un problema de preparación, digámoslo así, para otros más y más complejos.

Los elementos del gas hipotético de este ejemplo eran discos elásficos que se movían en un plano.

Tales discos tenían forma circular; pero no eran homogéneos, y al moverse no sólo avanzaba en linea recta su centro de gravedad, sino que los discos tenían movimiento de rotación alrededor cada uno de una recta perpendicular al plano y que pasaba por el centro de gravedad del disco.

Las demás condiciones seguían siendo análogas a las de los ejemplos precedentes.

Pero fué necesario tener en cuenta no sólo el movimiento de traslación del centro de gravedad del disco, sino también su movimiento de rotación.

El estado de equilibrio estadístico, como le hemos llamado, abarcaba ya la traslación y la rotación de cada elemento, de suerte que para esta permanencia del sistema era preciso que á pesar de los choques, en cada momento el número de discos cuyas velocidades de traslación estaban comprendidas entre u y $u + \partial v$, y $v + \partial v$ y cuya velocidad de rotación estuviera a su vez comprendida entre ω y $\omega + \partial\omega$ fuera siempre el mismo.

De la orientación del disco nada dijimos porque los discos eran circulares; y nada especificamos respecto á la po-

sición dc su centro de gravedad porque lo que nos interesaba era la velocidad de rotación.

Estudiando el problema llegamos a resultados análogos a los precedentes: la forma de la densidad de velocidades, y continuábamos empleando este término por analogías mecánicas, seguía siendo una exponencial; y el exponente seguía siendo asimismo el producto de una constante negativa por la fuerza viva de cada grupo de discos en análogas circunstancias, es decir, en los límites (l).

También la exponencial estaba multiplicada por una constante A.

*
* *

Y al llegar a este cuarto ejemplo, que ahora vamos á estudiar, aún introducimos condiciones de mayor complicación.

El gas se mueve en un espacio cerrado de tres dimensiones. Los átomos, moléculas o partecillas del gas, en cada sistema si hay varios, suponemos que son todas iguales.

Admitimos que dichos elementos sean átomos o moléculas, son cuerpos sólidos de elasticidad perfecta y de superficies lisas y continuas, que excluyen adherencias y rozamientos; pero su *forma es cualquiera.*

Ya no es una esfera, ni un disco, sino un cuerpecillo de figura arbitraria.

Las demás condiciones son en un todo semejantes a las de los otros problemas.

Pero el hecho de ser los elementos del gas de figura arbitraria complica el problema cuando se pretenden buscar las condiciones de equilibrio estadístico, porque en cierto modo duplican el problema, y los dos en que se divide el problema principal son difíciles.

En breve desarrollaremos esta idea.

Por el pronto observaremos, que el hecho de ser las moléculas del gas cuerpos sólidos homogéneos o no y de cualquier figura, y la necesidad de seguir a este cuerpecillo en su movimiento ya cuando choca, ya entre choque y choque, exige tener muy presentes todas las condiciones del movimiento de un sólido en el caso más general; moviéndose por de contado libremente, sin enlaces con otros sistemas y sin que actúen fuerzas exteriores, como no sea la fuerza del choque.

Hemos recordado con este motivo, que el movimiento de un cuerpo sólido libre se estudia tomando su centro de gravedad, determinando el movimiento de éste, y además en cada instante, suponiendo que dicho centro de gravedad está fijo y que el cuerpo puede girar a su alrededor.

Es algo de lo que sucedía en el ejemplo de los discos, pero con mayor complicación, y todo esto justifica las anteriores digresiones y aun nuevas digresiones a que nos hemos obligado, para que cuando lleguemos al problema fundamental no oscurezca su solución ningún problema de mecánica racional cuyo recuerdo no estuviera bien presente o se hubiera borrado en la memoria del que oiga o estudie estas conferencias.

*
* *

En el movimiento de un cuerpo sólido, acabamos de decir, que la manera más sencilla de representarlo ante la imaginación es:

1.° Considerar el centro de gravedad G, suponer reconcentrada en él la masa del cuerpo y trasladadas también paralelamente a sí mismas todas las fuerzas, que actúen sobre el sistema.

En nuestro caso suponemos que las únicas fuerzas que

actúan son las del choque, mas por el momento supondredremos que son fuerzas cualesquiera.

Este primer problema queda reducido a estudiar el movimiento de un punto sometido a varias fuerzas, y se resuelve por las tres ecuaciones generales de la dinámica

$$M \frac{\partial^2 x}{\partial t^2} = X, \; M \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = Y, \; M \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = Z.$$

El centro de gravedad estará determinado en cada instante por sus tres coordenadas x, y, z, cuando habiendo integrado las ecuaciones, hayamos obtenido dichas coordenadas en función del tiempo, es decir, cuando tengamos

$$x = \alpha\,(t), \; y = \beta\,(t), \; z = \gamma\,(t),$$

que serán las integrales de las ecuaciones precedentes; y en este caso para cualquier valor de t conoceremos x, y, z, y la posición del centro de gravedad del cuerpo.

Por eso se dice en el lenguaje moderno que el punto tiene *tres grados de libertad*, que es como si dijéramos que el punto está determinado por tres coordenadas, o también que si ninguna causa interviniera para moverlo de nuevo en otro sentido y estuviera completamente libre, podría cambiar de posición paralelamente al eje de las x o al eje de las y, o al de las z.

Mas no se trata sólo del centro de gravedad sino de todo un cuerpo sólido, el cual, para una posición determinada de dicho centro de gravedad, puede tomar diferentes orientaciones alrededor del mismo: y para completar, por tanto, el problema y acabar de fijar la posición del cuerpo debemos considerar:

2.° De qué manera se puede fijar en el espacio la posición de un cuerpo sólido para el cual uno de sus puntos, que siempre supondremos que es el centro de gravedad, está fijo.

Las siguientes consideraciones geométricas resuelven la cuestión.

Admitamos que el centro de gravedad del cuerpo describiendo una línea cualquiera AG (fig. 48) llega a la posición G.

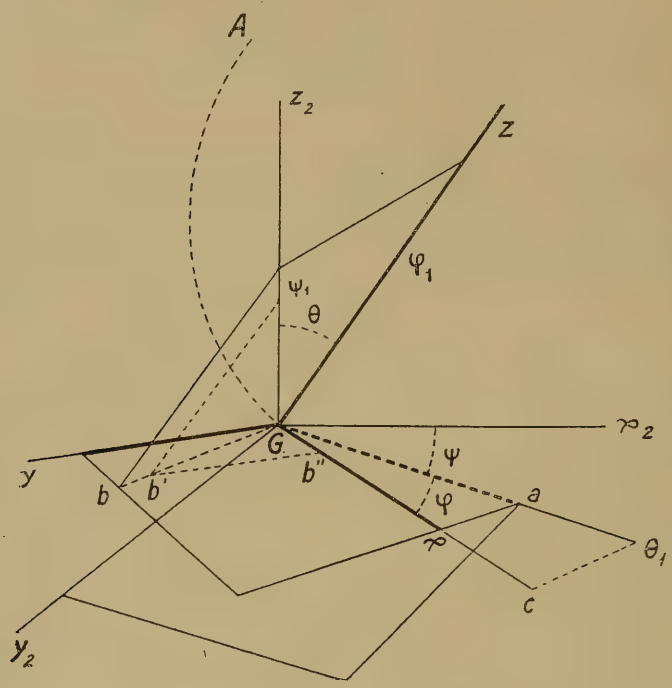


Figura 48

Suponemos para las consideraciones que vamos a hacer, que este punto G está fijo y vamos a definir una posición del cuerpo.

Sean Ox_1, Oy_1, Oz_1, los ejes fijos del sistema, que no están representados en la figura. A ellos están referidas a lo largo de la curva AG las coordenadas x_1, y_1, z_1 del centro de gravedad.

Por este punto G tracemos tres ejes Gx_2, Gy_2, Gz_2, paralelos a los x_1, y_1, z_1, y en este momento que consideramos los supondremos también fijos.

Al cuerpo van unidos otros tres ejes Gx, Gy, Gz que ienen la dirección de los tres ejes principales de inercia de dicho cuerpo.

Como están invariablemente unidos a él, definir o fijar la posición de estos tres ejes es definir y fijar la posición del cuerpo.

De suerte que lo que nos interesa, para resolver nuestro problema, es fijar en cada momento la posición de estos tres ejes x, y, z, que serán tres ejes móviles (aunque invariablemente unidos al sólido), porque girando el cuerpo a'rededor de G con él girarán dichos tres ejes; mas en el instante que consideramos claro es que los consideramos inmóviles, como si el movimiento, y valga la palabra, se hubiera petrificado.

En suma tenemos este problema geométrico.

Definir en un instante dado t, el sistema trirrectangular x, y, z con relación al sistema trirrectangular x_2, y_2, z_2.

En otro instante cualquiera $t + \partial t$ el sistema x_2, y_2 z_2 tendría su origen G en otro punto del espacio, pero se mantendría paralelo al x_1, y_1, z_1; en cambio el sistema x, y, z habría cambiado de posición respecto a x_2, y_2, z_2.

Para determinar en un instante cualquiera t la posición del sistema x, y, z, respecto al x_2, y_2, z_2, prolongaremos el plano de las x, y, hasta que corte al plano de las x_2, y_2 y supongamos que se cortan según la línea Ga. A fin de dar relieve a la figura hemos dado un contorno y, x, a, al plano de las x, y, y hemos dado otro contorno y_2, a, al plano de las y_2, x_2 y decimos que ambos planos se cortan según la línea Ga.

Es claro que la posición del plano x, y quedará definida si se da su traza Ga en el plano de las x_2 y_2 y además el ángulo que forman los dos planos $x\,y$, $x_2\,y_2$.

La posición de la línea Ga se fijará por el ángulo ψ que Ga forma con Gx_2.

Determinada la traza de un plano xy en otro x_2 y_2, para

conocer la posición del primer plano $x\,y$, basta conocer el ángulo que forma con el plano $x_2\,y_2$.

A este ángulo le llamaremos θ y será evidentemente el ángulo que forman las rectas z y z_2, porque z es perpendicular al plano $x\,y$, y z_2 es perpendicular al plano $x_2\,y_2$.

De modo que las variables ψ y θ fijan *la posición* del plano de las $x\,y$, o sea de los dos ejes principales de inercia del cuerpo; pero todavía no hemos fijado en este plano la posición de dichos ejes x, y.

Para ello fijando en dicho plano la posición del eje de las x por medio del ángulo que forma con la línea Ga, al cual llamaremos φ, quedará determinada la posición de los tres ejes x, y, z, y, por tanto, la posición del cuerpo, pues a él van invariablemente unidos durante todo el movimiento.

Y en efecto, la posición del eje x ya la conocemos por φ.

La del eje y será la de una perpendicular Gy a Gx en el plano ax, porque los ejes son rectangulares.

Y la del eje z también queda determinada porque es una perpendicular en G al plano de las x y cuya posición ya es conocida.

En suma, la posición completa del cuerpo en el instante t está definida por las nuevas coordenadas variables ψ, φ y θ.

Estas son las que variarán de una posición a otra. Cuando el punto G ocupe otra posición en la línea $A\,G$, las variables ψ, φ y θ variarán también, y digamos, anticipando las ideas, que como x_1, y_1, z_1 eran funciones del tiempo y servían para determinar la posición de G, así ψ, φ y θ, serán también funciones de t y servirán para orientar la posición del cuerpo en cada instante.

Cuando hayamos resuelto el problema del movimiento del sólido tendremos estas seis ecuaciones:

$$x_1 = \alpha(t), \quad y_1 = \beta(t), \quad z_1 = \gamma(t),$$
$$\psi = \alpha_1(t), \quad \theta = \beta_1(t), \quad \varphi = \gamma_1(t).$$

Las tres primeras para un instante cualquiera nos determinarán la posición del centro de gravedad del cuerpo.

Las tres últimas para ese mismo instante nos darán, por las tres coordenadas ψ, θ, φ, la orientación del cuerpo alrededor del centro de gravedad G, y el problema quedará esuelto de esta manera.

Las tres ecuaciones cuya integración ha de darnos la posición del centro de gravedad, es decir, sus coordenadas x_1, y_1, z_1 en función del tiempo ya dijimos cuáles eran: *Las del movimiento de un punto libre.* En este punto habiamos condensado toda la masa del cuerpo, y a este punto transportamos en cada instante paralelamente a sí mismas todas las fuerzas exteriores.

Las otras tres ecuaciones diferenciales, cuya integración ha de darnos también en función de t los valores de las coordenadas φ, θ, ψ que determinan la orientación de dicho cuerpo, en breve explicaremos rápidamente cuáles son y cómo se obtienen sin entrar en muchos pormenores, porque se trata de un problema de mecánica racional, que en rigor debíamos suponer conocido.

Por el momento agregaremos una observación más a las anteriores.

Así como antes decíamos: el centro de gravedad G es un punto y si fuera un punto libre tendría tres grados de libertad, ahora agregamos: la posición del cuerpo en cuestión depende de otras tres coordenadas φ, θ, ψ, de modo que el cuerpo, si las fuerzas no le obligasen a tomar cierta posición, tendría otros tres grados de libertad, porque podríamos tomar arbitrariamente los valores de estas tres últimas coordenadas, luego, en resumen, un cuerpo sólido que se mueve en el espacio es un sistema que tiene *seis grados* de libertad, tres que corresponden a x_1, y_1, z_1, otros tres que corresponden a ψ, θ, φ.

Y empleando aún términos más exactos, diremos: las fuerzas exteriores, al actuar sobre un cuerpo sólido, actúan so-

bre un sistema *cuyos enlaces suponen seis grados de libertad.*

Todo esto queda expresado en lenguaje moderno; en lenguaje clásico se hubiera dicho: se trata de un sistema cuya posición en cada instante depende de seis coordenadas x_1, y_1, z_1, ψ, θ, φ.

*
* *

Hasta aquí al estudiar el movimiento de un cuerpo sólido alrededor de un punto fijo, por ejemplo, alrededor de su centro de gravedad, habíamos demostrado, que tal movimiento en cada instante puede suponerse engendrado por su rotación instantánea alrededor de un eje que pase por el origen, y que esto equivalía al movimiento de rotación instantáneo alrededor de tres ejes rectangulares cuyo origen fuera el punto fijo. Y representábamos por ω_1, ω_2, ω_3 las rotaciones instantáneas alrededor de esos tres ejes, y admitíamos además para simplificar la solución, que dichos ejes eran los ejes principales de inercia del cuerpo y que a él estaban, por tanto, invariablemente unidos.

Eran los ejes móviles con el cuerpo, y en la figura 48 los representábamos por x, y, z, así como representábamos por x_2, y_2, z_2 otros tres ejes rectangulares fijos pasando por el origen G.

Decimos fijos porque vamos a suponer que el origen lo es.

En el caso del movimiento libre de un cuerpo sólido no serán fijos de posición, porque su origen es el centro de gravedad G, pero serán constantemente paralelos a ejes fijos del espacio x_1, y_1, z_1.

Estas tres rotaciones ω_1, ω_2, ω_3, no las hemos obtenido ni pueden obtenerse hasta que el problema no esté resuelto, pero las hemos *definido* y hemos visto que la fuerza viva del sistema de ellas depende.

Ahora bien, dichas tres rotaciones, componentes de la rotación en cada instante del cuerpo sólido, están íntimamente enlazadas con las variables de orientación ψ, θ, φ; hasta tal punto, que al hablar de los grados de libertad no sería absurdo que a ellas nos refiriésemos.

Las ecuaciones que enlazan ω_1, ω_2, ω_3, con ψ, θ, φ, se obtienen inmediatamente.

Porque, en efecto, fíjense mis alumnos en las siguientes consideraciones.

En un instante dado t, la posición de los ejes x, y, z, que son los ejes de inercia del cuerpo, determinan la posición de éste, y hemos dicho que las posiciones de x, y, z dependen de las variables ψ, θ, φ.

De un instante a otro podrá variar ψ, pero esto equivale, según se ve en la figura, al giro del cuerpo alrededor del eje z_2. Así, si en el intervalo infinitamente pequeño ∂t el ángulo ψ ha variado una cantidad $\partial\psi$, es como si hubiera girado el cuerpo $\partial\psi$ alrededor de z_2, con una velocidad angular

$$\frac{\partial\psi}{\partial t}$$

Representándola para abreviar por ψ' este cambio de posición del cuerpo en el intervalo ∂t equivale a una *rotación instantánea* alrededor del eje z_2.

Para recordar esto hemos puesto en la figura, sobre el eje z_2 la letra ψ_1 a la distancia de G medida por $G\psi_1 = \psi'$; para recordar repetimos que z_2 es eje instantáneo en las variaciones de ψ.

Consignemos esto mismo en los siguientes términos:

$$z_2 \text{ es eje instantáneo en la rotación } \frac{\partial\psi}{\partial t} = \psi' = G\psi_1$$

De idéntica manera podemos convertir las variaciones de θ en rotaciones instantáneas respecto a esta variable. Si en el tiempo ∂t ha variado θ un arco infinitamente pequeño $\partial\theta$, será lo mismo que si hubiera girado con una velocidad angular $\frac{\partial\theta}{\partial t}$ alrededor de un eje perpendicular a las rectas z, z_2. Pero esta recta es precisamente la Ga, porque es la intersección de los planos xy, $x_2\,y_2$, que son perpendiculares a los ejes z y z_2.

Decimos ahora, respecto a θ como antes decíamos respecto a ψ, que $\frac{\partial\theta}{\partial t}$, $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ son velocidades angulares porque los ángnlos θ y ψ se sabe que se refieren a un radio igual a la unidad.

Y todavía podemos repetir este mismo razonamiento para la tercer variable φ que mide el ángulo aGx.

La variación $\partial\varphi$ puede considerarse como una rotación en dicho plano y Gx alrededor del punto G, o si se quiere alrededor de la recta Gz perpendicular a este plano.

La velocidad de rotación será $\frac{\partial\varphi}{\partial t}$.

En suma, el cambio de posición en el tiempo ∂t del sistema de ejes x, y, z, puede considerarse producido por tres rotaciones instantáneas.

1.° Una rotación $\frac{\partial\psi}{\partial t}$ que designaremos por ψ' alrededor del eje de las z_2; y por eso, como antes dijimos, se puso en este eje la letra ψ_1, de suerte que $G\psi_1 = \psi'$.

2.° Otra rotación alrededor del eje Ga, cuyo valor será $\frac{\partial\theta}{\partial t} = \theta'$, y para recordarlo ponemos sobre este eje la letra θ_1 siendo $G\theta_1 = \theta'$.

3.° Una tercera rotación $\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \varphi'$ alrededor del eje de

las z, en el cual escribimos también la letra φ_1 para tener presente esta circunstancia.

De modo que son tres rotaciones instantáneas:

$$\psi' \text{ alrededor de } z_2 \text{ o } G\psi_1 = \psi'$$
$$\theta' \text{ alrededor de } Ga \text{ o } G\theta_1 = \theta'$$
$$\varphi' \text{ alrededor de } z \text{ o } G\varphi_1 = \varphi'.$$

Porque, en efecto, tomando sobre estas tres rectas $G\varphi_1$, $G\theta_1$, $G\psi_1$ tres magnitudes iguales a ψ', θ' y φ', estos tres vectores representarán las tres rotaciones a que nos referimos.

Como el movimiento de los tres ejes x, y, z unidos al cuerpo, y que representan los tres ejes principales de inercia del mismo, es único, así estará representado por las tres rotaciones ψ', θ', φ' como por las tres rotaciones que antes estudiamos ω_1, ω_2, ω_3; y vemos, desde luego, la manera de determinar las fórmulas de enlace de unas y otras rotaciones.

Primero. La rotación ω_1, que se verifica alrededor del eje Gx, será igual al vector que resulte de proyectar sobre esta recta los tres vectores ψ', θ', φ'.

Para proyectar el vector ψ' hagamos pasar un plano por z y z_2, que cortará al plano de las x y según la recta Gb.

Supongamos, según se ha dicho, que $G\psi_1$ es el vector ψ': para proyectarlo sobre Gx podemos proyectarlo sobre Gb, trazando $\psi_1 b'$ paralela a Gz, y luego proyectar Gb' sobre Gx por la perpendicular $b' b''$ a esta recta.

Es una construcción elemental; proyectar un punto sobre una recta situada en un plano es lo mismo que proyectar este punto sobre el plano y esta proyección sobre la recta.

Pero tendremos evidentemente:

$$Gb' = G\psi_1 \text{ sen } G\psi_1 b' \text{ o bien } Gb' = \psi' \text{ sen } \theta$$

puesto que $\psi_1 b'$ y Gz son paralelas por ser perpendiculares al plano xy.

También tendremos:

$Gb'' = Gb' \cos b'' Gb'$, o bien $Gb'' = \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi$.

En efecto, siendo Ga perpendicular al plano que contiene z, z_2 y Gb' será perpendicular a esta última línea Gb'.

Y por fin, puesto que aGb' es un ángulo recto, el coseno de bGb'' es el seno de φ.

Tenemos, pues, proyectada sobre el eje θx la rotación ψ'.

Proyectemos ahora la rotación θ'.

El vector θ' tiene la dirección de la recta Ga, luego para proyectarlo sobre Gx no hay mas que multiplicarlo por el coseno del ángulo que forman estas dos líneas, que es φ. De modo que tendremos: Gc proyección de θ', que suponemos igual al vector $G\theta_1 = \theta' \cos \varphi$.

Proyectemos, por último, sobre x el vector φ'. Pero éste tiene la dirección de Gz, que es perpendicular a x, luego su proyección será nula.

Y sumando las dos proyecciones anteriores, es decir, la Gb'' y la Gc, tendremos la ecuación

$$\omega_1 = \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \theta' \cos \varphi.$$

Segundo. De una manera análoga y con igual facilidad podemos obtener ω_2 en función de las rotaciones ψ', θ', φ'.

En efecto, todo está reducido a proyectar estas tres sobre Gy.

Respecto a ψ': Hemos proyectado $\psi' = G\psi_1$ sobre b' en el plano de las xy, luego no hay más que proyectar Gb' sobre Gy. Hallamos que Gb' era igual a $\psi \operatorname{sen} \theta$, de suerte que hay que multiplicar esta expresión por $\cos b'Gy$, y este ángulo es evidentemente igual al ángulo φ en razón a que tienen sus lados perpendiculares: y es perpendicular a x y Gb' es perpendicular a Ga, según demostramos antes.

En resumen, la proyección de ψ' sobre y será: $\psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi$.

Pasemos a la proyección de θ' que se halla en el plano xy, y que está representada por $G\theta_1$.

Esta proyección tendrá por valor numérico θ' sen φ; pero se ve en la figura que corresponde a la parte negativa del eje de las y, luego será

$$-\theta' \operatorname{sen} \varphi$$

Por último φ' que está sobre el eje de las z, es perpendicular a y, y, por tanto, dará una proyección nula; y reuniendo estas proyecciones tendremos:

$$\omega_2 = \psi' \operatorname{sen} \theta \cos - \theta' \operatorname{sen} \varphi.$$

Tercero. Por último, para obtener ω_3 proyectemos ψ', θ', φ' sobre el eje Gz.

La proyección de $G\psi_1$ se obtiene bajando una perpendicular de ψ_1 al eje z, luego dicha proyección será

$$\psi' \cos \theta.$$

La proyección de θ' será nula porque $G\theta_1$, o sea Ga, está en el plano de las xy, que es perpendicular a z, luego el ángulo zGa será recto, y la proyección de $G\theta_1$ sobre Gz será nula.

Por último, la proyección de φ' sobre z será ella misma puesto que el vector φ' y el eje z coinciden en dirección.

De donde resulta que tendremos

$$\omega_3 = \psi' \cos \theta + \varphi'.$$

Reuniendo los tres valores de ω_1, ω_2, ω_3, estableceremos las tres fórmulas siguientes:

$$\omega_1 = \psi' \operatorname{sen} \theta \operatorname{sen} \varphi + \theta' \cos \varphi$$
$$\omega_2 = \psi' \operatorname{sen} \theta \cos \varphi - \theta' \operatorname{sen} \varphi$$
$$\omega_3 = \psi' \cos \theta + \varphi'$$

Estas tres fórmulas nos darán las tres componentes de la velocidad de rotación, ω_1, ω_2, ω_3 alrededor de los tres ejes principales de inercia, que son rectas fijas en el cuerpo para cualquier instante en que se conozcan las tres coordenadas φ, θ, ψ, por las cuales se fija la orientación de dicho cuerpo en ese instante.

Saber para un instante cualquiera t, la posición del centro de gravedad y las componentes u, v, w, de su velocidad; y conocer para ese instante la posición del cuerpo por la de sus ejes principales de inercia, y el valor de las rotaciones ω_1, ω_2, ω_3 alrededor de dichos ejes es tener resuelto el problema en absoluto. Porque es conocer la posición y la velocidad de cualquier punto del cuerpo en cualquier instante.

Esta solución y este método son debidos a Euler, y se conocen con el nombre del admirable matemático.

Pero queda en pie un último problema: el problema, por decirlo así, decisivo, a saber: determinar tres ecuaciones que nos den los valores de ψ, θ, φ en función del tiempo.

Son en rigor tres de las seis ecuaciones fundamentales del problema.

Algo diremos sobre esta última parte en la conferencia próxima, remitiendo, para el estudio completo del movimiento de un cuerpo sólido a cualquier tratado de Mecánica, y muy principalmente al de M. Appell, en que está expuesto magistralmente y con importantes citas bibliográficas.

XXXVIII.—Los poliporáceos de la flora española.

(ESTUDIO CRÍTICO Y DESCRIPTIVO DE LOS HONGOS DE ESTA FAMILIA)

(Continuación.)

POR BLAS LÁZARO E IBIZA.

POLYSTICTOIDES LEUCOMELAS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos solitarios o reunidos en corto número, gruesecitos, de contorno redondeado y dividido a veces en varios lóbulos, hasta de cinco a seis centímetros de diámetro los mayores, por uno y medio de grueso aproximadamente; superficie superior muy desigual y granugienta, áspera, de coloración general casi blanca o muy levemente anteada, manchada de pardo negruzco, intenso en las superficies algo antiguas. Carne constituyendo próximamente la mitad del grueso total, de un blanco casi puro, de consistencia suberosa. Tubos muy delgados, de ocho a diez milímetros de longitud, de color anteado muy claro. Poros finísimos, con borde entero, de color anteado, bastante más intenso que el de los tubos, y pardeando en los puntos en que han sido rozados.

Habitación.—Sobre los castaños a fines del verano.

Area.—Sólo he recogido esta especie en Asturias, en Rivadesella y Covadonga.

POLYSTICTOIDES PALLESCENS Fries.

Sinonimia Fr.

Polyporus pallescens Fr.

Iconografía.

Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 24.

Sow. Engl. Fung., lám. 230.

Descripción.—Aparatos esporíferos, con frecuencia reunidos en grupos numerosos, carnosos y blandos en fresco, más tarde suberosos, con la superficie superior lisa y lampiña, amarillenta, sin zonas y con el borde agudo y del mismo color. Carne blanca, zonada, fibrosa. Tubos cortos y delgados. Poros blancos, algo desiguales, oblongos o redondeados, al fin amarillentos y con los bordes enteros. Espora elipsoidea de cinco a siete μ.

Habitación.—Sobre las ramas y troncos cortados en las estaciones estival y otoñal.

Area.—Hallado en Navarra y en las provincias Vascongadas.

POLYSTICTOIDES MARITIMUS *(Quelet.)* Láz.

Iconografía.

Assoc. franc. av. sc., 1886, lám. 9, fig. 8.

Descripción. —Aparatos esporíferos semirredondeados, de cuatro a seis centímetros de diámetro, relativamente gruesos, pero con la margen adelgazada; la superficie superior cubierta de tomento fino, blanquecino o de un amarillo muy pálido, pardeado en los bordes, donde el tomento adquiere mayor desarrollo. Carne blanca, blanda, de consistencia suberosa. Tubos relativamente largos. Poros redondeados y blancos, luego amarillentos y con los bordes desgarrados. Esporas elipsoídeas, de diez a doce μ, y con alguna puntuación en la epispora.

Habitación.—Sobre el *Pinus Pinaster* durante el verano.

Area.—Litoral del Cantábrico.

POLYSTICTOIDES CASTANICOLA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero concoideo y delgado, sobre todo en el borde, de contorno semicircular o arriñonado, de cuatro a cinco centímetros de diámetro máximo horizontal, convexo por el haz y algo cóncavo por el envés;

superficie superior en zonas poco numerosas, anchas, erizadas de escamitas pardo grisáceas, alternadas con otras menos anchas atorciopeladas y de color rojo de ladrillo. Carne escasa, blanca, con un viso amarillento apenas perceptible, fibrosa y de consistencia suberosa. Tubos delgados, del color de la carne, de seis a ocho milímetros de largo en el área central, y cortos en la zona periférica. Poros pequeños, poligonales, desiguales, sobre todo los del centro, de color ocráceo bastante intenso y con bordes enteros.

Habitación. — Hallado sobre los castaños en fin de verano.

Area. —Sólo le he hallado en las localidades asturianas, cerca de Cangas de Onís y en Covadonga.

Gen. **BOUDIERA** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos, generalmente sobrepuestos, formando grupos complejos, ya de forma semidiscoidea o ya algo gruesos, con la superficie superior convexa y la inferior algo cóncava y con el contorno semirredondeado. Estos aparatos viven algunos años, llegan a adquirir bastante consistencia y su grueso o altura es varias veces menor que sus demás dimensiones. En la cara superior presentan, con más o menos relieve, surcos y zonas concéntricas. La sección vertical muestra la escasez de carne y las capas tubíferas estratificadas o sobrepuestas. Tubos rectos y verticales, no largos y adheridos a la carne, de la que difícilmente se separan.

BOUDIERA CONNATA *(Batr.)* Láz.

Agaricus lignosus informis Battr.
Fomes connatus Fr.

Iconografía.

Battr. Fung. agr. arim., lám. 37, fig. G.
Lucand. Champ. France., lám. 325.

Fries. Ic. select. Hymen., lám. 185, fig. 4.
Gillet, Hymen., lám. 465.
Boud. Ic. Myc., tomo I, lám. 157.

Descripción.—Aparatos esporíferos gruesecitos, patentes o revueltos, frecuentemente sobrepuestos y soldados entre sí, de cuatro a ocho centímetros, con la superficie superior blanco grisácea, tomentosa y con alguna zona paralela al borde. Carne que se arrolla en copos al cortarla, coriácea, sedosa y blanquecina. Tubos cortos (de unos dos milímetros), estratificados, blancos al principio y luego pajizos. Poros finos, algo desflecados en sus bordes blanco-amarillentos y cambiantes. Esporas elipsoideas o esféricas, de cuatro a cinco μ y con la exospora sembrada de puntuaciones.

Habitación.—Sobre troncos cariados de manzanos, arces, chopos, saucos y otros durante el otoño y el invierno.

Area.—En el centro se había citado sólo su forma resupinada, que es la llamada *Poria obducens*, pero el Sr. Casares me ha aportado ejemplares del Valle del Oro (Lugo), que ha determinado como pertenecientes a esta especie, recogidos sobre chopos.

BOUDIERA FUCATA *(Quel.)* Láz.

Fomes fucatus Quel.
Polyporus fucatus Quel.

Iconografía.

Quel. Assoc. fr. pour l'avan. des Sc. 1886, lám. 9, fig. 7.

Descripción.—Aparato esporífero concoideo, de diámetro horizontal, de unos cinco centímetros, con la margen adelgazada y ondeada o rizada; superficie superior lampiña o pruinosa, de color rojizo violáceo y zonada hacia los bordes. Carne escasa, acorchada, suave, de color pardoso claro o leonada. Tubos muy delgados, de color leonado. Poros redondeados, pardos, cubiertos al principio por una eflores-

cencia pruinosa, blanca que desaparece más tarde. Esporas pardo claras, elipsoideas, de siete a ocho μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los troncos secos de los robles en primavera.

Area.—Hallada en Cataluña y en los Pirineos.

BOUDIERA PECTINATA *(Schum.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus Ribis Fr.
Fomes pectinatus Klotzsch.
Fomes conchatus Quel.
Fomes Loniceræ Weium.
Fomes Evonymi Kalch.
Fomes Ribis Schum.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 454, fig. E.
Œder. Fl. Dan., lám. 1790, fig. 2.
Quel. Champ. Vosg. Jura, lám. 17, fig. 5.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 49, b. 48 y 52.
Kalch. et Schultz. Ic. select. Hymen. Hung., lám. 35, fig. 3.
Aun. Sc. nat. 1836, tomo XII, fig. 6.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 53.

Descripción.—Aparatos esporíferos superpuestos, pequeños, de tres a cinco centímetros, patentes o revueltos, de forma bastante convexa por el haz y apenas cóncava por el envés, de mucho grueso, con surcos, zonas y a veces prominencias crestiformes dispuestas en líneas concéntricas en la superficie superior, que es tomentosa; su coloración es al principio amarillenta, después leonada, y por último llega a ser baya o parda en la porción central y amarillenta clara en la marginal. Carne suberosa, que se arrolla en copos al cortarla, de color pardo leonado. Tubos estratificados, salvo en los ejemplares jóvenes, pardo leonados, cortos y delgados.

Poros pequeños, amarillentos claros y por fin oliváceos. Espora amarillenta, elipsoidea, de tres a cuatro μ de diámetro.

Habitación.—Sobre tocones de boneteros, madreselvas, chaparros, groselleros y espinos albares durante el verano y el otoño.

Area.—Hasta hoy sólo se le ha hallado en las regiones septentrional y occidental y siempre rara.

BOUDIERA RUBRIPORA *(Quel.)* Láz.

Sinonimia.

Fomes rubriporus Quelet.

Descripción.—Aparato esporífero de unos diez centímetros de diámetro máximo, convexos por el haz y algo cóncavos por el envés, con la superficie superior ornada de surcos y zonas concéntricas, ostentando un reborde marginal engrosado, pubescente, ocráceo leonada, provista de un surco paralelo al reborde, erizada de pelitos bayos u ocráceos. Carne suberosa, compresible y elástica, de color leonado pálido. Tubos estratificados, cortos (de uno a dos milímetros), de color pardo o acanelado. Poros muy finos de color rojo sanguíneo o purpurinos, cambiantes. Espora elipsoidea, de cinco a seis μ, incolora y al fin amarillo pálida.

Habitación.—Sobre tocones de encinas y robles en los bosques sombríos, durante casi todo el año.

Area.—En los Pirineos.

BOUDIERA SCALARIA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos sobrepuestos y soldados formando un conjunto escaloriforme, teniendo cada uno de cuatro a ocho centímetros de diámetro horizontal por tres a cuatro de grueso, con el contorno semirredondeado y bastante entero: superficie superior revestida por una

cutícula pardo grisácea, bastante homogénea, mate y como empolvada, finamente resquebrajada, sin surcos ni zonas y con el reborde obtuso, un poco saliente y de color más claro o leonado. Carne pardo rojiza, oscura, homogénea fibrosa y con bastante consistencia y dureza. Tubos de cuatro a seis milímetros de longitud, delgados y de igual coloración que la carne, formando dos o tres capas en cada uno de los aparatos. Poros medianos, de color ocráceo claro, muy perceptibles en la parte más interna del envés de cada aparato y enmascarados en todo el resto de la misma superficie por una abundante pruina grisáceo amarillenta bastante pálida. Esporas esferoideas de seis a siete μ.

Habitación.—Hállase sobre los ciroleros y cerezos en verano y otoño.

Area.—Hasta hoy sólo es conocido en la región septentrional y en Galicia.

Gen. **BULLIARDIA** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos anuales de forma concoidea y de contorno más o menos arriñonado, insertos por la escotadura sobre las ramas y casi normales a éstas, con la superficie superior convexa y la inferior o porífera cóncava. Los tubos cortos y dispuestos en una sola capa y que por hendirse se dividen al fin en laminillas libres entre sí pero adheridas al soporte. Poros con los bordes desportillados que abren comunicaciones con los adyacentes, originándose el dibujo laberintiforme que caracteriza la cara inferior de sus himenóferos. Esporas ovoideas alargadas, incoloras. Las especies viven sobre los troncos y ramas.

A. —*Especie de coloración homogénea.*

BULLIARDIA UNICOLOR *(Schœff.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus unicolor Schæff. Bolt. Bull.
Sistotrema cinereus Pers.
Dœdalea unicolor Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 408.
Bolton. Hist. of Fung., lám. 163.
Sow. Engl. Fung., lám. 325.
Batsch. Elench. Fung., lám. 41, fig. 227.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 84.
Bern. Champ. Roch., lám. 46, fig. 1.

Descripción. — Aparatos esporíferos concoideos de cinco a ocho centímetros de diámetro máximo, reunidos y sobrepuestos, con la superficie superior asurcada, aterciopelada o erizada de escamitas leonadas, con zonas concéntricas, de color homogéneo, gris, ocráceo pálido o ceniciento, excepto en la zona marginal que sucesivamente pasa por los colores, blanco sucio, ceniza y ahumado. Carne casi nula blanca, de consistencia suberosa. Tubos ocráceos pálidos hasta de un centímetro de longitud. Poros blancos al principio, poco profundos, con los bordes retorcidos y sinuosos y laberintiformes como limitados por pliegues himeniales más que por laminillas y grisáceos al fin. Esporas elipsoideas, de seis a siete μ, con finísimos aguijoncitos en la exospora.

Habitación.—Sobre los tocones de cupulíferas y arces en primavera y otoño.

Area.—Excepto en la región oriental ha sido mencionada en todas las demás de nuestra Península.

BULLIARDIA GRISEA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos concoideos, convexos por el haz y cóncavos por el envés, de cuatro a seis centímetros de diámetro horizontal por uno de grueso total, próximamente, en la porción central y muy adelgazados en los bordes. Superficie superior totalmente erizada de escamitas, pero dividida en zonas por la existencia de surcos lineales concéntricos con el borde y bastante marcados; en los ejemplares jóvenes la banda marginal es marcadamente leonada, por lo que contrasta con el color gris claro de las demás, pero esta diferencia desaparece con el tiempo, por lo que en os ejemplares desarrollados son todas grisáceas, algo más oscuras las zonas internas que las próximas al borde, pero sin que ninguna presente matiz leonado. Carne muy escasa y blanca. Tubos anchitos, hasta de siete u ocho milímetros de longitud, de color gris claro y hendidos hasta dividirse en laminillas. Poros grisáceos, bastante claros, que por la comunicación de unos con otros forman un dibujo laberintiforme. Esporas elipsoideas, de siete a ocho μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los troncos de los pinos en el otoño.

Area.—Hasta hoy sólo puedo citar esta especie en la región central, pues todos los ejemplares por mí hallados, proceden de las cercanías de Madrid y de los pinares de la cordillera carpetana.

BULLIARDIA VELUTINA *Sp. Nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos delgados y sobrepuestos formando grupos, a veces muy numerosos, en forma de abanicos, angostados en la base y aun subpedicelados, de tres a cinco centímetros de diámetro por seis a ocho milímetros de grueso en su base y con los bordes muy agudos. Superficie superior aterciopelada y suave al tacto por estar recubierta de pelitos abundantes muy cortos y finísimos; de color leonado uniforme o manchado de blanquecino; la zona

periférica aparece sensiblemente cruzada por pliegues radiantes y regulares sin arrugas profundas entre ellos. Carne escasa y blanca, consistente y frágil. Tubos cortísimos (menos de un milímetro) en la zona periférica y bastante más largos y hendidos en láminas hacia la base de la superficie inferior. Los poros largos y abiertos, comunicando entre sí constituyen un dibujo típicamente laberintiforme, presentando laminillas desigualmente denticuladas en su borde y con color semejante al de la superficie superior, pero siempre más ocrácea. Esporas elipsoideas, de ocho a diez μ de diámetro máximo.

Habitación.—Sobre toconos y en la base de los troncos de pino, durante el verano y otoño.

Area.—Sólo la he hallado hasta hoy en las cercanías de Avilés (Asturias) y en algunos pinares costeños de las provincias vascongadas y Santander, pero poseo un magnífico ejemplar de esta especie recogido en los pinares valencianos de la Dehesa de la Albufera por el Sr. Boscá en Octubre de 1902, que vino a mi poder hace ya años, pero cuyo estudio no ultimé hasta el año anterior al ordenar todos los materiales acopiados para preparar esta monografía. Con tales datos el área que puedo atribuir a esta especie es el de los pinares de la costa en el litoral Norte y Este y acaso en todo el resto de las costas ibéricas.

Observaciones.—Los ejemplares del Norte, a los que considero como el tipo de esta especie, no coinciden del todo con el ejemplar valenciano de que he hecho mención; las diferencias no me parecen de importancia suficiente para considerarlos como entidades específicas diferentes, mas sí para admitir la existencia de una variedad.

Variedad **Valentina:** caracterizada porque las mallas de la reticulación laberintiformes son doble mayores, algunas de la base llegan a medir cerca de un centímetro de longitud; las laminillas que las forman son más oscuras, casi pardas, y las arrugas de la zona marginal de la cara superior

no son radiantes y bien definidas como en el tipo, sino que forman una reticulación imperfecta y sembrada de hoyitos muy claramente perceptibles.

B.—*Especies con zonas de coloraciones diversas.*

BULLIARDIA NIGRO-ZONATA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos concoideos y delgados, superpuestos en grupos poco numerosos, de tres a cinco centímetros de diámetro máximo, por un centímetro de grueso próximamente, adelgazados hacia el borde, que es ondeado y bastante agudo. Cara superior cubierta de escamitas de color grisáceo leonado claro, cortado en zonas concéntricas por bandas pardo rojizas, casi negras, paralelas al borde y sin escamas; de estas zonas alternativamente claras y oscuras son notables por su amplitud las dos masas externas, la anteúltima negruzca, y la marginal que es clara, muy ancha y llega hasta el borde. Carne de un blanco casi puro, consistente, dura en seco y escasa. Tubos anchos, muy cortos cerca del borde y de seis a siete milímetros de longitud los de la base, hendidos en láminas desiguales, de color pardusco, y con el borde algo denticulado. Poros alargados y desgarrados, constituyendo un dibujo laberintiforme. Esporas elipsoideas, de siete a ocho μ de diámetro.

Habitación.—Sobre los troncos de los olivos, en otoño.

Area.—Debo el conocimiento de esta especie al infatigable naturalista D. Eduardo Boscá, quien la ha recogido en la provincia de Valencia y me la remitió para su estudio hace ya algún tiempo. Sólo puedo citarla, por consiguiente, de dicha provincia.

BULLIARDIA VIRESCENS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos semidiscoideos o submensulares de contorno semirredondeado de ocho a diez

centímetros de diámetro máximo horizontal, delgados, salvo en la porción central; superficie superior con algunos surcos concéntricos poco profundos, velloso, aterciopelado y suave, con zonas concéntricas alternadas, más anchas, verdoso-oliváceas y mates, y otras estrechas, coincidentes con los surcos, brillantes y de color leonado tan claro que resulta casi blanco. Carne blanquecina y escasa, suberosa. Tubos anchos y blancos, oblicuos respecto de la superficie porífera, resolviéndose casi completamente en laminillas irregulares y sueltas al llegar a ésta. Poros sinuosos, comunicantes, produciendo un dibujo típicamente dedaloideo. Esporas elipsoideas de siete a ocho μ de diámetro.

Habitación.—En otoño e invierno sobre los troncos de los robles.

Area.—Hasta hoy sólo conozco de ella ejemplares procedentes de las cercanías de Villagarcía (Pontevedra), que me fueron aportados por el Sr. Crespo.

BULLIARDIA RUFESCENS *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos numerosos y sobrepuestos, orientados paralelamente sobre el soporte, laminares y planos, o ligeramente convexos por el haz y cóncavos por el envés, de cuatro a seis centímetros de anchura por cinco o siete de longitud y escasamente uno de grueso en su base y adelgazándose hasta el borde; el contorno es arriñonado en los aparatos jóvenes, anchamente espatulado en los adultos, visiblemente ondulado y aun lobulado en éstos por presentar escotaduras cuyo fondo se continúa hacia dentro en marcadas arrugas radiantes. Superficie superior desigual y granuda, de tono general pardo o muy marcadamente rojizo, zonado por la existencia de líneas concéntricas negruzcas y con las zonas externas cubiertas de papilas escamosas amarillentas. Carne escasa, de color amarillento pálido, tierna en fresco y bastante dura en seco. Tubos hasta de siete a ocho milímefros en la base del aparato, acortán-

dose hasta uno solo en el borde, anchitos, amarillentos al principio, y luego pardo-rojizos. Poros bien definidos, al iniciarse pequeños, de color pardo-rojizo oscuro, poligonales y desiguales, pero que al desarrollarse se agrandan y desgarran por sus bordes hasta constituir un dibujo típicamente laberintiforme, y aun resolverse en laminillas cuyo borde externo aparece desigualmente denticulado. Esporas elipsoideas, de siete a nueve μ.

Habitación.—Sobre los tocones de los castaños de Indias en el otoño.

Area.—Sólo puedo mencionar esta especie en la región central. Los primeros ejemplares que conocí los observé en 1904 en el Jardín de la Facultad de Farmacia sobre el tocón de un castaño cortado dos años antes, comenzando su aparición en Septiembre y no recogiéndolos hasta Noviembre para observar su evolución. En 1908 hallé otros ejemplares en Octubre en la Real Casa de Campo, sobre tocones de la misma especie.

Gen. **LENZITES** *Fr.*

Aparatos esporíferos duros y coriáceos de forma concoidea o láminas no muy gruesas, cóncavas por la cara himenófora y convexa y manifiestamente zonados por la superior o estéril. La cara inferior está cubierta por láminas verticales, radiantes, no muy gruesas, más o menos anastomosadas formando un dibujo reticulado de mallas larguísimas y estrechas en el sentido del radio o asemejándose mucho al de los agaricáceos. Esporas incoloras, elipsoideas o alargadas y casi cilíndricas. Sus especies viven sobre troncos, preferentemente de cupulíferas y abietáceas, pero también sobre especies de otras familias.

A.—*Carne blanca; laminillas himeniales blancas.*

LENZITES ALBIDA *Fr.*

Sinonimia.

Dœdalea albida. Fr.

Iconografía.

Fries. Ic. select. Hymen., lám. 177, fig. 1.

Descripción.—Aparatos exporíferos pequeños extendidos, revueltos o superpuestos unos a otros, de dos a tres centímetros de radio, redondeados, suberosos y blandos en fresco, coriáceos en seco, delgados, de color blanco lácteo, sin zonas y con tomento sedoso en su haz. Carne blanca. Laminillas dicótomas, anastomosadas, blancas y delgadas, con los bordes muy enteros. Esporas de unas doce μ.

Habitación.—Sobre los troncos de los abedules y fresnos, en verano y otoño.

Area.—Hallado sólo hasta hoy en la región septentrional.

LENZITES HETEROMORPHA *Fr.*

Sinonimia.

Dœdalea heteromorpha Fr.

Iconografía.

Fries. Ic. select. Hymen., lám. 177, fig. 3.

Descripción.—Aparatos esporíferos patentes o revueltos, sobrepuestos y aglomerados, muy desiguales, de unos tres a cuatro centímetros de diámetro horizontal, cuando más delgados, con la superficie superior bastante convexa, rugosa, fibrosa, de color blanquecino de crema, al fin amarillenta y agrietada. Carne blanca, inodora. Laminillas himeniales apretadas, muy anchas, bifurcadas y blancas. Espora elipsoidea de nueve a diez μ.

Habitación.—Encuéntrase en verano sobre los tocones de abeto, en los bosques.

Area.—Hasta hoy sólo se ha comprobado su existencia en los bosques del Pirineo central (valle de Literola). (Láz.)

LENZITES VARIEGATA *(Bull.)* Fries.

Sinonimia.

Agaricus coriaceus Bull. (Pars.)

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 537, figs. I. K. L.

Descripción.—Aparatos esporíferos frecuentemente reunidos en grupos arrosetados, con el contorno arriñonado, de dos a cinco centímetros, coriáceos y rígidos, con la cara superior cubierta por zonas concéntricas alternativamente sedosas y aterciopeladas, cuyas coloraciones son de variados matices (grises, leonadas, pardas, rojizas o violáceas), en el borde siempre blanquecinas. Carne blanca. Laminillas anchas, gruesecitas, pero adelgazadas en el borde, blancas, anastomosadas. Esporas de unos diez centímetros, con la exospora punteada.

Habitación.—Sobre los troncos de chopos, abedules, hayas y otros árboles, en verano y otoño.

Area.—Observado únicamente en las provincias septentrionales.

LENZITES HISPIDA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparato esporífero semirredondeado, de cuatro a seis centímetros de diámetro máximo horizontal, con la superficie superior convexa, algo ondeada, levemente zonada en la proximidad del margen y cubierta de un revestimiento denso apretado, formado por escamitas largas y cerdosas, grisáceas y verdosas. Carne blanquísima y escasa, algo aromática. Láminas de un centímetro de ancho cuando más, en su parte más dilatada, blanco céreas, con el borde

muy desigual, algo ondeado y sembrado de escotaduras y de ondulaciones salientes.

Habitación.—Sobre los troncos de los chopos en otoño e invierno.

Area. —Hasta hoy sólo he observado esta especie en Castilla la Nueva.

B.—*Carne blanca; laminillas himeniales al fin coloreadas.*

LENZITES BETULINA *(Schœff.)* Fries.

Sinonimia.

Agaricus betulinus Sow.
Agaricus quercinus Schæff.
Agaricus coriaceus Bull. icon Bolt.
Agaricus flabelliformis Scop.
Dædalea coriácea Clem.
Dædalea betulina Rebaen.

Iconografía.

Schaff. Fung. Bav., lám. 57 (variedad).
Sow. Engl. Fung., lám. 182.
Œd. Fl. Dan., lám. 1555.
Sicard Hist. nat. Champ., lám. 57, fig. 288.
Britz. Lenz., fig. 1,
Berkl. Outl of Brit. Fung., lám. 15, fig. 3.
Roum. Crypt. ill, fig. 212.
Cooke Ill. Brit. Fung., lám. 1145.
Rev. Myc., 1882, lám. 30.
Rev. Mye., 1883, lám. 37, fig. 40 (anómala).
Rev. Myc., 1890, lám. 110, fig. 408 (variedad).
Michœl, Führ Pilz, tomo III, lám. 43.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 37, figs. 1 y 2.

Descripción. — Aparatos esporíferos relativamente algo gruesos, rígidos, de cuatro a ocho centímetros en su diáme-

tro horizontal, con el borde desigual y con la cara superior tomentosa y decorada con zonas estrechas concéntricas de color gris, crema y pardo amarillento u ocráceo. Carne blanquecina al principio, luego más o menos parda. Láminas himeniales de color blanco sucio, gruesas, rectas; unas sencillas y otras ramificadas y anastomosadas. Esporas elipsoideas, algo alargadas, de diez a doce μ.

Habitación.—Sobre los troncos y tocones de salicáceas cupulíferas y otros árboles.

Area.—Común en las provincias del litoral cantábrico y del Oeste de la Península.

LENZITES FLACIDA *(Bolt.)* Fr.

Sinonimia.

Agaricus coriaceus Bolt. non. *Bull.*
Agaricus flacidus Bull.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 394.
Gillet. Champ. de la France, lám. 250.
Cooke. Ill. of the Britsh Fungi, lám. 1145.
Dufour. Atl. des Champ., lám. 47.
Bolton. Hist. of Fung., lám. 158 (variedad).
Mass. Engl. Fung., lám. 30, fig. 5 y 6.
Roll. Atl. des Champ. lám. 97, fig. 214.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I. 57, figs. 3 y 4.

Descripción.—Aparato esporífero semicircular o casi redondeado, de tres a cuatro centímetros de radio horizontal, bastante delgado, de consistencia coriácea y elástico, con la superficie superior erizado aterciopelada, blanquecina al principio y luego alternando unas zonas erizadas y de color pardo u ocráceo y más rara vez rosáceo, con otras zonas más pálidas y aun casi blancas, aterciopeladas. Carne escasísima y blanca. Laminillas himeniales rectas, desiguales, ramificadas,

anchas, con los bordes desiguales, de color blanco al principio y luego amarillento claro, frecuentemente manchadas de violáceo en sus bordes. Espora elipsoidea de unos doce μ.

Habitación.—Hállase en los bosques sobre los tocones y troncos de las hayas, arces, hojaranzos y otras especies arbóreas durante el otoño.

Area.—Se encuentra en las comarcas del Norte, Nordeste y Centro.

LENZITES CONNATA *Sp. nov.*

Descripción.—Aparatos esporíferos concoideos, generalmente soldados lateralmente unos a otros, de contorno semicircular o arriñonado, de cuatro a seis centímetros de diámetro máximo horizontal, por uno a dos de grueso en su centro y con el borde adelgazado; superficie superior con zonas concéntricas alternativamente aterciopeladas y erizadas de cerditas escamosas, pero apenas distintas en coloración, pues unas son de color gris pálido o casi blanco y otras de gris un poco más intenso. Carne blanca, muy dura en seco. Láminillas himeniales de siete a ocho milímetros de anchura en su base y uno escaso en su terminación en el borde del aparato, de color blanco al principio y levemente teñido de un matiz pardo clarísimo, interrumpidas y con anastomosis e intercalaciones, con el borde desigual y ondeado, del mismo color que el resto.

Habitación.—Sobre las cajigas, en otoño.

Area.—Tan sólo la he hallado en la provincia de Santander, en San Vicente de la Barquera, pero también me ha sido remitido de Cartes, junto a Torrelavega, por el Sr. Díaz y Rodríguez.

C.—*Carne coloreada; laminillas himeniales coloreadas.*

LENZITES TRICOLOR *(Bull.)* Fr.

Sinonimia.

Boletus tricolor Bull.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 541, fig. 2.
Aranz. Setas país vasco, lám. 32.

Descripción.—Aparatos esporíferos semirredondeados o concoideos, a veces casi planos, aunque algo prominentes en la base, de siete a ocho centímetros de diámetro horizontal, coriáceos, delgados, ásperos y pintorescamente decorados por zonas numerosas, estrechas y concéntricas de colores muy variados (pardas, azafranadas, rojizas y violáceas, a veces de matiz bastante vivo). Carne escasa, de consistencia acorchada y color paja oscura o parda. Laminillas delgadas, ramificadas o dicotomas y anastomosadas con una escotadura en cada división, formando tubos oblicuamente inclinados hacia la base del aparato, de color amarillo pálido y al fin gris plateado, cambiantes. Esporas prolongadas, de unos nueve μ de longitud y manifiestamente arqueadas.

Habitación.—Sobre troncos muy diversos (nogales, cerezos, ciroleros, sauces) en la estación invernal.

Area.—Distribuído por todas las regiones de la Península

LENZITES SÆPIARIA *(Schœff.)* Fries.

Sinonimia.

Agaricus boletiformis Sow.
Polyporus hirsutus Schæff.
Dædalea sæpiaria Lev.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 76.
Sow. Engl. Fung., lám. 418.
Buxb. Plant. minns cogn. Cap. V, lám. 6.
Vaill. Bot. Paris, lám. 1, figs. 1 a 3.
Britz. Lenz., lám. 2.
Cooke. Ill. Brit. Fung., lám. 1145.
Michœl, Führ. für Pilz., tomo III, lám. 44.
Roll. Atl. des Champ., lám. 98, fig. 215.

Descripción.—Aparato esporífero laminar, delgado, semirredondeado, de tres a ocho centímetros de diámetro, de consistencia suberosa o coriácea, con la cara superior erizada de pelitos que forman zonas concéntricas de los colores bayo y pardo amarillentos, más o menos claros y aun anaranjado en el borde, pasando todas con el tiempo al pardo oscuro. Carne de color pardo o leonado. Laminillas bastante gruesas, amarillas, luego anaranjadas, y al final de un ocráceo muy claro, rígidas, amastomosadas, formando tubos oblicuamente inclinados hacia el borde del aparato, los cuales pasan sucesivamente por los colores amarillento, anaranjado y leonado. Espora de unas diez μ de longitud y sensiblemente curvas.

Habitación.—Sobre los troncos y tocones de las coníferas en verano y otoño.

Area.—Sólo se ha mencionado su existencia en algunas localidades de Aragón y Valencia

Tribu 5.ª—Cladomerideos

Ramas pedicelares desnudas y visibles en casi toda su longitud, terminadas por láminas tubíferas pequeñas..... *Cladomeris.*

Ramas pedicelares cortas y gruesas, invisibles en la posición natural por cubrirlas las láminas tubíferas que son grandes y forman la casi totalidad del aparato..... *Cladodendron.*

Gen. **CLADOMERIS** *Quelet.*

(*Merisma* Fr.)

Aparatos esporíferos cuyas ramas terminan en láminas ondeadas, concoideas o en forma de paletas no muy gruesas, tubíferas en su cara inferior, angostadas en la base para formar un pedicelo muy corto que, soldándose con los correspondientes a las otras láminas, constituye un tronco común, que puede ser grueso y aun tuberiforme.— Especies cuyos aparatos son generalmente de gran tamaño y nacen sobre los troncos vivos o en tierra sobre las raíces muy gruesas y añosas.

A. — *Aparatos esporíferos de consistencia carnosa en fresco.*

CLADOMERISSULPHUREA (*Schœff.*) Quel.

Sinonimia.

Boletus sulphureus Bull.
Boletus tenax Bolt.
Boletus caudicinus Schæff.
Cladomeris Ceratonie Barla.
Merisma sulphureus Fr.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 131 y 132.
Sow. Engl. Fung., lám. 135.
Bull. Champ. de la France, lám. 429.
Battr. Fung. agr. arim., lám. 34, fig. B (variedad).
Bolt. Hist. of Fung., lám. 75.
Œder. Fl. Dan., lám. 1019.
Eloffe. Champ. com., lám. 3, fig. 8.
Gott. Halm. Pilz. Samml., fig. 125.
Huss. Nat. albild. vorz Pilz., tomo I, lám. 46.
Fr. Swer. atl. Swamp., lám. 88.

Grev. Scott. crypt. Fl., lám. 113.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 20.
Paul. Tr. des Champ., lám. 14 (variedad).
Sic. Hist. nat. Champ., lám. 56, fig. 284.
Ventur. Myc. ag. Bresc., lám. 53, figs. 6 y 7.
Berkl. Outl. of Brit. Fung., lám. 16, fig. 3.
Britz. Hymen. Ausgb. V, fig. 17.
Inz. Fung. sicil. I, lám. 3, fig. 2 (variedad).
Leuba. Cham. com., lám. 36, fig. 1.
Gillet. Hymen., lám. 470.
Cordier. Champ. de la France, lám. 39, fig. 2.
Duf. Atl. Champ., lám. 50.
Arauz. Setas país vasco, lám. 22, b.
Mass. Engl. Fung., lám. 28, fig. 2.
Roll. Ath. des Champ., lám. 93, fig. 205.
Michœl. Führ. für Pilz., tomo II, lám. 31.
Dumée. Nouv. Atl. Champ., serie II, 48.

Descripción. —Aparatos esporíferos numerosos, sentados y soldados por la base y empizarrados, formando un gran grupo cespitoso; cada uno puede tener de diez a treinta centímetros de anchura máxima en su borde externo, y afecta la forma de un abanico incompletamente abierto, ondeado y lobulado en su margen, pruinoso, de espléndido color amarillo de limón o casi anaranjado, rojizo en su haz, amarillo de azufre por el envés, el cual luego pasa al color de crema y al fin al blanquecino. Carne de color crema y blanda al principio, luego coriácea y dura, de color gredoso blanquecina, con olor de vinagre y sabor ligeramente amargo. Tubos cortos de medio milímetro. Poros pequeños, redondos, de color amarillo de azufre. Espora esferoidea o elíptica de unas seis μ.

Habitación. —Aparecen en grupos sobrepuestos sobre los troncos viejos de los robles, manzanos, olmos y otras especies al final del verano y comienzo del otoño.

Area.—Su existencia sólo se ha comprobado hasta hoy en las regiones septentrional y central.

CLADOMERIS CONFLUENS *(Alb. et Schw.)* Quel.

Sinonimia.

Polyporus conflueus Alb. et Schw.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. 109 y 110.
Harz. Nat. albild, vorz Pilz, fig. 13.
Gott. Halm. Pilz, Samml., fig. 124.
Fries. Sev. atl. swamp., lám. 24.
Lorin. Essb. und gift. Schwæmm., lám. 5, fig. 6.
Barla. Fl. Myc. ill., lám. 29, figs. 2 y 3.
Leuba. Champ. com., lám. 36, figs. 2 y 3.
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 14.
Roum. Crypt. ill., fig. 215.
Lenz. Nutzl. Schwæmm., lám. 43.
Moyen. Les Champ., lám. 14, fig. 3.
Dufour. Atl. Champ., lám. 49.
Michœl. Führ. für Pilz., tomo I, lám. 17.
Cavara. Fung. mang., lám. 33.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, fig. 4.

Descripción.—Aparatos esporíferos grandes (diez a veinte centímetros de ancho cada uno) en forma de abanico a medio abrir, relativamente gruesos, frágiles, lampiños, con el borde ondulado y aun sinuoso, en los que es frecuente hallar soldaduras entre la cara inferior de unos y la superior de otros en los puntos de contacto y entre las ondulaciones de los bordes; superficie superior amarillo pálida, después algo rosada o leonada, que se oscurece al fin. Pedicelo carnoso y grueso, de dos a tres centímetros de largo, alguna vez sencillo, mas generalmente dividido en pocas ramas muy cortas, blancas y pruinosas, que inmediatamente se

ensanchan para formar los aparatos esporíferos correspondientes. Carne compacta, elástica, jugosa en fresco, blanquecina, con olor de manzana y sabor ligeramente amargo. Tubos cortos, blanquecinos, de unos dos milímetros. Poros pequeños, redondeados, de color blanco de crema y blanco pruinosos. Esporas de seis a siete μ, elipsoideas y con la exospora punteada.

Habitación.—Sobre los troncos de los robles, en otoño.

Area.—Pirineos y Vizcaya.

Observaciones.—Los aparatos esporíferos de esta especie son considerados como comestibles cuando son jóvenes.

CLADOMERIS IMBRICATA *(Bull.)*

Sinonimia.

Boletus imbricatus Bull.
Polyporus imbricatus Fr.
Polyporus ramosus Let.
Cladomeris americans Pers.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 366 (tipo).
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 21.
Sterb. Theatr. Fung., lám. 27, fig. B.
Letell. Fig. de Champ., lám. 626 (var. *ramosus).*
Britz. Hymen. Ausbg., V, fig. 18.

Descripción. — Aparatos esporíferos sentados sobre los troncos, y que unidos varios por su base en un tronco común, forman un grupo capitoso; cada uno de ellos tiene de cinco a diez centímetros de ancho en su borde externo, que es festonado, ondeado y lobulado, con la superficie superior lampiña, sin zonas, de color pardo amarillento o algo rojizo, siempre pálido en los bordes. Carne blanco-farinácea, jugosa y tierna, consistente, al fin seca y frágil, con sabor ligeramente amargo y con un olor que se ha comparado al de

la raíz de genciana. Tubos finos, de un milímetro. Poros pequeños redondeados, amarillentos y luego de color rojizo leonado. Esporas elipsoideas de seis por uno μ.

Habitación.—En los troncos de los robles durante el verano.

Area. — Comprobada en las regiones occidental, boreal, central y oriental de la Península y recientemente en Galicia, según ejemplar recogido en Valle de Oro (Lugo) por D. Antonio Casares.

Observaciones.—Es esta especie bastante variable por su desarrollo, morfología y coloraciones. Ejemplares hemos hallado que en fresco medían treinta por veinte centímetros (el grupo entero), mientras que en otros escasamente se aproximaban a la mitad de estas dimensiones.

Los limbos, generalmente en forma de abanico a medio abrir, pueden ser en los que se hallan encima redondos y aun arriñonados. Su borde externo puede ser entero, ondeado, hendido, sinuado y aun casi laciniado. La que se ha llamado variedad *ramosa* figurada en la lámina 418 del Bulliard (Champignons de la France) con las ramas cilíndrico mazudas recubiertas de himenio por toda su superficie, mencionada en los libros franceses y que, sin duda, debe constituir una especie y aun acaso un género aparte, no parece existir en España.

Las zonas del haz de los aparatos esporíferos pueden variar desde claramente visibles a confusas y aun nulas. El color dominante en fresco puede también oscilar entre ocráceo, pardo y aun pardo amoratado.

CLADOMERIS INTYBACEA *(Sow.)* Quelet.

Sinonimia.

Boletus frondosus Sow.
Boletus ramosissimus Let.
Polyporus intybaceus. Fr.

Cladomeris frondosissima Schr.
Merisma intybacea Fr.

Iconografía.

Schæff. Fung. Bav.. láms. 119 y 128.
Œder. Fl. Dan., lám. 1793.
Sow. Engl. Fung., lám. 87.
Huss. Ill. of. Brit. Myc., tomo I, lám. 6.
Roze et Rich., Atl. des Champ., lám. 63, figs. 7 y 8.
Paul Tr. des Champ., lám. 30.
Britz. Hymen. Ausbg., fig. 70.
Roll. Atl. des Champ., lám. 92, fig. 202.
Dumée. Nouv. Atl. Champ., serie I, lám. 47.

Descripción.—Aparatos esporíferos lisos, espatulados, anchos, ondeados, más o menos alineados, hendidos, cuyo haz varía desde el color ocráceo claro, algo amoratado, al avellana, pardeando al final. Pedicelo hasta de cuatro a cinco centímetros de diámetro, muy corto, con las ramas también cortas y muy numerosas, en las que se nota una zona como empolvada. Carne tierna, muy frágil, blanco rosada y dulzaina en fresco. Tubos cortos de medio milímetro o menos. Los poros, generalmente alargados oblicuamente, están separados por tabiques gruesos; su color es semejante al de la cara superior, pero al fin pardean. Esporas elipsoideas de unos siete μ.

Habitación.—Sobre los troncos y tocones principalmente de cupulíferas en verano y otoño.

Area.—Región septentrional.

Observación.—Es comestible.

CLADOMERIS SCHWEINITZII *(Alb.et Schw.)* Quelet.

Sinonimia..

Cladomeris sistotrema Alb. et Schw.
Cladomeris maxima Brot.
Merisma Schweinitzii Fr.

Descripción.—Aparatos esporíferos, sencillos, convexos por la cara superior y casi planos por la inferior, a veces solitarios, gruesos y esponjosos, con el contorno en forma de abanico abierto y de quince a cuarenta centímetros de diámetro máximo; con más frecuencia varios reunidos y superpuestos; superficie superior ondeada, con sinuosidades y salientes, tomentosa de color leonado y al fin pardusco. Carne muy blanda, frágil en seco, de color leonado rojizo y al fin parda. Pie grueso, corto, a veces reducido a lo preciso para la inserción de los limbos o himenóforos, de color de canela u ocráceo. Tubos cortos, de color pardo claro. Poros grandes de uno a dos milímetros, al fin sinuados o laberintiformes, de color amarillo verdoso y al fin pardos. Espora elipsoidea, de unos ocho μ de diámetro máximo.

Habitación.—Se encuentra en verano y principios del otoño sobre los troncos de los pinos.

Area.—Su existencia aparece comprobada por mis propias recolecciones en las regiones septentrional y occidental. D. Antonio Casares Gil me ha aportado algún ejemplar recogido en Valle del Oro (Lugo) sobre *Pinus Pinaster*, que aunque muy alterado, por su morfología se identifica bien con esta especie.

B.—*Aparatos esporíferos de consistencia coriácea en fresco.*

CLADOMERIS ACANTHOIDES *(Bolt.)* Quel.

Sinonimia.

Agaricus speciosus Bolt.
Boletus imbricatus Sow. nou Bult.
Boletus giganteus Pers.
Boletus elegans Bolt.
Boletus acanthoides Bull.
Boletus salicinus Bull.
Boletus mesentericus Schæff.

Polyporus giganteus. Fr.
Cladomeris gigantea Quel.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 486.
Pers. Ic. pict. rar. Fung., lám. 6.
Eloffe. Champ. com., lám. 4, fig. 1.
Inz. Fung. Sicil., lám. 6, fig. 12.
Michœl. Führ, für Pilz, tomo III, lám. 37.
Boud. Ic. myc., tomo I, lám. 153.
Dumeé. Nouv. Atl. Champ., serie II, lám. 46.

Descripción.—Aparatos esporíferos reunidos por su base en un tronco común, formando así grandes grupos empizarrados, que pueden ser de cincuenta y aun hasta de ochenta centímetros; cada uno de los aparatos esporíferos puede llegar hasta treinta centímetros de anchura y son patentes, embudados, rígidos, con la superficie superior finamente aterciopelada y sembrada de granitos, apenas zonada, de coloración acanelada con la zona del margen amarillo pajiza y al fin rojiza. Pedicelo tuberoso, grueso y corto. Carne fibrosa, blanquecina, que se ennegrece luego, con sabor acidulo y olor avinagrado. Tubos largos, blancos al principio. Poros decurrentes, pequeños y redondos, de color de crema que se manchan de negruzco amarillento por la presión o por el tacto. Esporas de siete a ocho μ, elipsoideas.

Habitación.—Sobre los tocones viejos de los robles y encinas en los sitios sombríos, durante el otoño.

Area.—Sólo aparecía indicada esta especie en las provincias valencianas, pero el Sr. Ortiz y Soriano me ha procurado ejemplares recogidos en Río Cubas (Santander), con lo que su área probable se puede referir a las regiones boreal y central.

Observación.—A pesar de los caracteres organolépticos de su carne los aparatos esporíferos de esta especie son comestibles.

CLADOMERIS MONTANA *(Fries.)* Quelet.

Sinonimia.

Polyporus acanthoides Fr. non Bull.

Descripción.—Aparatos esporíferos angostados en pedicelos que se sueldan por su base y constituyen grupos cespitosos de treinta a ochenta centímetros de anchura; su forma es de abanicos ramificados, ondeados, con lóbulos, y la superficie superior aparece aterciopelada, asurcada y de color pardo amarillento bastante claro. Pedicelo grueso, muy corto, velloso y blanquecino. Carne esponjosa, frágil, blanca y amarga. Tubos blanquecinos. Poros alveolados de uno a dos milímetros, de color blanco de crema, al fin algo laberintiformes por las desgarraduras de los tabiques que los separan, son delgados y tienen los bordes finamente pubescentes. Esporas esferoideas, de siete a ocho μ, con la exospora sembrada de aguijoncitos.

Habitación.—Al pie de los troncos de abeto en los bosques montañosos, durante el verano y el otoño.

Area.—Hallado únicamente en los bosques pirenaicos.

CLADOMERIS IMBERBIS *(Bull.)* Quelet.

Sinonimia.

Boletus imberbis Bull.
Polyporus pelleporus Sow.
Polyporus rugosus Sow.
Polyporus imberbis Fr.
Polypuros ravidus Fr.
Polyporus alligatus Fr.

Iconografía.

Bull. Champ. de la France, lám. 445, fig. 1.
Kalch. et Schultz. Ic. select. Hymen., lám. 34, fig. 3.
Bresad. Fung, Trid., lám. 135.

Descripción.— Aparatos esporíferos numerosos, patentes y empizarrados, que se reúnen formando masas de diez a treinta centímetros y aparecen lobulados, a veces angostados en su base en un pedicelo rudimentario, más generalmente sentados, pero siempre soldados por la base, y son delgados, con la superficie superior, finamente vellosa, al fin zonada, que varía del color crema al ocráceo cuando joven, y es al fin pardo amarillenta clara. Carne escasa, blanda, frágil, de color blanco sucio, algo zonada y con olor farináceo. Tubos muy cortos (uno a dos milímetros) ocráceo blanquecinos. Poros redondeados, al fin poligonales, de medio milímetro, pubescentes, blancos y luego levemente amarillos o grisáceos. Espora elipsoidea de seis a siete μ.

Habitación.—Sobre troncos de los sauces viejos y otros, en verano y otoño.

Area.—Hallada en varias localidades de la región septentrional.

CLADOMERIS FLORIFORMIS *(Quel.)* Láz.

Polystictus floriformis Quel.

Iconografía.

Bresad. Fung. Trid., lám. 68.

Descripción.—Aparatos esporíferos delgados y pequeños, de dos a tres centímetros de diámetro, con limbo redondeado angostado en un pedicelo corto, por el que se unen unos a otros, quedando soldados por su base; el limbo es de forma concoidea o casi orbicular con el borde externo truncado o levemente escotado y con la superficie superior sedosa y presentando algunos pliegues radiantes. Carne coriácea, acídula y algo amarga. Tubos muy cortos (uno a dos milímetros). Poros pequeños, denticulados o pestaños en su borde. Espora elipsoidea de unas cuatro μ.

Habitación.—Sobre las ramillas y capas o montones de

hojas en descomposición en los pinares del *Pinus Pinaster* durante el otoño.

Area.—Provincias de la región septentrional.

CLADOMERIS DESTRUCTOR *(Krombh.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus destructor Krombh.
Polyporus alutaceus Rostk.
Polystictus destructor Schrad.

Iconografía.

Krombh. Nat. albild. Schwæmm., lám. 5, fig. 8.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 30.
Britz. Hymenomy Ausbg., lám. 5, fig. 30.

Descripción.—Aparatos esporíferos patentes o revueltos, de cuatro a seis centímetros de diámetro horizontal, ondeados y rugosos, carnosos, blandos y frágiles, con la superficie superior pubescente y pardusca. Carne fibrosa, jugosa en fresco, blanca, sin zonas y que se arrolla al cortarse, con olor fuerte no agradable. Tubos alargados blanquecinos. Poros blancos oblongos, con los bordes dentados o desgarrados.

Habitación.—Sobre los tocones y leños en putrefacción, durante el verano y otoño.

Area.—Se cita en las provincias vascongadas.

Gen. **CLADODENDRON** *Nov. gen.*

Aparatos esporíferos constituídos por pedicelos divididos en ramas relativamente largas y desnudas muy visibles en la posición natural de los aparatos; cada una de estas ramas termina en un pequeño limbo laminar no muy grueso y que ostenta en su cara inferior una capa tubífera constituída por tubos cortos.—Especies cuyos aparatos reunidos en grupos

son de bastante tamaño y aparecen sobre los troncos, tocones o raices muy gruesas y casi superficiales.

CLADODENDRON FRONDOSUM *(Œder.)* Láz.

Sinonimia.

Polyporus frondosus Krombh.
Cladomeris frondosa Œder.

Iconografía.

Œder. Fl. Dan., lám. 952.
Schœff. Fung. Bav., lám. 127.
Sterb. Theatr. Fung., lám. 28, fig. A.
Ventur. Mic. agr. Bresc., lám. 62, fig. 1.
Badh. Escul. Fung., lám. 4, fig. 1.
Humm. Prakt. Pilz., lám. 1, fig. 5.
Krombh. Nat. albild. Schwæmm., lám. 48, flgs. 17 a 20.
Paul. Tr. des Champ, lám. 29.
Rostk. Deutsch. Fl., tomo IV, lám. 18:
Fries. Sw. atl. Schwamp., lám. 44.
Price. Ill. of the Fung., fig. 128.
Lorin. Essb. und giff. Schwæmm., lám. 6, fig. 4.
Roum. Crypt. ill., fig. 215 **.
Barla. Champ. Prov. Nice., lám. 29, fig. 1.
Cordier. Champ. France., lám. 39, fig. 1.
Michœl. Führ. für Pilz., tomo II, lám. 35.
Roll. Atl. des Champ., lám. 91, fig. 201.
Mig. Krypt. Fl., tomo III, lám. I, 33, F.

Descripción.—Aparatos esporíferos, con tronco y ramas numerosas, blanco amarillentas, terminadas por limbos palmeado-hendidos, de color gris oscuro o amarillento, rugosos, alargados, espatulados o concoideos, cada uno de tres a seis centímetros de diámetro, con la superficie superior vellosa o pruinosa. Pedicelo común grueso, lampiño y blanquecino, que puede llevar de treinta a ochenta aparatos es-

poríferos en las terminaciones de otras tantas ramitas bastante más delgadas. Carne blanca, fibrosa o algo coriácea, frágil, con sabor grato y olor de pan tierno en fresco. Tubos cortos de medio milímetro próximamente. Poros decurrentes poligonales, de medio milímetro de diámetro, blancos y con el borde denticulado. Espora elipsoidea de uno seis μ, con la exospora punteada.

Habitación.—En los bosques sombríos sobre los troncos de robles, encinas, hojaranzos y otros árboles, al final del verano.

Area.—Comprobada en las regiones del Norte, Este, Centro y Oeste.

Observación.—Esta especie es comestible.

CLADODENDRON UMBELLATUM *(Schœff.)* Láz.

Sinonimia.

Boletus lacteus Batsch.
Boletus pileatus Schæff.
Polyporus umbellatus Krombh.
Cladomeris umbellata Quelet.
Merisma umbellatus Fr.

Iconografía.

Schœff. Fung. Bav., lám. III, 265 y 266.
Œder. Fl. Dan. lám. 1197.
Gott. Halm. Pilz. Samm., fig. 95.
Jacq. Fl. Austr,, lám. 172.
Roze et Rich. Atl. des Champ., lám. 63, figs. 1 a 6.
Tratt. Essb. Schwæmm., lám. T.
Batsch Elench. Fung., lám. 10, fig. 42, b.
Lorin. Essb. und. gift. Schwæmm., lám. 5, fig. 7.
Krombh. Nat. albild. Schwæmm., lám. 52, figs. 3 a 9.
Lenz. Nutzl., Schwæmm., fig. 44.
Quel. Champ. Vosg. Jura., lám. 18, fig. 1.

Gillet. Hymen., lám: 469.
Moyen. Les Champs., lám. 14, fig. 4.
Roll. Atl. des Champ., lám. 91, fig. 200.

Descripción.—Aparatos esporíferos muy numerosos (de medio a un centenar sobre el mismo pie) abroquelados orbiculares de dos a tres centímetros de diámetro, convexos, umbilicados o deprimidos en su centro, con la superficie superior pubescente o pruinosa, de color gris amarillento o de pelo de camello, frecuentemente con pintitas pardo-oscuras. Pedicelo blanco y grueso, carnoso, formando un tronco de tres a cuatro centímetros de diámetro, dividido en multitud de ramitas, cada una de las cuales lleva en su ápice un aparato esporífero. Carne escasa y blanda en los limbos de los himenóforos, abundante en el tronco, blanca, sabrosa y con olor de pan tierno. Tubos cortísimos, blanquecinos o grisáceos muy claros, decurrentes. Poros, de uno a dos milímetros, angulosos y casi blancos. Esporas elipsoideas alargadas, de unas diez μ, con la superficie sembrada de papilas prominentes y traslúcidas.

Habitación.—Sobre los tocones y troncos cortados de las hayas, en verano.

Area.—Vertientes del Pirineo.

Observación.—Esta especie es comestible.

(Continuará.)

INDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE TOMO

Páginas.

Constitución de la Academia en 1.º de Julio de 1915:

Académicos de número..... 5

Académicos electos..... 6

Académicos Corresponsales nacionales..... 7

Académicos Corresponsales extranjeros..... 8

Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencias 1.ª a 16.... 11, 27, 47, 121, 201, 226, 287, 306, 379, 409, 469, 549, 629, 709, 789 y 815

Las relaciones modulares en los cráneos de España. Nota presentada en Mayo de 1915, por *Luis de Hoyos Sainz*. 68 y 170

Bosquejo del estudio de las mareas, por *Eduardo León y Ortiz*..... 155 y 254

La presión osmótica y las disoluciones ideales, por *Rafael Luna Nogueras*..... 188 y 274

Neurópteros nuevos de España (primera serie), por el *Reverendo P. Longinos Navás, S. J.*..... 245

Aparato de medición para análisis de gases, por *Enrique Hauser*..... 331

Consideraciones sobre la clasificación minerológica, por *Lucas Fernández Navarro*..... 345

Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia), por *Blas Lázaro e Ibiza*..... 427, 488, 574, 655, 734 y 833

Registro de las señales hertzianas a grandes distancias, por *Gonzalo Brañas Fernández*..... 525

Neurópteros nuevos de España (segunda serie), por el *Reverendo P. Longinos Navás, S. J.*..... 593

Páginas.

Sobre la teoría científica de la música, por *Juan Dominguez Berrueta*..... 602, 694 y 760

El manganeso como catalizador de las reacciones bioquímicas, por las cuales el nitrógeno atmosférico, por vía bacteriana, es asimilado por las plantas, por *Antonio de Gregorio Rocasolano*..... 681

Los parásitos del «poll-roig», por *Ricardo Garcia Mercet*.... 776

ÍNDICE

DE LAS MATERIAS CONTENIDAS EN ESTE NÚMERO

PÁGS.

XXXVI.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia décimaquinta..... 789

XXXVII.—Conferencias sobre Física matemática. Teoría cinemática de los gases (primera parte), por *José Echegaray*. Conferencia décimasexta..... 815

XXXVIII.—Los poliporáceos de la flora española (estudio crítico y descriptivo de los hongos de esta familia) (continuación), por *Blas Lázaro é Ibiza*..... 833

La subscripción á esta REVISTA se hace por tomos completos, de 500 á 600 páginas, al precio de 12 pesetas en España y 12 francos en el extranjero, en la Secretaría de la Academia, calle de Valverde, núm. 26, Madrid.

Precio de este cuaderno, 1,50 pesetas.

SMITHSONIAN INSTITUTION LIBRARIES
3 9088 01224 1634